现代应用动力学

T.R.凯恩　P.W.赖金斯　D.A.雷文森　著
王　兴　余文铎　杨兆光　王大钧　译
王　兴　校

内 容 提 要

本书是美国斯坦福大学教授 T. R. 凯恩系统总结他所创立的一套动力学新方法的专著. 凯恩方法被国际上公认为是理论力学的一个重大新发展. 全书共分四章. 前三章包括运动学基础, 万有引力和力矩的矢量论述, 以及简单宇宙飞船问题; 第四章集中在凯恩提出的新的运动学概念, 万有引力势能理论, 建立运动方程的新方法以及复杂的宇宙飞船问题. 这一章集中介绍了作者首创的建立运动方程的新方法, 这一方法特别适用于具有多自由度的空间力学系统. 本书每节都配有例题, 书末还附有四组习题共 126 道, 并附有答案.

本书是钱伟长教授推崇的一本专著. 它可以作为理工科大学师生进行理论力学教学的参考书, 也可作为力学专业高年级学生和研究生的教材, 并可供广大科研工作者和工程技术人员参考.

SPACECRAFT DYNAMICS

T. R. Kane P. W. Likins

D. A. Levinson

McGraw·Hill Book Company

1983

现 代 应 用 动 力 学

T. R. 凯恩 P. W. 赖金斯 D. A. 雷文森 著

王 兴 余文铎 杨兆光 王大钧 译

王 兴 校

上海翻译出版公司

(上海武定西路 1251 弄 20 号)

新华书店上海发行所发行 上海东方印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 17 字数 394,400

1987 年 9 月第 1 版 1987 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—4,000

统一书号: 13311·18 定价: 4.30 元

中译本序

«现代应用动力学»是根据美国斯坦福大学 T. R. Kane 教授等所著«航天器动力学» 1983 年版翻译的.

Kane 教授现任斯坦福大学机械工程系的应用力学教授，他自哥伦比亚大学获得博士学位后，历任宾夕法尼亚大学、曼彻斯特大学理工学院、里约热内卢联邦大学等校的教授，曾在 1968 年作为美苏交换学者在苏联科学院工作，亦曾任职于美国宇航局(NASA)，Harley-Davidson 动力公司，Vertol 飞机公司，Bell 电话公司等公私企业，有许多技术贡献. 第二作者 Peter W. Likins 是现任哥伦比亚大学的校长和哥伦比亚大学理工学院院长，他曾长期从事喷射推进的研究和发展工作，有许多学术著作. 第三作者 David A. Levinson 是洛克希德研究所的工程师，他曾在德克萨斯的奥斯汀大学的航天和工程力学系长期任教应用力学.

本书是作者们长期从事这一方面的科研工作和教学工作的结晶.

经典的分析力学以广义坐标为基础、描述动力学问题，业已有两百年的历史，但这些方程在处理多自由度的问题时，遇到不少困难、而晚近航天器和机械自动化的发展中，几乎普遍碰到多自由度问题. Kane 教授廿多年来，在处理航天器的运动时提出了广义速率等一系列新概念，用这些量来描述运动时，得到一系列新的一阶导数的动力学微分方程，简称 Kane方程，这个方程的求解可以借助于计算机的常用方法，这样就在分析力学的学科中造成了很深冲击. Kane 方法不仅满意地处理了航天器的运动问题，而且也为机械手的复杂多自由度运动问题，提供了有力的工具.

虽然，Kane 方法在决定广义速率上，还有许多问题，值得研究，但是，它给予分析力学以新的生命力. 本书为读者提供了学习这个方法的基础，对于我国从事理论力学的科研工作者和教学工作者，都是很有参考价值的.

钱伟长

1986, 10, 24 于上海工业大学

序　言

这本书是作者在斯坦福大学和洛杉矶加利福尼亚大学授课过程中，以及在宇宙飞船动力学领域内从事专业活动中写成的. 它既可作为研究生课程教课书，又可作为在这个领域从事研究、设计和发展的工程师的一本参考书.

本书标题的选择和排列是基于下述考虑.

解一个宇宙飞船动力学问题必然要建立数学模型，要用力学原理去建立控制着数学模型中出现的各种量的方程，以及要从这些方程中提炼出有用的信息. 要获得建立宇宙飞船数学模型的技术，最好通过实践获得，而不能通过个别传授，特别是通过已出版的资料来获得. 因此，这类问题不会在书中正式地论述. 可是，通过例子，读者可以接触到相当数量的宇宙飞船的数学模型，而且，随带本书工作，能够获得更多所需的这类经验. 作为对照，运动方程的建立则是一个正式讨论的课题，而且，这个课题必须有效地探讨，因为，企图从不正确的运动方程提炼出信息是毫无意义的. 现在，每个宇宙飞船动力学分析都必然要应用各种运动学关系，其中的一些关系在空间时代之前对技术的发展所起的作用是如此之小，以致它们在一般力学文献中即使有所述及的话，也仅仅是粗略地作了论述. 因此，本书一开始就说明什么是运动学概念的统一的，现代的论述，这些概念在讨论宇宙飞船动力学问题时是十分有用的.

为了合理地安排书中所讨论的课题，我们转到熟悉的关系式 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，这里把它看作是一个概念性的导线，而不看作是一个物理定律的陈述. 由此可见，式中 $\boldsymbol{a}$ 表示所有运动学的量，$\boldsymbol{F}$ 表示所有的作用力，m 表示所有惯量性质，等号则表示运动学的量、力以及惯量性质之间的相互关系. 这样就清楚了，必须先论述运动学，力和惯量性质，然后再研究建立运动方程的技术.

惯量性质问题，即求解质心、惯量矩和惯量积、惯量主轴等问题，在现有的教科书中已广泛地讨论了，联系到宇宙飞船并不能获得新的东西. 因此，我们假定读者了解这方面的内容. 关于影响宇宙飞船动态的力的详细资料并不是容易理解的. 因此，这个课题安排在第二章中论述，并且将注意力集中在万有引力上，因为它在宇宙飞船动力学方面起着卓越的作用. 然后使我们有可能在第三章和第四章中讨论具体的问题，这两章在一个重要方面又相互区别：第三章通篇讨论比较简单的宇宙飞船，即只依赖动量矩定理去建立动力学方程，而在第四章中讨论了复杂的宇宙飞船，在这一章中我们首创并使用了一个对建立运动方程更强有力的方法，这个方法特别适用于具有多自由度的宇宙飞船问题.

本书的大部分小节安排如下：每节开始，用一种明确陈述方式介绍理论材料，这些陈述或者是定义，或者能用演绎推理证明为正确. 后一种情形，推理是在“推导”标题下进行的；此外，每节包括一个例题，作为本节理论的应用. 因此，在课堂上，导师可以将注意力集中在他所喜欢的方面，即集中在理论的描述上，或者正式的推导上，或者例题上，而让学生在课余时间去完成课堂上没有深入研究的部分.

除了课文中出现的例题外，本书还包括四组习题，每一组与四章中的一章紧密联系．要掌握本书的内容，学生必须解答每一个习题，因为每道题的内容都不重复．凡是可能的地方都给出答案，因此总可确定求解的结果是否正确．

一般说来，在一门研究生课程的可用时间内很难教完本书的全部内容，可是，这些内容使本书适宜于在两门课程中讲授，分别论述§1.1～§1.20，§2.1～§2.8，§3.1～§3.11等节和§1.21，§2.9～§2.18，§4.1～§4.11等节．第一门课程包括运动学的基础，万有引力和力矩的矢量论述，以及简单宇宙飞船，这样，使学生能有效地完成宇宙飞船动力学习题，并在这个领域中进一步进行研究；第二门课程集中在新的运动学概念，万有引力势能理论，建立运动方程的新方法，以及复杂的宇宙飞船问题等方面，学生成功地学完这门课程，将能承担宇宙飞船动力学的最前沿工作．

求解宇宙飞船动力学问题时使用计算机是如此频繁，以致必须假设在这个领域内工作的人都熟悉程序的概念．编写和操作计算机程序与基于这本书的课程是有联系的，但也不是绝对必要；也就是说，大多数问题是这样建立的，即使在没有计算机的帮助下，研究它们仍能得到很大的好处．

为了写成一本独立的书，我们略去了所有在宇宙飞船动力学方面的广泛的参考文献与著作．然而，必须承认许多作者的工作影响了我们的思想，对此深表感谢，还要感谢在写作本书时给于帮助的学生，他们提出了评论和建议，同样还要感谢斯坦福大学和洛杉矶加利福尼亚大学，感谢它们在时间和计算方面的慷慨支持．

T. R. 凯恩

P. W. 赖金斯

D. A. 雷文森

目 录

第一章

运　动　学

任何一个宇宙飞船动力学问题都要考虑运动学. 事实上，大多数这类问题的解都是从运动学的关系式开始的. 因此，运动学须详细加以讨论.

本章的前九节讨论刚体在参考系里的方位变化，这时并不去关心时间，虽然真实物体的方位改变必然伴随着时间的消逝. 其余各小节的讨论将涉及到时间，并且都围绕着角速度的概念而展开. 最后概括性的一小节包括了一些量的定义，这些定义在第四章中非常便利于阐明复杂宇宙飞船运动的动力学方程. 读者在初步讨论简单的宇宙飞船时可以暂不考虑这一小节(包括习题 1.27～1.31)，比如在讨论第三章时就可暂时不去考虑这一小节.

§1.1　简 单 旋 转

当参考系 B(或一刚体)相对于参考系 A(或一刚体)运动时，假如存在一根旋转轴 L，即在运动中 L 相对于 A 和 B 的方位保持不变，则这种运动称为 B 在 A 中的简单旋转. 这一类运动之所以重要，是因为 A 和 B 的相对方位的任何改变都能由 B 在 A 中的简单旋转而得到，这一点将在 §1.3 中予以阐明.

假如 $\boldsymbol{a}$ 是任一被固定在 A 中的矢量(见图 1.1.1)，$\boldsymbol{b}$ 是固定在 B 中的一个矢量并且在 B 对 A 运动之前等于 $\boldsymbol{a}$，则当 B 在 A 中作了一个简单旋转以后，$\boldsymbol{b}$ 能由矢量 $\boldsymbol{a}$、平行于 L 的单位矢量 $\boldsymbol{\lambda}$ 以及 L_A 线与 L_B 线之间的夹角 θ 所表出，其中 L_A 和 L_B 分别为固定在 A 和 B 中、垂直于 L 并且开始时相互平行的线段. 若 B 对 A 的旋转使固定在 B 中的平行于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的右手螺旋沿 $\boldsymbol{\lambda}$ 方向前进时，则可假定 L_B 相对于 L_A 作 $\boldsymbol{\lambda}$-旋转而产生的 θ 角是正的，这时有

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cos\theta-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\lambda}\sin\theta+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}(1-\cos\theta) \qquad (1)$$

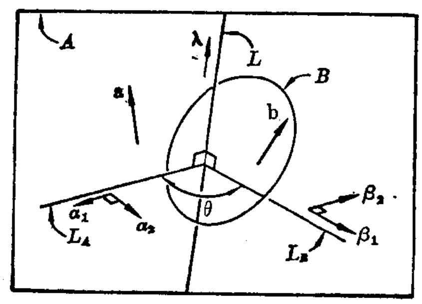

图　1.1.1

换言之，假使定义并矢 $\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{C}\triangleq\boldsymbol{U}\cos\theta-\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{\lambda}\sin\theta+\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}(1-\cos\theta) \qquad (2)$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 是单位并矢(或恒等并矢)，则

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{C} \qquad (3)$$

推导　令 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是固定在 A 中的单位矢量，并且 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 平行于 L_A，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\alpha}_1$；令 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 是固定在 B 中的单位矢量，并且 $\boldsymbol{\beta}_1$ 平行于 L_B，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\beta}_1$，如图 1.1.1. 假如 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别被分解为平行于 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\lambda}$ 的诸分量，由于当 $\theta=0$ 时 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则可知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 被分解后的各对应分量的大小相等. 换言之，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 可表示为

$$\boldsymbol{a}=p\boldsymbol{\alpha}_1+q\boldsymbol{\alpha}_2+r\boldsymbol{\lambda} \qquad (4)$$

和

$$\boldsymbol{b}=p\boldsymbol{\beta}_1+q\boldsymbol{\beta}_2+r\boldsymbol{\lambda} \tag{5}$$

其中 p, q 和 r 是常数.

单位矢量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 可用 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 表出

$$\boldsymbol{\beta}_1=\cos\theta\,\boldsymbol{a}_1+\sin\theta\,\boldsymbol{a}_2 \tag{6}$$

和

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\sin\theta\,\boldsymbol{a}_1+\cos\theta\,\boldsymbol{a}_2 \tag{7}$$

将(6)、(7)式代入(5)式,可得

$$\boldsymbol{b}=(p\cos\theta-q\sin\theta)\boldsymbol{a}_1+(p\sin\theta+q\cos\theta)\boldsymbol{a}_2+r\boldsymbol{\lambda} \tag{8}$$

将(4)式及 $\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{a}_2=-\boldsymbol{a}_1$ 代入(1)式右边,经过运算恰好就是(8)式的左端项,这样(1)式证毕. (3)式可直接由(1)、(2)两式得到.

例　一长方块 B 尺寸如图1.1.2, 它装在宇宙飞船 A 上组成天线结构的一部分. 长方块在 A 中绕 B 的某一个表面的对角线作简单旋转, 旋转的大小和方向如图所示. 试求 OP 线的初始位置与终了位置的夹角 ϕ.

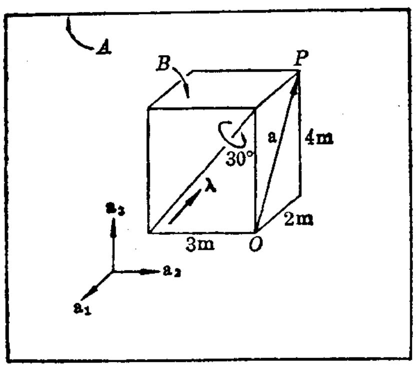

图　1.1.2

假如 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$ 是固定在 A 中的平行于初始 B 的各边的单位矢量, 则如图所示的单位矢量 $\boldsymbol{\lambda}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{3\boldsymbol{a}_2+4\boldsymbol{a}_3}{5} \tag{9}$$

若用 $\boldsymbol{a}$ 表示 B 旋转前 P 点相对于 O 点的矢径, 则

$$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\lambda}=\frac{-12\boldsymbol{a}_1+8\boldsymbol{a}_2-6\boldsymbol{a}_3}{5} \tag{11}$$

和

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}=\frac{48\boldsymbol{a}_2+64\boldsymbol{a}_3}{25} \tag{12}$$

因此,若 $\boldsymbol{b}$ 为 B 旋转后 P 点相对于 O 点的矢径①,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\underset{(1)}{=}&(-2\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3)\cos\frac{\pi}{6}+\frac{12\boldsymbol{a}_1-8\boldsymbol{a}_2+6\boldsymbol{a}_3}{5}\sin\frac{\pi}{6}+\frac{48\boldsymbol{a}_2+64\boldsymbol{a}_3}{25}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)\\=&-0.532\,\boldsymbol{a}_1-0.543\,\boldsymbol{a}_2+4.407\,\boldsymbol{a}_3\end{aligned} \tag{13}$$

因为 ϕ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角,所以

$$\cos\phi=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} \tag{14}$$

其中 $|\boldsymbol{a}|$ 和 $|\boldsymbol{b}|$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小,因此

$$\cos\phi=\frac{(-2)(-0.532)+4(4.407)}{(4+16)^{1/2}(4+16)^{1/2}}=0.935 \tag{15}$$

而 $\phi=20.77°$.

① 等号下面的数字表示需要注意的式子。

§1.2 方向余弦

假如 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 是两组右旋正交单位矢量，则 9 个被称作方向余弦的量 C_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$可定义为

$$C_{ij} \triangleq \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j \quad (i, j=1, 2, 3) \tag{1}$$

并且两个行矩阵$[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$和$[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3]$可用下式联系

$$[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3]=[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]C \tag{2}$$

其中 C 是方阵并定义如下

$$C \triangleq \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \tag{3}$$

假如用上标 T 来表示转置，即假如 C^T 被定义为

$$C^T \triangleq \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \tag{4}$$

则(2)式可由如下的等价关系式取代

$$[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]=[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3]C^T \tag{5}$$

矩阵 C 称为方向余弦矩阵，它能用来描述两个参考系或刚体 A 和 B 之间的方位关系。为了方便起见，在下文中将用详细的符号 ${}^AC^B$ 来代替 C。根据(2)式与(5)式，可以认为上标的交换就是矩阵的转置，即

$${}^BC^A=({}^AC^B)^T \tag{6}$$

在许多有用的关系式中都会用到方向余弦矩阵 C，例如，设 $\boldsymbol{v}$ 是任一矢量，并设 ${}^Av_i$ 和 ${}^Bv_i$$(i=1, 2, 3)$定义为

$${}^Av_i \triangleq \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}_i \quad (i=1, 2, 3) \tag{7}$$

和

$${}^Bv_i \triangleq \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}_i \quad (i=1, 2, 3) \tag{8}$$

用 ${}^Av$ 和 ${}^Bv$ 表示行矩阵，即 ${}^Av=[{}^Av_1\ {}^Av_2\ {}^Av_3]$，${}^Bv=[{}^Bv_1\ {}^Bv_2\ {}^Bv_3]$，则

$${}^Bv={}^AvC \tag{9}$$

同理，若 $\boldsymbol{D}$ 是任一并矢且 ${}^AD_{ij}$ 和 ${}^BD_{ij}$$(i, j=1, 2, 3)$定义为

$${}^AD_{ij} \triangleq \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{a}_j \quad (i, j=1, 2, 3) \tag{10}$$

和

$${}^BD_{ij} \triangleq \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{b}_j \quad (i, j=1, 2, 3) \tag{11}$$

当 ${}^AD$ 和 ${}^BD$ 表示方阵，它们的 i 行 j 列所对应的元素分别为 ${}^AD_{ij}$ 和 ${}^BD_{ij}$，则

$${}^BD=C^{T\,A}DC \tag{12}$$

对重复下标的求和约定将会使重要关系式变得相当简洁，例如，设 δ_{ij} 被定义为

$$\delta_{ij} \triangleq 1-\frac{1}{4}(i-j)^2[5-(i-j)^2] \quad (i, j=1, 2, 3) \tag{13}$$

即

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i=j \end{cases} \quad (i, j=1, 2, 3)$$

则求和约定将使控制方向余弦的六个关系式表示为如下一式

$$C_{ik}C_{jk}=\delta_{ij} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{14}$$

或

$$C_{ki}C_{kj}=\delta_{ij} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{15}$$

这两个关系式亦可表示成矩阵形式

$$CC^T=U \tag{16}$$

和

$$C^TC=U \tag{17}$$

其中U表示单位阵，定义为

$$U \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

矩阵C的每一个元素都等于它在C的行列式中所对应的代数余子式，并且若以$|C|$表示C的行列式，则

$$|C|=1 \tag{19}$$

因此C是一个正交矩阵，它的逆阵等于它的转置阵；并且

$$|C-U|=0 \tag{20}$$

因此1是每个方向余弦矩阵的特征值之一．换言之，对每个方向余弦矩阵C都有被称为特征向量的行阵$[\varkappa_1\ \varkappa_2\ \varkappa_3]$满足下列方程

$$[\varkappa_1\ \varkappa_2\ \varkappa_3]C=[\varkappa_1\ \varkappa_2\ \varkappa_3] \tag{21}$$

现作如下假设：$\boldsymbol{a}_i$和$\boldsymbol{b}_i(i=1,\ 2,\ 3)$分别是固定在参考系（或刚体）$A$和参考系（或刚体）$B$中的一组矢量；$B$在$A$中作简单旋转（见§1.1）；在旋转之前$\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{b}_i(i=1,\ 2,\ 3)$；$\boldsymbol{\lambda}$和$\theta$按§1.1定义；$\lambda_i$按下式定义

$$\lambda_i \triangleq \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{b}_i \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{22}$$

则C阵的各元素由以下各式给出

$$C_{11}=\cos\theta+\lambda_1^2(1-\cos\theta) \tag{23}$$

$$C_{12}=-\lambda_3\sin\theta+\lambda_1\lambda_2(1-\cos\theta) \tag{24}$$

$$C_{13}=\lambda_2\sin\theta+\lambda_3\lambda_1(1-\cos\theta) \tag{25}$$

$$C_{21}=\lambda_3\sin\theta+\lambda_1\lambda_2(1-\cos\theta) \tag{26}$$

$$C_{22}=\cos\theta+\lambda_2^2(1-\cos\theta) \tag{27}$$

$$C_{23}=-\lambda_1\sin\theta+\lambda_2\lambda_3(1-\cos\theta) \tag{28}$$

$$C_{31}=-\lambda_2\sin\theta+\lambda_3\lambda_1(1-\cos\theta) \tag{29}$$

$$C_{32}=\lambda_1\sin\theta+\lambda_2\lambda_3(1-\cos\theta) \tag{30}$$

$$C_{33}=\cos\theta+\lambda_3^2(1-\cos\theta) \tag{31}$$

若定义ϵ_{ijk}

$$\epsilon_{ijk} \triangleq \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) \quad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3) \tag{32}$$

（当有两个或三个下标相等时ϵ_{ijk}等于零；当下标以循环次序，即以1，2，3或2，3，1或3，1，2的次序出现时，ϵ_{ijk}等于1；其他情况下ϵ_{ijk}等于-1），则(23)至(31)式可简化为

$$C_{ij}=\delta_{ij}\cos\theta-\epsilon_{ijk}\lambda_k\sin\theta+\lambda_i\lambda_j(1-\cos\theta) \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{33}$$

C_{ij} 也能用(1.1.2)式定义的并矢 $\boldsymbol{C}$ 来表示

$$C_{ij}=\boldsymbol{a}_i\cdot(\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{C})\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3)\tag{34}$$

当 $\boldsymbol{\lambda}$ 平行于 $\boldsymbol{a}_i$ 因此也平行于 $\boldsymbol{b}_i$ 时($i=1,\ 2,\ 3$)，所有这些结果都有很大的简化. 设 $C_i(\theta)$ 表示 $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{b}_i$ 时的 C，则

$$C_1(\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\tag{35}$$

$$C_2(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{bmatrix}\tag{36}$$

$$C_3(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\tag{37}$$

前面已经讲过，1 是任何方向余弦矩阵的一个特征值. 若一个方向余弦矩阵 C 的元素由(23)式至(31)式给出，则行矩阵$[\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3]$是对应于特征值 1 的一个特征向量，即

$$[\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3]C=[\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3]\tag{38}$$

换言之，当 $\boldsymbol{C}$ 是(1.1.2)式所定义的并矢，则

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\lambda}\tag{39}$$

推导 对任一矢量 $\boldsymbol{v}$，下式恒成立

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}_1+(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}_2+(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}_3\tag{40}$$

若以 $\boldsymbol{b}_1$ 代替 $\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{b}_1$可表示为

$$\boldsymbol{b}_1=(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{a}_1+(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{a}_2+(\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{a}_3\tag{41}$$

由(1)式，$\boldsymbol{b}_1$ 可表为

$$\boldsymbol{b}_1=C_{11}\boldsymbol{a}_1+C_{21}\boldsymbol{a}_2+C_{31}\boldsymbol{a}_3\tag{42}$$

同理有

$$\boldsymbol{b}_2=C_{12}\boldsymbol{a}_1+C_{22}\boldsymbol{a}_2+C_{32}\boldsymbol{a}_3\tag{43}$$

和

$$\boldsymbol{b}_3=C_{13}\boldsymbol{a}_1+C_{23}\boldsymbol{a}_2+C_{33}\boldsymbol{a}_3\tag{44}$$

这三个方程恰好就是由(2)式利用矩阵乘法所给出的，同理可以导出(5)式.

要证明(9)式，只须注意到

$$\begin{aligned}{}^Bv_i&\underset{(8,\ 2)}{=}\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{a}_1C_{1i}+\boldsymbol{a}_2C_{2i}+\boldsymbol{a}_3C_{3i})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_1C_{1i}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_2C_{2i}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_3C_{3i}\\&\underset{(7)}{=}{}^Av_1C_{1i}+{}^Av_2C_{2i}+{}^Av_3C_{3i}\end{aligned}\tag{45}$$

再注意到 ${}^Av$ 和 ${}^Bv$ 的定义即可. 类似地，(12)式可由

$$\begin{aligned}{}^BD_{ij}&\underset{(11,\ 2)}{=}(\boldsymbol{a}_1C_{1i}+\boldsymbol{a}_2C_{2i}+\boldsymbol{a}_3C_{3i})\cdot\boldsymbol{D}\cdot(\boldsymbol{a}_1C_{1j}+\boldsymbol{a}_2C_{2j}+\boldsymbol{a}_3C_{3j})\\&\underset{(10)}{=}C_{1i}({}^AD_{11}C_{1j}+{}^AD_{12}C_{2j}+{}^AD_{13}C_{3j})\\&\quad+C_{2i}({}^AD_{21}C_{1j}+{}^AD_{22}C_{2j}+{}^AD_{23}C_{3j})\\&\quad+C_{3i}({}^AD_{31}C_{1j}+{}^AD_{32}C_{2j}+{}^AD_{33}C_{3j})\end{aligned}\tag{46}$$

及 ${}^AD$ 和 ${}^BD$ 的定义推得.

因为
$$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j\underset{(1,\,5)}{=}C_{ik}C_{jk}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3)\tag{47}$$
和
$$\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j=C_{ki}C_{kj}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3)\tag{48}$$
又因为
$$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$
及
$$\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$
这样(14)式及(15)式就可得到. 注意到(3)式、(4)式及(18)式, 由矩阵乘法可知(16)式及(17)式分别等价于(14)式及(15)式. 因为
$$\boldsymbol{b}_1\underset{(2)}{=}C_{11}\boldsymbol{a}_1+C_{21}\boldsymbol{a}_2+C_{31}\boldsymbol{a}_3\tag{49}$$
及
$$\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3\underset{(2)}{=}(C_{22}C_{33}-C_{32}C_{23})\boldsymbol{a}_1+(C_{32}C_{13}-C_{12}C_{33})\boldsymbol{a}_2+(C_{12}C_{23}-C_{22}C_{13})\boldsymbol{a}_3\tag{50}$$
且 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3$(因为 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ 组成一组右旋正交单位矢量), 所以可得
$$C_{11}=C_{22}C_{33}-C_{32}C_{23}\tag{51}$$
$$C_{21}=C_{32}C_{13}-C_{12}C_{33}\tag{52}$$
和
$$C_{31}=C_{12}C_{23}-C_{22}C_{13}\tag{53}$$
这样就证得(3)式中的 C 阵的第一列各元素等于它在 C 中的代数余子式; 利用 $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2$ 可以导出 C 阵中第二列及第三列各元素的相应结果, 这样就证得 C 阵的每一元素等于在 C 的行列式中它所对应的代数余子式. 在此基础上, 若按 C 阵的第一行展开 C 的行列式, 并令(14)式中的 $i=j=1$, 则可导出(19)式.

因为 $C-U$ 的行列式可展开为
$$|C-U|\underset{(3)}{=}|C|+C_{11}+C_{22}+C_{33}+C_{12}C_{21}+C_{23}C_{32}+C_{31}C_{13}-(C_{11}C_{22}+C_{22}C_{33}+C_{33}C_{11})-1\tag{54}$$
当分别用 $|C|$ 中的代数余子式代替 C_{11}, C_{22} 和 C_{33} 时可得
$$|C-U|=|C|-1\underset{(19)}{=}0\tag{55}$$
这样(20)式得证, 并且保证了满足(21)式的行阵 $[\varkappa_1\ \varkappa_2\ \varkappa_3]$ 的存在.

(22)式中量 $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_i$ 等于量 $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{b}_i$ 是基于如下的事实: 在 B 相对于 A 转动之前这两个量相等, 即 $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{b}_i$; 并且, 由于规定了 $\boldsymbol{\lambda}$ 平行于一条在 A 与 B 中的方向在旋转中保持不变的直线, 这样无论是量 $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_i$ 还是量 $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{b}_i$ 在旋转中都不变化.

若用 $\boldsymbol{a}_j$ 和 $\boldsymbol{b}_j$ 代替 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 则(1.1.3)式变为
$$\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{C}\tag{56}$$
因此
$$C_{ij}\underset{(1)}{=}\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_j\underset{(56)}{=}\boldsymbol{a}_i\cdot(\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{C})\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3)\tag{57}$$
这就是(34)式. 进一步将(1.1.2)式的 $\boldsymbol{C}$ 的表达式代入可得
$$C_{ij}=\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j\cos\theta-\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{\lambda}\sin\theta+\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_j(1-\cos\theta)\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3)\tag{58}$$

由这一式及(22)式直接给出(23)式至(31)式，或由(32)式，还给出(33)式.

令 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=0$，代入(23)式至(31)式，再用(3)式可得(35)式. 同理，令 $\lambda_1=\lambda_3=0$, $\lambda_2=1$ 可得(36)式，令 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$ 可得(37)式.

因为①

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{C} \underset{(1.1.2)}{=} \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{U}\cos\theta-\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\lambda}\sin\theta+\boldsymbol{\lambda}^2\boldsymbol{\lambda}(1-\cos\theta)$$

$$=\boldsymbol{\lambda}\cos\theta+0+\boldsymbol{\lambda}(1-\cos\theta)=\boldsymbol{\lambda} \tag{59}$$

所以可得(39)式. 上式中 $\boldsymbol{\lambda}^2\triangleq\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}=1$ 是因为 $\boldsymbol{\lambda}$ 是单位矢量. 由(22)式及(34)式可知，(38)式等价于(39)式.

例 在图1.2.1中 B 表示一个均匀的长方块，它是装在宇宙飞船 A 上的扫瞄台的一个部件. 开始时 B 的各边平行于固定在 A 中的单位矢量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$，然后扫瞄台绕 B 的一个对角线作简单的 90° 旋转，如图所示. 假如 $\boldsymbol{I}$ 是 B 对其质心 B^* 的惯量并矢，并且 ${}^AI_{ij}$ 定义为

$${}^AI_{ij}\triangleq\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{a}_j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{60}$$

试求 ${}^AI_{ij}$ 在旋转之后的值$(i, j=1,2,3)$.

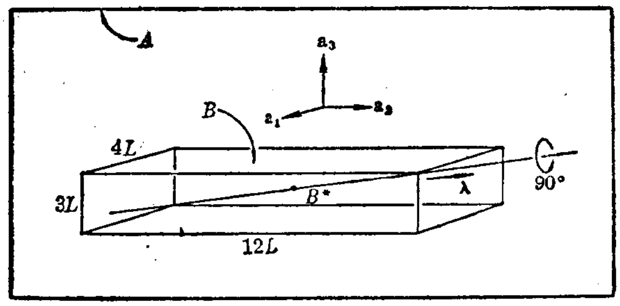

图 1.2.1

设 $\boldsymbol{b}_i(i=1,\ 2,\ 3)$ 是固定在 B 中的单位矢量，并且在旋转之前等于 $\boldsymbol{a}_i(i=1,\ 2,\ 3)$，定义 ${}^BI_{ij}$ 为

$${}^BI_{ij}\triangleq\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{b}_j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{61}$$

则 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ 和 $\boldsymbol{b}_3$ 平行于 B 对其质心 B^* 的惯量主轴，这样就有

$${}^BI_{12}={}^BI_{21}={}^BI_{23}={}^BI_{32}={}^BI_{31}={}^BI_{13}=0 \tag{62}$$

再设 B 的质量为 m，则

$${}^BI_{11}=\frac{m}{12}(12^2+3^2)\ L^2=\frac{153}{12}\ mL^2 \tag{63}$$

$${}^BI_{22}=\frac{m}{12}(3^2+4^2)\ L^2=\frac{25}{12}\ mL^2 \tag{64}$$

和

$${}^BI_{33}=\frac{m}{12}(4^2+12^2)\ L^2=\frac{160}{12}\ mL^2 \tag{65}$$

设 ${}^BI$ 表示方阵，且其 i 行 j 列的元素为 ${}^BI_{ij}$，则

$${}^BI=\frac{mL^2}{12}\begin{bmatrix}153 & 0 & 0\\ 0 & 25 & 0\\ 0 & 0 & 160\end{bmatrix} \tag{66}$$

在图1.2.1中的单位矢量 $\boldsymbol{\lambda}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{4\boldsymbol{a}_1+12\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3}{(4^2+12^2+3^2)^{1/2}}=\frac{4}{13}\ \boldsymbol{a}_1+\frac{12}{13}\ \boldsymbol{a}_2+\frac{3}{13}\ \boldsymbol{a}_3 \tag{67}$$

这样，按(22)式的定义，λ_1, λ_2 和 λ_3 由下式给出

① 当需要参见以前各节中的某式时，该式的序号前还加上该节的序号. 例如(1.1.2)式表示§1.1中的(2)式.

$$\lambda_1=\frac{4}{13}\quad \lambda_2=\frac{12}{13}\quad \lambda_3=\frac{3}{13} \tag{68}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$，由(23)式至(31)式给出如下的方向余弦矩阵 C 的表达式

$$C \underset{(3)}{=} \frac{1}{169}\begin{bmatrix} 16 & 9 & 168 \\ 87 & 144 & -16 \\ -144 & 88 & 9 \end{bmatrix} \tag{69}$$

设 ${}^AI$ 为方阵且其 i 行 j 列的元素为 ${}^AI_{ij}$，则

$${}^BI \underset{(12)}{=} C^{T\,A}IC \tag{70}$$

上式两边同时前乘 C 后乘 C^T，则有

$$C\,{}^BIC^T \underset{(70)}{=} CC^{T\,A}ICC^T \underset{(16)}{=} U\,{}^AIU={}^AI \tag{71}$$

可得

$${}^AI \underset{(66,\,69,\,71)}{=} \frac{mL^2}{12\times169\times169}\begin{bmatrix} 16 & 9 & 168 \\ 87 & 144 & -16 \\ -144 & 88 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 153 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 160 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 & 87 & -144 \\ 9 & 144 & 88 \\ 168 & -16 & 9 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{mL^2}{12\times169\times169}\begin{bmatrix} 4,557,033 & -184,704 & -90,792 \\ -184,704 & 1,717,417 & -1,623,024 \\ -90,792 & -1,623,034 & 3,379,168 \end{bmatrix} \tag{72}$$

和

$${}^AI_{11}=\frac{4,557,033\,mL^2}{12\times169\times169}\quad {}^AI_{12}=-\frac{184,704\,mL^2}{12\times169\times169} \tag{73}$$

及其他各项.

§1.3　欧拉参数

在§1.1中介绍的单位矢量 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 θ 角可用来定义被称为欧拉矢量的 $\boldsymbol{\epsilon}$ 和被称为欧拉参数的四个标量 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$，以表征刚体 B 在参考系 A 中的简单旋转

$$\boldsymbol{\epsilon}\triangleq\boldsymbol{\lambda}\sin\frac{\theta}{2} \tag{1}$$

$$\epsilon_i\triangleq\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{b}_i\quad (i=1,\,2,\,3). \tag{2}$$

和

$$\epsilon_4\triangleq\cos\frac{\theta}{2} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 分别为固定在 A 和 B 中的右旋正交单位矢量组，并且在旋转之前 $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{b}_i (i=1, 2, 3)$.（当所讨论的问题牵涉多于两个刚体或参考系时，将采用象 ${}^A\boldsymbol{\epsilon}^B$ 和 ${}^A\epsilon_i^B$ 这样的符号）.

欧拉参数相互间是不独立的，因为四个欧拉参数的平方和等于1，即

$$\epsilon_1^2+\epsilon_2^2+\epsilon_3^2+\epsilon_4^2=\boldsymbol{\epsilon}^2+\epsilon_4^2=1 \tag{4}$$

欧拉参数的效用可以从下述事实看出，即§1.2中介绍的方向余弦矩阵 C 的各元素当用 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 表示时呈现出特别简单和有序的形式：当 C_{ij} 定义为

$$C_{ij}\triangleq\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_j\quad (i,\,j=1,\,2,\,3) \tag{5}$$

则

$$C_{11}=\epsilon_1^2-\epsilon_2^2-\epsilon_3^2+\epsilon_4^2=1-2\epsilon_2^2-2\epsilon_3^2 \tag{6}$$

$$C_{12}=2(\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3\epsilon_4) \tag{7}$$

$$C_{13}=2(\epsilon_3\epsilon_1+\epsilon_2\epsilon_4) \tag{8}$$

$$C_{21}=2(\epsilon_1\epsilon_2+\epsilon_3\epsilon_4) \tag{9}$$

$$C_{22}=\epsilon_2^2-\epsilon_3^2-\epsilon_1^2+\epsilon_4^2=1-2\epsilon_3^2-2\epsilon_1^2 \tag{10}$$

$$C_{23}=2(\epsilon_2\epsilon_3-\epsilon_1\epsilon_4) \tag{11}$$

$$C_{31}=2(\epsilon_3\epsilon_1-\epsilon_2\epsilon_4) \tag{12}$$

$$C_{32}=2(\epsilon_2\epsilon_3+\epsilon_1\epsilon_4) \tag{13}$$

$$C_{33}=\epsilon_3^2-\epsilon_1^2-\epsilon_2^2+\epsilon_4^2=1-2\epsilon_1^2-2\epsilon_2^2 \tag{14}$$

欧拉参数也可以由方向余弦矩阵的各元素表出

$$\epsilon_1=\frac{C_{32}-C_{23}}{4\epsilon_4} \tag{15}$$

$$\epsilon_2=\frac{C_{13}-C_{31}}{4\epsilon_4} \tag{16}$$

$$\epsilon_3=\frac{C_{21}-C_{12}}{4\epsilon_4} \tag{17}$$

和

$$\epsilon_4=\frac{1}{2}(1+C_{11}+C_{22}+C_{33})^{1/2} \tag{18}$$

这样表示的 ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, ϵ_4 仍满足(6)至(14)各式. 假如令

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{\epsilon_1\boldsymbol{a}_1+\epsilon_2\boldsymbol{a}_2+\epsilon_3\boldsymbol{a}_3}{(\epsilon_1^2+\epsilon_2^2+\epsilon_3^2)^{1/2}} \tag{19}$$

和

$$\theta=2\cos^{-1}\epsilon_4 \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{20}$$

则(1)式和(3)式得到满足, 这样可找到一个简单旋转, 与其相关联的各方向余弦[如(1.2.23)式至(1.2.31)式所示]等于满足(1.2.2)式的任何方向余弦矩阵 C 所相应的各元素. 换言之, 两个刚体或两个参考系 A 与 B 之间的相对方位的任何变化都能由 B 在 A 中简单旋转而得到. 这个定理称为欧拉旋转定理.

固定在参考系 A 中的矢量 $\boldsymbol{a}$ 和固定在刚体 B 中的矢量 $\boldsymbol{b}$ 之间的关系, 若 $\boldsymbol{b}$ 在 B 对 A 作简单旋转之前就等于 $\boldsymbol{a}$, 则可由 $\boldsymbol{\epsilon}$ 和 ϵ_4 表示为

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+2[\epsilon_4\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\epsilon}\times(\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{a})] \tag{21}$$

推导 (2)式中 $\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{b}_i$ 可由(1)式和(1.2.22)式获得; 由(1)式至(3)式以及由 $\boldsymbol{\lambda}$ 是单位矢量可推得(4)式; 利用(1.2.22)及(1)至(4)式, 再将以 θ 表示的函数用 $\theta/2$ 来表示, 即可从(1.2.23)至(1.2.31)各式导出(6)至(14)各式. 例如

$$C_{11}\underset{(1.2.23)}{=}2\cos^2\frac{\theta}{2}-1+2\lambda_1^2\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{22}$$

和

$$\lambda_1\sin\frac{\theta}{2}\underset{(1.2.22)}{=}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_1\sin\frac{\theta}{2}\underset{(1)}{=}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{a}_1\underset{(2)}{=}\epsilon_1 \tag{23}$$

当

$$\cos\frac{\theta}{2}\underset{(3)}{=}\epsilon_4 \tag{24}$$

有

$$C_{11}=2\epsilon_4^2-1+2\epsilon_1^2\underset{(4)}{=}\epsilon_1^2-\epsilon_2^2-\epsilon_3^2+\epsilon_4^2 \tag{25}$$

与(6)式一致.

将(15)至(18)式代入(6)至(14)式的右端，即可得到(6)至(14)式的左端，这样，(15)至(18)式得证. 例如

$$\begin{aligned}1-2\epsilon_2^2-2\epsilon_3^2 &\underset{(16\text{-}18)}{=}\frac{2(1+C_{11}+C_{22}+C_{33})-C_{13}^2+2C_{13}C_{31}-C_{31}^2-C_{21}^2+2C_{12}C_{21}-C_{12}^2}{2(1+C_{11}+C_{22}+C_{33})}\\ &\underset{(1.2.14)}{=}\frac{C_{11}+C_{22}+C_{33}+C_{13}C_{31}+C_{12}C_{21}+C_{11}^2}{1+C_{11}+C_{22}+C_{33}}\end{aligned} \tag{26}$$

由于 C 的每个元素都等于它在 $|C|$ 中所对应的代数余子式，

$$C_{13}C_{31}=C_{11}C_{33}-C_{22} \tag{27}$$

和

$$C_{12}C_{21}=C_{11}C_{22}-C_{33} \tag{28}$$

因此

$$1-2\epsilon_2^2-2\epsilon_3^2=\frac{C_{11}+C_{11}C_{33}+C_{11}C_{22}+C_{11}^2}{1+C_{11}+C_{22}+C_{33}}=C_{11} \tag{29}$$

正与(6)式吻合.

当 $\boldsymbol{\lambda}$ 及 θ 由(19)式及(20)式给出时，(1)式和(3)式得到满足，如

$$\cos\frac{\theta}{2}\underset{(20)}{=}\epsilon_4 \tag{30}$$

即为(3)式，又如

$$\sin\frac{\theta}{2}\underset{(20)}{=}(1-\epsilon_4^2)^{1/2}\underset{(4)}{=}(\epsilon_1^2+\epsilon_2^2+\epsilon_3^2)^{1/2} \tag{31}$$

因此

$$\boldsymbol{\lambda}\sin\frac{\theta}{2}\underset{(19)}{=}\epsilon_1\boldsymbol{a}_1+\epsilon_2\boldsymbol{a}_2+\epsilon_3\boldsymbol{a}_3\underset{(2)}{=}\boldsymbol{\epsilon} \tag{32}$$

与(1)式吻合. 最后，(1.1.1)式等价于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{a}\sin\theta+\boldsymbol{\lambda}\times(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{a})(1-\cos\theta)\\ &\underset{(1)}{=}\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{a}\cos\frac{\theta}{2}+2\boldsymbol{\epsilon}\times(\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{a})\underset{(3)}{=}\boldsymbol{a}+2[\epsilon_4\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\epsilon}\times(\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{a})]\end{aligned} \tag{33}$$

与(21)式吻合.

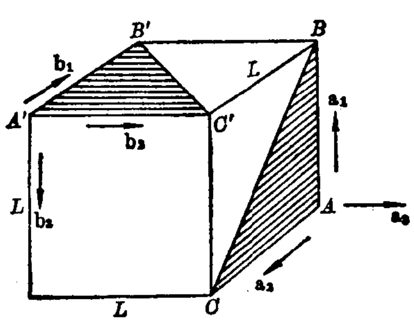

图 1.3.1

例 三角形 ABC (见图 1.3.1) 可通过如下的平动及简单旋转而运动到 $A'B'C'$ 位置上，平动时三角形方位不变，A 平移到 A'，然后作简单旋转，但 A 点保持与 A' 重合，试求与转轴平行的单位矢量 $\boldsymbol{\lambda}$ 和转角 θ.

设单位矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{b}_i$ 的方向如图 1.3.1，这样保证在旋转之前 $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{b}_i(i=1, 2, 3)$；先由 $\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_j$ 来决定 C_{ij}，然后即可用(15)式至(18)式来得到 $\epsilon_i(i=1, 2, 3, 4)$：

$$\epsilon_4\underset{(18)}{=}\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{b}_3)^{1/2}=\frac{1}{2}(1+0+0+0)^{1/2}=\frac{1}{2} \tag{34}$$