金属塑性成形力学原理

JINSHU SUXING CHENGXING LIXUE YUANLI

杨雨甡　曹桂荣
阮中燕　王秀燕　合编

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书内容包括：简单拉伸下材料的塑性现象，应力张量，应变张量，应力、应变关系，屈服准则，金属塑性成形问题解法的解析法、主应力法、能量法、平面应变问题的滑移线法，以及金属连续变形问题、金属板料变形问题、金属自由锻造问题分析等。全书语言流畅，结构严谨，深入浅出，既有一定的理论性，又有很强的实用性。

本书可作为塑性成形工艺及设备专业本科生教材，亦可供相关专业工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

金属塑性成形力学原理/杨雨甡等编著. -北京：北京工业大学出版社，1999.10
ISBN 7-5639-0737-8

Ⅰ.金… Ⅱ.杨… Ⅲ.金属-塑性变形-塑性力学 Ⅳ.TG111.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第66991号

金属塑性成形力学原理

编著 杨雨甡等

※

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

※

1999年10月第1版 1999年10月第1次印刷

850mm×1168mm 32开本 7.25印张 178千字

印数：1～2000册

ISBN 7-5639-0737-8/T·96

定价：10.00元

目　　录

第一章　简单拉伸下材料的塑性现象 …………………………… (1)
§1-1　简单拉伸实验曲线 …………………………………… (1)
§1-2　真实应力、应变关系曲线的简化 …………………… (8)
§1-3　塑性状态下材料的变形特点 ………………………… (13)
§1-4　金属板料拉伸 σ-ε 曲线的回归 ……………………… (18)
第二章　应力张量 ……………………………………………… (20)
§2-1　质点的应力状态 ……………………………………… (20)
§2-2　平面应力状态 ………………………………………… (23)
§2-3　平面应力状态的平衡方程 …………………………… (29)
§2-4　张量的基本概念 ……………………………………… (31)
§2-5　空间质点应力状态与应力张量 ……………………… (33)
§2-6　平衡微分方程 ………………………………………… (50)
第三章　屈服准则 ……………………………………………… (54)
§3-1　对屈服准则的一般性讨论 …………………………… (54)
§3-2　平面应力状态下的屈服准则 ………………………… (57)
§3-3　屈服表面 ……………………………………………… (59)
§3-4　两个屈服准则的统一表达式 ………………………… (62)
§3-5　屈服准则的实验验证 ………………………………… (64)
§3-6　塑性应变硬化材料的屈服与加载表面 ……………… (66)
第四章　应变张量分析 ………………………………………… (70)
§4-1　平面应变问题分析 …………………………………… (70)
§4-2　空间质点应变状态分析 ……………………………… (77)
§4-3　应变张量的性质 ……………………………………… (83)
§4-4　协调方程 ……………………………………………… (87)
§4-5　应变增量张量 ………………………………………… (89)

第五章　应力、应变关系 ……………………………………………… (93)
§5-1　应力、应变关系 ………………………………………………… (93)
§5-2　塑性变形问题应力、应变关系的讨论 ……………………… (98)
§5-3　金属板材塑性变形应力、应变关系 ……………………… (101)
第六章　金属塑性成形问题解法（一）
解析法与主应力法 …………………………………………… (110)
§6-1　塑性问题解法概述 ……………………………………………… (110)
§6-2　摩擦条件 ………………………………………………………… (111)
§6-3　解析法 …………………………………………………………… (112)
§6-4　主应力法 ………………………………………………………… (117)
第七章　金属塑性成形问题解法（二）
平面应变问题的滑移线法 ………………………………………… (120)
§7-1　滑移线的基本概念 ……………………………………………… (120)
§7-2　滑移线的几何性质 ……………………………………………… (124)
§7-3　塑性变形体应力边界滑移线 ……………………………………… (128)
§7-4　塑形介质体内常见滑移线场与滑移线场的建立 ………… (132)
§7-5　速度方程与速度间断问题 ………………………………………… (139)
第八章　金属塑性成形问题解法（三）
能量法 ………………………………………………………………… (147)
§8-1　基本概念 ………………………………………………………… (147)
§8-2　平衡功法 ………………………………………………………… (151)
§8-3　上限法 …………………………………………………………… (153)
第九章　连续变形问题 ……………………………………………… (161)
§9-1　板料材轨轧制 …………………………………………………… (161)
§9-2　金属圆管的变径拉拨 …………………………………………… (167)
§9-3　金属平面连续挤压问题分析 ………………………………… (174)
第十章　金属板料冲压问题 ………………………………………… (183)
§10-1　宽金属板的弯曲 ……………………………………………… (183)
§10-2　金属板料的拉伸变形 ………………………………………… (197)
第十一章　金属自由锻造问题分析 …………………………………… (205)

§11-1　圆柱体镦粗问题分析 …………………………………… (205)
§11-2　矩形六面体镦粗问题分析 ……………………………… (214)
§11-3　冲孔问题分析 ………………………………………… (219)
参考文献 ……………………………………………………… (222)

第一章　简单拉伸下材料的塑性现象

对材料在塑性变形中所表现出来的力学特性的认识与对之所进行的实验研究，是金属塑性成形力学的重要组成部分。尽管简单拉伸实验所表现出来的诸多现象是金属材料在变形过程中许多因素共同作用的结果，但是，由于这一实验简便、易行，能满足工程上的精度要求，所以，常将简单拉伸实验的结果用来作为研究材料塑性变形的应力、应变关系的重要依据。围绕金属材料简单拉伸实验的表征，本章将扼要介绍金属塑性成形理论中有关材料的一些基本概念，以作为后续内容学习的先导。

§1-1　简单拉伸实验曲线

一、拉伸图和条件应力、应变曲线

简单拉伸实验中最为常用的是圆形横截面的金属试样。要求试样从夹持到标长部分有光滑的圆角过渡。所谓标长，是指在试样上标示出来的，用以计量试样几何长度及其变化的划定部分。试样在拉伸设备上夹持要对中良好。实验一般在室温下进行，拉伸的应变速率不大于 2×10^{-3}/秒，这样的塑性变形过程可以称之为是常温下准静态的塑性变形。在简单拉伸实验中记录下来的是拉伸力 P 与试样所发生的绝对伸长 Δl 之间的关系曲线，也称为拉伸图。

将拉力 P 除以试样的初始横截面面积 A_0，即

$$\sigma_0=\frac{P}{A_0} \tag{1.1}$$

得到的是在横截面上的平均载荷，也称为条件应力。如果将伸长 Δl 除以试样的初始长度 l_0，即

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l_0} \tag{1.2}$$

得到的是相对伸长应变。

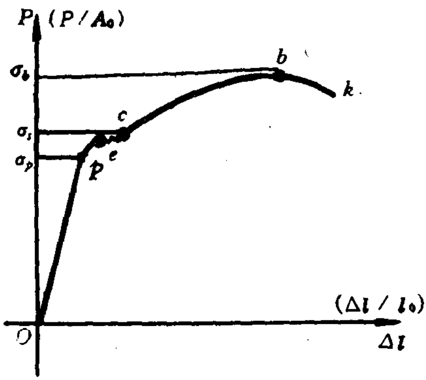


图 1-1　低碳钢试样的拉伸图

不难看出，如果用 σ_0 和 ε 替代图 1-1 中的 P 和 Δl，只要改变图中刻度的大小，曲线本身就不会发生变化。也就是说，这一方法可以很方便地将拉伸图变化为条件应力、相对伸长应变曲线来使用，见图 1-1。

图 1-1 是低碳钢的拉伸曲线，试样在拉伸变形的全过程中经历了如下几个阶段。

(1) 弹性变形阶段 Oe：在这一区段内，卸载后试样的变形全部都能得到恢复，这一区段还可以进一步分别按线弹性变形段 Op 和非线性弹性变形段 pe 两个阶段来讨论。

Op 段：应力、应变呈线性关系的弹性变形段；

pe 段：应力、应变表现为非线性关系的弹性变形段。在这一阶段里，对应 p 点的应力值 σ_p 称为比例极限，对应 e 点的应力值称为弹性极限。

(2) 均匀塑性变形阶段 eb：在这一变形区段内，试样沿长度方向上发生的是均匀的塑性变形。也就是说，试样的横截面在全长上的变化都是一致的。这一区段内，包含了一个基本上是由水

平排列的齿状曲线构成的组合曲线系列，也称屈服平台，见图中的 ec 段。对应 c 点的应力 σ_s 也称屈服应力。并不是所有金属的简单拉伸实验都经历有这一过程，有些金属材料如不锈钢、调质处理后的合金钢与铝合金等，在它们的拉伸图上就没有明显的屈服平台出现。对于这样的材料，它们的屈服应力用塑性应变达到 0.2%时的应力来代替，记为 $\sigma_{0.2}$。在 c 点之后，载荷 P 随试样变形程度的不断发展而提高。在 b 点，P 取得极大值，对应 b 点的条件应力 σ_b 称材料的强度极限。

（3）集中塑性变形阶段 bk：在 b 点之后，继续的塑性变形伴随着载荷急剧下降。试样的变形也集中在试件的某一局部区域内发生。这时将造成试样上出现细径，并且在曲线的 k 点处试件被拉断。

二、拉伸实验的应力、应变关系

首先介绍有关真实应力与真实应变的概念。

（一）真实压力

从前面对条件应力的介绍中可以看出，由于试样的横截面积在拉伸变形过程中逐渐变小，所以条件应力不能反映实验中材料质点瞬时的真实受力状态。真实应力 σ 的定义是：

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.3}$$

式中　P——载荷；

　　A——试样的瞬时横截面积。

由于试样的瞬时截面面积与其原始截面面积有如下关系：

$$A(l_0 + \Delta l) = A_0 \times l_0$$

所以，由式 1.3 有：

$$\sigma = \frac{P}{A_0}(1 + \varepsilon)$$

$$=\sigma_0(1+\varepsilon) \tag{1.4}$$

（二）真实应变

真实应变：设初始长度为 L_0 的试样在变形过程中某一时刻的长度为 L，定义试样此时刻所发生的真实应变为

$$\in=\ln\frac{l}{l_0} \tag{1.5}$$

对上式进行微分运算

$$\mathrm{d}\in=\frac{\mathrm{d}l}{l} \tag{1.6}$$

这一微分结果所表达的正是试样在其即时长度为 l 时发生的增量应变。在试样从 l_0 变至 l 的变形过程，可以看成是试样每一时刻的应变增量 d∈累加的结果，也就是对式 1.6 的积分。可见，式 1.5 反映了试样所发生的真实的应变。真实应变也称对数应变，真实应变在使用上有如下几方面的明显优点。

1. 可加性

将由 l_0 至 l_2 的拉伸应变分段为由 l_0 至 l_1 与从 l_1 至 l_2 的两步变形来考虑，如果按式 1.5 计算，这一真实应变值为

$$\in=\ln\frac{l_2}{l_0}$$

要是分段考虑的话，从下面的计算

$$\begin{aligned}\in&=\in_1+\in_2\\&=\ln\frac{l_1}{l_0}+\ln\frac{l_2}{l_1}\\&=\ln\frac{l_2}{l_0}\end{aligned}$$

的结果不难看出，对数应变具有良好的可加性。读者可以验证，使用相对伸长应变所进行的同样的分步计算，在其结果会产生一定的误差。

2. 拉、压应变的对称性

设两个长度均等于 l_0 的试样，其中一件试样拉伸变形后长度为原长的两倍，即 $2\times l_0$，另一试样经压缩变形后长度变为原长的一半，即 $l_0/2$，这两种变形的对数应变分别是

$$\in_s = \ln\frac{2\times l_0}{l_0}$$

$$= \ln 2$$

$$\in_c = \ln\frac{\frac{l_0}{2}}{l_0}$$

$$= -\ln 2$$

可见其值大小相等，符号相反。使用相对伸长应变计算时，其值分别为

$$\varepsilon_s = \frac{2l_0 - l_0}{l_0}$$

$$= 1$$

$$\varepsilon_c = \frac{\frac{l_0}{2} - l_0}{l_0}$$

$$= -0.5$$

就体现不出这样好的对称性。对数应变的这一优点，使得由拉伸实验所得到的金属材料的应力、应变曲线与从压缩实验所得到的曲线有良好的对称性。也就是说，通过其中任何一个实验所得到的结果都可推广到另外的一种情况下应用。

3. 准确表达材料塑性变形体积不变规律

材料塑性变形的体积不变规律可以由对数应变准确地表达。

设一长、宽、高为 l、b、h 的长方体发生均匀的塑性变形且认为其体积保持不变，于是有：

$$\mathrm{d}(lbh) = (bh)\mathrm{d}l + (lh)\mathrm{d}b + (lb)\mathrm{d}h$$

$$= 0$$

在等式两端同时除以 lbh，则材料塑性变形体积不变规律的表达式如下：

$$d\in_l + d\in_b + d\in_h = 0 \tag{1.7}$$

用相对伸长应变来表达这一体积不变规律时的表达式是：

$$(1 + d\varepsilon_l)(1 + d\varepsilon_b)(1 + d\varepsilon_h) = 0$$

即只有在应变很小的情况下，将上式展开并略去高阶无穷小后才会有

$$d\varepsilon_l + d\varepsilon_b + d\varepsilon_h \approx 0$$

由

$$\frac{l_1}{l_0} = \frac{l_0 + \Delta l}{l_0}$$

可以推出真实应变与相对伸长应变存在如下变换关系：

$$\in = \ln(1 + \varepsilon) \tag{1.8}$$

$$\varepsilon = e^{\epsilon} - 1 \tag{1.9}$$

（三）应力、应变关系

前面已介绍了条件应力、相对伸长应变的关系曲线。为了满足应用中准确与方便的要求，还可以建立其他形式的应力、应变关系，常用的有：真实应力、真实应变关系，真实应力、相对伸长应变关系，等等。一般情况下，这些关系的建立都是通过条件应力、相对伸长应变关系得出来的，所需要的只是要进行一些必要的换算。取条件应力、相对伸长应变曲线上一点，记为 Q，Q 点的条件应力是 $(\sigma_0)_q$，相对伸长应变等于 ε_q。可由下面的公式进行转换：

$$\sigma_q = (\sigma_0)_q(1 + \varepsilon_q) \tag{1.10}$$

$$\in_q = \ln(1 + \varepsilon_q) \tag{1.11}$$

式中　σ_q——对应 Q 点的真实应力；

ϵ_q——对应 Q 点的真实应变。

曲线的具体转换过程如下。

1. 弹性变形阶段

在这一变形阶段内，由于应变值相对较小，截面收缩不大。所以在弹性变形阶段真实应力、真实应变值与对应条件应力、相对伸长应变值之间相差也不大。因此，这一段曲线可以直接套用，不必变换。

2. 均匀塑性变形阶段

在这一变形阶段内，变形沿试样轴向的塑性变形是均匀分布的，所以，可以根据需要选用式 1.10、式 1.11 进行变换。

3. 集中塑性变形阶段

在条件应力、相对伸长应变曲线的 b 点之后，塑性变形集中在颈缩区内发生。由于颈缩区几何形状因素影响，内部也不再是单向拉伸的应力状态。所以，从条件应力到真实应力的换算就不能再使用式 1.10。具体的换算可参阅有关书籍。

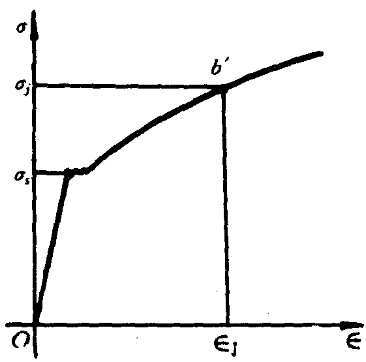


图 1-2 简单拉伸真实应力、应变关系曲线

绘制完成的 σ—ϵ 曲线见图 1-2。

图中给出的两条曲线使用了真实应力，所以也就消除了塑性变形阶段试样截面积变小的影响。也就是说，图 1-1 图 1-2 所表达的应力、应变关系单纯地反映了材料变形硬化的影响。所以，上面的曲线通常称为硬化曲线。图中的 b' 点对应的是塑性集中变形的始发点，也就是图 1-1 的 b 点。

§1-2 真实应力、应变关系曲线的简化

以实验为依据得来的真实应力、应变曲线经简化后更加实用。主要的简化方法有两种：一是对材料进行理想化处理，一是使用经验公式进行近似。

一、理想材料的应力、应变曲线

对材料的理想化处理后所得到的应力、应变关系还可以找到与之相对应的动力学模型。

1. 理想全弹性材料

理想全弹性材料的 σ—ϵ 曲线及其动力学模型见图 1-3（a）与图 1-3（b）。

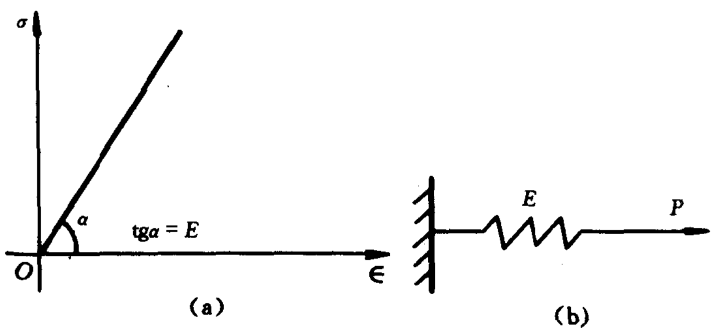
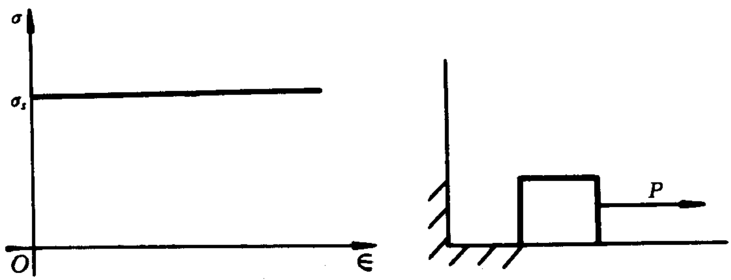


图 1-3

（a）理想全弹性材料的应力、应变关系曲线；（b）理想全弹性材料的应力、应变关系动力学模型

2. 理想刚塑性材料

理想刚塑性材料的 σ—ϵ 曲线及其动力学模型见图 1-4（a）与图 1-4（b）。



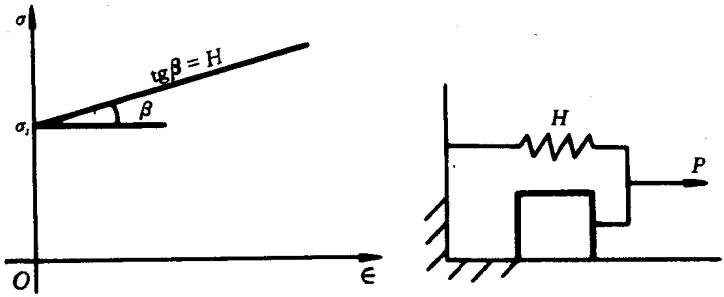
(a)　　　　　　　　(b)

图 1-4*a*

（a）理想刚塑性材料的应力、应变关系曲线；（b）理想刚塑性材料的应力、应变关系动力学模型

3. 理想刚塑性硬化材料

理想刚塑性硬化材料的 σ—$\in$ 曲线及其动力学模型见图 1-5（a）与图 1-5（b）。



(a)　　　　　　　　(b)

图 1-5

（a）理想刚塑性硬化材料的应力、应变关系曲线；（b）理想刚塑性硬化材料的应力、应变关系动力学模型

4. 理想弹塑性材料

理想弹塑性材料的 σ—$\in$ 曲线及其动力学模型见图 1-6（a）与

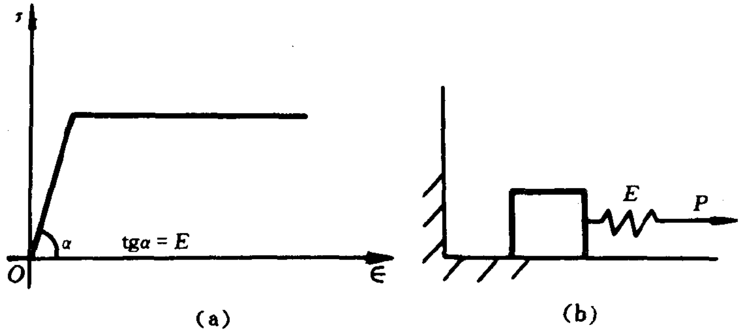


图 1-6

(a) 理想弹塑性材料的应力、应变关系曲线；(b) 理想弹塑性材料的应力、应变关系动力学模型

图 1-6（b）。

5. 理想弹塑性硬化材料

理想弹塑性硬化材料的 σ—ϵ 曲线及其动力学模型见图 1-7

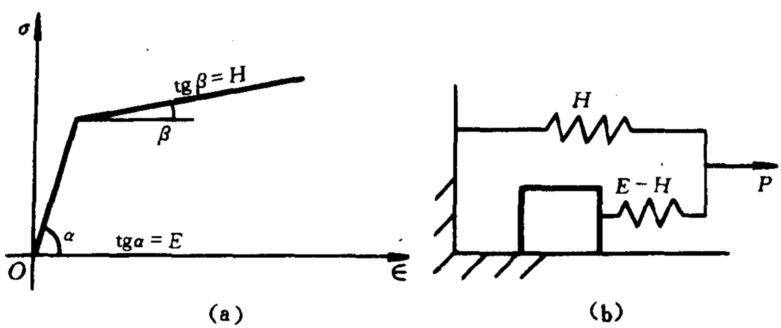


图 1-7

(a) 理想弹塑性硬化材料的应力、应变关系曲线；(b) 理想弹塑性硬化材料的应力、应变关系动力学模型

(a）与图 1-7（b）。

需要特别指出的是，经受了塑性变形的材料在载荷卸去之后，总要留下不可恢复的永久变形。上面介绍的 σ—$\in$ 关系的动力学模型不能真实地反映卸载情况下的这一变形特征。

二、应力、应变关系曲线的经验公式的近似表达

近似表达应力、应变关系曲线的经验公式有如下几种。

1. 路德维克表达式

路德维克表达式的形式为：

$$\sigma = Y + H \in^{n} \tag{1.12}$$

式中，Y、H、n 对给定材料来说是常数，$0 \leqslant n \leqslant 1$ 。

下面分别讨论这几个常数的情况。

（1）$Y \neq 0$ 时，对 n 的取值的讨论。n 称为硬化指数。当 $n=1$ 时，上式变成 $\sigma = Y + H \in$ 的形式。这时，它所代表的是如图 1-5 所示的理想刚塑性硬化材料。

$0 < n < 1$ 是式 1.12 的最一般的表达形式，材料的 σ—ε 曲线形状如图 1-8 所示，图中 Y 所代表的正是材料的屈服应力。

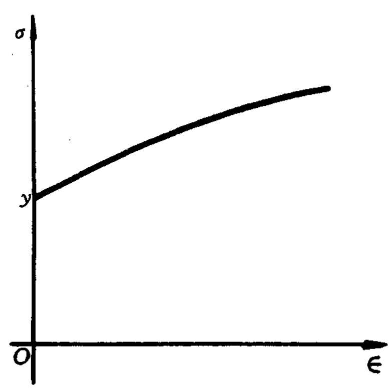


图 1-8　路德维克公式所表达的材料的应力、应变关系

（2）$Y=0$ 时，对 n 的取值的讨论。$Y=0$ 时，式 1.12 变为如下形式：

$$\sigma = H \in^{n} \tag{1.13}$$

图 1-9 给出了 n 分别等于 0、0.5、1.0 情况下的 σ—$\in$ 关系曲线。注意，对式 1.9 作导数运算得

$$\frac{d\sigma}{d\in} = Hn \in^{n-1}$$

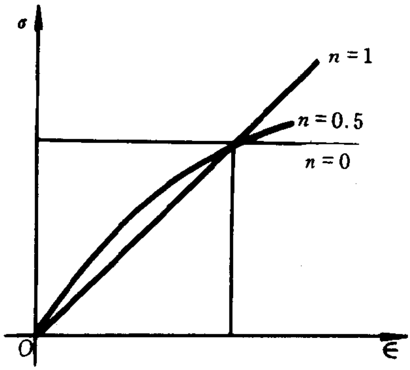


图 1-9　$Y=0$ 时，n 取不同值的路德维克公式所表达的材料的应力、应变关系

这表明，当 $\varepsilon=0$ 时，上式的值是不确定的。所以，路德维克经验公式不适合小应变情况的应用。

2. 斯维夫特经验公式

这一经验公式的简化形式是：

$$\sigma = c(a + \in)^n \quad (0 \leqslant n \leqslant 1) \qquad (1.14)$$

式中，c、a、n 对于给定的材料来说是常数。

在大应变的情况下，斯维夫特经验公式比路德维克公式更实用。

三、其它简化表示方法

线段组合的简化方法也常用来表达 σ—$\in$ 关系曲线。图 1-10 的两条直线是由下面两个式子表达的：

$$\sigma = E\in \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant Y) \qquad (1.15)$$

$$\sigma = P\in \quad (\sigma > Y)$$

式中　E——弹性模量；

P——可以认为是塑性模量；

Y——其物理意义是代表材料的屈服应力。

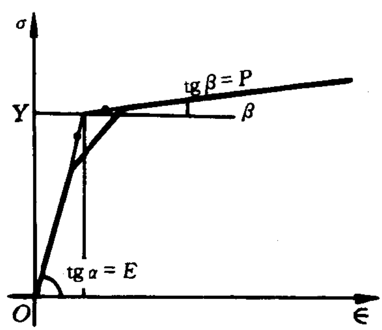


图 1-10　线段组合方法所代表的材料的应力、应变关系