

弹性动力学及其数值方法

马宏伟 吴斌 编著

中国建材工业出版社

弹性动力学及其数值方法

马宏伟 吴 斌 编著

中国建材工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

弹性动力学及其数值方法/马宏伟, 吴斌编著. -北京: 中国建材工业出版社, 2000. 4

ISBN 7-80090-982-4

I. 弹… II. ①马… ②吴… III. 弹性动力学-数值计算-计算方法 IV. 0347

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 19510 号

弹性动力学及其数值方法

马宏伟 吴斌 编著

*

中国建材工业出版社出版

(北京海淀区三里河路 11 号 邮编 100831)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京密云红光印刷厂印刷

*

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 12.75 字数: 323 千字

2000 年 5 月第一版 2000 年 5 月第一次印刷

印数: 1—2000 册 定价: 26.90 元

ISBN 7-80090-982-4/N·3

前 言

弹性动力学是固体力学的一个重要分支。它是研究弹性体在动荷载作用下的变形和运动规律的学科。弹性动力学所涉及的问题十分广泛，在工程技术的许多领域诸如航空航天、国防工业、地质勘探、材料科学、损伤检测等方面都有着重要的应用。

近 30 年来，国内外在弹性动力学方面的专著很多，也各有特色。在我们从事弹性动力学研究和教学的过程中，感觉到对于一般工程技术人员、本科生、研究生学习来讲，需要一本能在较短的时间内学习并接受弹性动力学研究和解决问题的基本方法和思路，并能对弹性动力学问题的数值解法有基本了解的读本。基于以上考虑，编写了本书。原则是简要、明了、实用，既要反映弹性动力学主要内容，又要将烦琐、复杂的内容写得容易理解，并加入了关于弹性动力学中实用的数值计算方法——有限单元法，可以为读者解决实际问题提供相应计算手段和方法。

在各章节的安排上，全书共分七章，前六章主要介绍弹性动力学问题的几个主要内容和研究方法，第七章专门介绍弹性动力学中实用的数值计算方法，即弹性动力学有限元法。

第一章是弹性动力学问题的概述，主要介绍动力学问题的特征、波动与振动的联系与区别、推导建立了波动方程，并简要介绍了弹性动力学的发展概况。

第二章以一维弹性波的传播为例，介绍弹性波传播问题的一些基本概念和处理问题的一些基本方法，为以后解决二维和三维问题打下一定的基础。

第三章对弹性动力学的基本理论进行了介绍，首先对弹性力学的基本理论进行简要回顾，然后针对动力学问题建立基本方程，并对弹性动力学的几个基本定理做了介绍。最后以位移解法为主要解法，将平面波、球对称波和轴对称波的特点进行了研究，并引入波动方程的积分表示。

第四章研究波在不同性质的介质交界面处的传播及变化规律。以二维波动问题为例，研究了几种典型的平面简谐波即 P 波、SV 波和 SH 波在弹性半空间中，或介质的弹性性质沿一平面发生间断的空间中的反射和折射问题。然后研究沿弹性介质的自由表面或沿由两种不同的弹性介质的交界面附近传播的面波。介绍了三种主要的面波，即 Rayleigh 面波、Stoneley 面波和 Love 波。对地震波的传播特征也进行简要的介绍。

第五章对波在无限板及无限圆柱杆中传播涉及的几何弥散效应的一般特征以及处理这类问题的基本方法进行讨论，给出杆、板的近似理论。

第六章着重介绍了在实际工程中有重要应用的杆中弹性波传播的初等理论。并以此为基础介绍了材料动态本构关系测定的 Hopkinson 杆技术。

第七章给出了弹性动力学问题的有限元法。除了介绍一般方法以外，着重讨论了有限元法解波的传播问题的应用。

附录部分给出了书中所用到的张量分析的主要内容和弹性动力学主要方程在不同坐标系下的表达式。

本书的总体布局及第二、三、四、七章由马宏伟完成，第一、五、六章及附录部分由吴

斌完成。在本书的构思、材料准备及写作过程中，自始至终得到了太原理工大学杨桂通教授、张善元教授的鼓励、关心和指导，他们在百忙之中对本书的总体布局和具体章节的写法都提出了许多中肯的建议。在此作者向他们表示衷心的感谢！同时我们向在本书写作过程中为我们提供大力支持和帮助的太原理工大学应用力学研究所和北京工业大学的同事、朋友们表示衷心的感谢！感谢孙晋兰、王根伟帮助作者打印了部分手稿！感谢霍英东教育基金会青年教师研究基金和北京市科技新星计划及北京市自然科学基金对本书出版的资助。

我们衷心希望本书能成为本科生、研究生和工程技术人员学习弹性动力学的一本简要明了、概念清晰、有效实用的读本。由于作者水平所限，书中的不妥与错谬之处，敬请读者批评指正。

作 者
2000年3月

目 录

第一章 弹性动力学概述	(1)
§ 1.1 动力学问题的特征	(1)
§ 1.2 波动解与振动解	(2)
§ 1.3 波动及其分类	(4)
1.3.1 行波及波动方程	(5)
1.3.2 理想弦线中的波	(6)
§ 1.4 弹性动力学的发展	(9)
第二章 一维弹性波的传播	(12)
§ 2.1 无界域中齐次波动方程的初值问题——D'Alembert 解	(12)
2.1.1 一维波动方程的求解——D'Alembert 公式	(12)
2.1.2 D'Alembert 解的物理意义	(13)
§ 2.2 半无界域中波的传播——特征线法	(17)
2.2.1 半无界域中波的传播定解问题的提法	(17)
2.2.2 特征线及扰动沿特征线传播的特点	(17)
2.2.3 特征线法解半无限长弦中的波动问题	(20)
§ 2.3 有界域中的波动问题——波动解和振动解	(21)
2.3.1 有界弦的波动解	(21)
2.3.2 有界弦的振动解	(24)
2.3.3 波动解和振动解的关系	(27)
§ 2.4 一维弹性波的反射与透射	(28)
§ 2.5 波的弥散	(31)
2.5.1 弥散的概念	(31)
2.5.2 弹性基础上的弦 (Klein-Gordon 方程)	(32)
2.5.3 波群和群速度	(33)
§ 2.6 能量的传播	(35)
第三章 弹性动力学的基本理论	(37)
§ 3.1 弹性力学简要回顾	(37)
§ 3.2 弹性动力学问题的提法	(40)
3.2.1 运动方程的导出	(40)
3.2.2 弹性动力学问题的提法	(41)
§ 3.3 弹性动力学问题解的惟一性定理	(42)
§ 3.4 弹性动力学的 Hamilton 变分原理	(43)
§ 3.5 弹性动力学的互易定理	(45)
§ 3.6 用位移和位移势表示的运动方程	(48)

3.6.1	用位移表示的运动方程	(48)
3.6.2	矢量场的 Helmholtz 分解	(48)
3.6.3	波动方程的 Lamè 分解	(49)
§ 3.7	平面波	(51)
3.7.1	一维平面波	(51)
3.7.2	三维平面波	(53)
§ 3.8	球面波和柱面波	(54)
§ 3.9	波动方程的分离变量解	(56)
§ 3.10	波动方程解的积分表示	(58)
3.10.1	Dirac 广义函数	(59)
3.10.2	波动方程解的积分表示	(60)
第四章	弹性半空间中的平面谐波	(65)
§ 4.1	概述	(65)
§ 4.2	P 波在弹性半空间表面的反射	(66)
§ 4.3	SV 波在弹性半空间表面的反射	(70)
§ 4.4	Rayleigh 面波	(74)
§ 4.5	SH 波在弹性半空间的反射	(77)
§ 4.6	P 波和 SV 波在交界面处的反射和折射	(79)
§ 4.7	Stoneley 波	(83)
§ 4.8	SH 波在交界面处的反射和折射	(84)
§ 4.9	Love 波	(86)
第五章	弹性波在杆、板中的传播	(90)
§ 5.1	概述	(90)
§ 5.2	无限平板中平面应变波	(90)
§ 5.3	无限平板中的 SH 波	(97)
§ 5.4	无限长圆柱体中的波	(98)
5.4.1	基本方程	(99)
5.4.2	时间谐和波	(99)
5.4.3	扭转波	(101)
5.4.4	纵向波——波赫汉默 (Pochhammer) 频率方程	(102)
5.4.5	弯曲波	(103)
§ 5.5	杆纵向运动的近似理论	(104)
5.5.1	考虑侧向惯性影响的 Love 理论	(104)
5.5.2	扭转运动	(107)
5.5.3	弯曲运动—贝努里-欧拉 (Bernoulli-Euler) 模型	(108)
5.5.4	弯曲运动—铁木辛柯 (Timoshenko) 梁模型	(109)
§ 5.6	板中弹性波的近似理论	(112)
5.6.1	无限平板中的纵波	(112)
5.6.2	薄板弯曲运动的 Lagrange-Germain 理论	(113)
5.6.3	薄板弯曲运动的 Mindlin 理论	(116)

5.6.4	薄板纵向运动的 Poisson 理论	(119)
第六章	细杆及薄板的初等理论	(120)
§ 6.1	杆中纵波的支配方程	(120)
§ 6.2	初值-边界问题	(122)
§ 6.3	在杆性质突变处的反射与透射	(126)
§ 6.4	打桩过程中的应力波	(128)
§ 6.5	层裂与痂片	(131)
§ 6.6	两杆共轴撞击及弹性波的相互作用	(133)
§ 6.7	刚体质量对杆的撞击	(137)
§ 6.8	有限长杆的纵向振动	(138)
§ 6.9	横向惯性效应	(141)
§ 6.10	Hopkinson-Korsky 杆实验技术	(144)
§ 6.11	有限长梁的振动	(147)
第七章	弹性动力学有限元法	(153)
§ 7.1	概述	(153)
§ 7.2	单元运动方程的建立	(154)
7.2.1	单元运动方程的建立	(154)
7.2.2	协调质量矩阵和集中质量矩阵	(156)
§ 7.3	总体运动方程的集合	(158)
§ 7.4	本征值问题 振型正交特性	(159)
§ 7.5	阻尼矩阵	(163)
§ 7.6	振型迭加法求动力响应	(164)
§ 7.7	直接积分法	(166)
7.7.1	中心差分法	(167)
7.7.2	Wilson- θ 法	(169)
7.7.3	Newmark 方法	(174)
§ 7.8	有限元法解波的传播问题	(176)
附录 I	张量分析梗概	(182)
附录 II	不同坐标系中方程汇总	(189)
参考文献	(193)

第一章 弹性动力学概述

§ 1.1 动力学问题的特征

运动是物质存在的形式，是物质的固有属性。机械运动是物质运动的最简单的形式，它是指物体的空间位置或物体的一部分相对于其它部分来说空间位置随时间变化的过程。而弹性动力学则是研究弹性物体在外界扰动（或称激励）下机械运动规律的学科。弹性动力学属于经典力学的范畴，它是研究运动速度远低于光速的宏观物体的运动，所以牛顿定律是建立弹性动力学支配方程的基础。

其它物体对于所考虑物体的作用称之为荷载。一个弹性物体在外部荷载作用下将会改变其原有的形状和原来的运动状态，同时物体内各部分之间的相互作用力也随之发生变化。这些变化统称为弹性物体对于外部作用的响应。根据引起物体响应的不同，可将荷载分为静力荷载和动力荷载。所谓静力荷载是指加载过程是如此地缓慢，以致物体由此而产生的加速度很小，从而惯性效应可以略去不计，因而在此加载过程中可以认为物体的各部分随时都处于静力平衡状态。与此相反，若在加载过程中能使物体产生显著的加速度，且由加速度所引起的惯性力对物体的变形和运动有着明显地影响，这类荷载称为动力荷载。图 1.1 给出了几种典型的动力荷载随时间变化的规律。

同静力荷载情况相比，弹性物体对动力荷载的响应在性质上存在着很大的差异。在静力问题中，对于给定的荷载，响应具有单一的解答。也就是说求解静态的响应只需考虑加载前的参考状态和加载后的变形状态之间的差异。这是由于略去了惯性效应，使得物体当局部受到扰动后，整个物体所有各部分的响应立即完成，而不需要任何时间过程。然而在动力问题中，局部的扰动并不能立即引起离扰动源较远部分的响应，而且物体中每一点处的响应也将随时间而变化，所以必须建立相应于我们感兴趣的某一时间过程上的一系列的解答。显然动力分析要比静力分析困难得多。另外，我们以后将会看到，动力响应不仅与扰动源的性质有关，如荷载的强度，频谱成分，持续时间等，而且还与组成物体的介质本身的固有动力学特征密切相关。另外物体的几何特征，边界条件等对动力响应也有直接的影响。

对于弹性物体来说，动力学特征主要是指介质的弹性性质和惯性性质，这两种性质能够

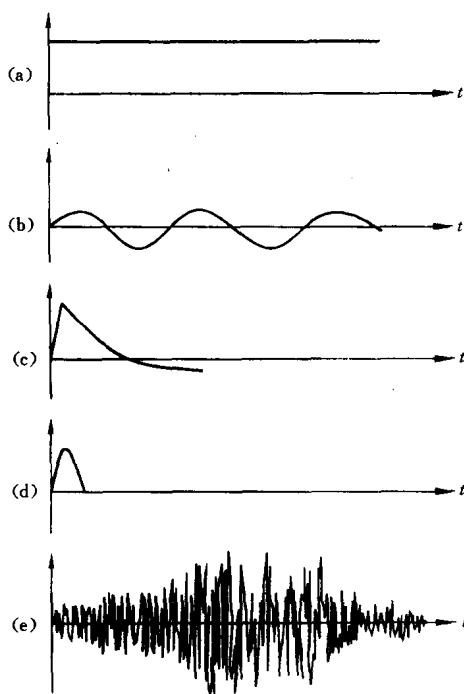


图 1.1

(a) 突加荷载；(b) 简谐荷载；(c) 冲击波荷载；
(d) 撞击荷载；(e) 地震荷载

使得系统的能量得以保持和传递，构成了波动和振动的机制。如果介质不能变形，则在局部激励作用下介质的任何一部分将立即受到内力或加速度形式的扰动。同样，如果一种假想的介质没有惯性，就没有不同质点位移的滞后，从质点到质点的扰动传递，在瞬间便达到最远处的质点。在后面我们将可以看到，机械扰动传播的速度总是表示为定义变形抗力的参数与定义介质惯性的参数之比的平方根的形式。当然，一切实际材料都是可变形的，并且具有质量，因而一切实际材料都能传递机械波。

动力效应的重要与否取决于两个特征时间：表征外部扰动作用的时间及扰动在物体中传播的特征时间的相对大小。

如果表征外部扰动作用的时间同扰动在物体中传播的特征时间是同一数量级的，则动力效应是重要的。如果外部扰动作用的时间远远大于扰动在物体中传播的特征时间，那末从本质上说，问题是准静态的而不是动态的，此时惯性作用可以忽略。对于持续的外部扰动，如果外部作用的扰动随时间迅速变化，即频率较高时，则也需考虑动力效应。

弹性动力学是在经典的弹性力学基础上发展起来的，属于连续介质力学的一个组成部分，即认为物体是运动着的质点（或粒子）的连续集合，所以连续性假设仍然是弹性动力学的分析基础。连续介质力学的质量守恒，线动量守恒，角动量守恒以及能量守恒等基本定律正是我们导出弹性动力学基本方程的出发点。由此建立的方程一般来说是非线性的，为了减少数学上的困难，使讨论变得方便些，本书将着重讨论线弹性材料和无限小应变的情况。基于以上几个方面的假定，使得基本方程线性化，从而可以利用迭加原理，大大简化了分析方法。

弹性动力学的主要任务就是从连续介质最基本的定律出发，建立描述物体运动的支配方程，并由此求解物体的动力响应。显然在弹性动力学问题中，各类场量（位移场、应力场、速度场等）不仅是空间位置的函数，而且是时间的函数。如位移场量可用 $u(x, y, z, t) = u(x, t)$ 来描述，像这样的一些函数，常称为波函数。可见求解动力响应是处理可变场的问题，通常归结为双曲型或双曲-扩散型方程的初值或初值-边值问题。处理这类问题需要较多的数学工具，如矢量分析与场论，数学物理方法，解析函数理论以及张量分析等。以后，我们将根据需要某些内容作适当的介绍。

§1.2 波动解与振动解

弹性动力学主要目标是在给定扰动源信息及边界条件、初始条件下求解弹性物体的动力响应。解答的形式有两种：一种是波动解，一种是振动解。前者描述行波在弹性介质中的传播过程，后者描述弹性体的振动。为了说明两者的联系与差异，首先考察波动与振动两个物理现象。

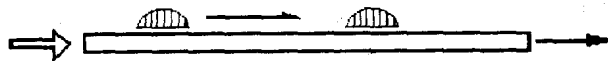


图 1.2

一个原来处于静止状态的物体，当其局部受到突然的扰动，并不能立即引起物体各部分的运动。如图 1.2 所示的一根半无限长杆端部受到打击时，远离杆端的区域并不能立即感受到端部的打击信号，而要经过一定的时间后才能接受到这个信号。这是动力问题和静力问题最根本的区别。实际上由于连续介质中的各个质点由某种约束力而彼此联系起来，在未受到扰动之前，质点之间的相互作用力处于平衡状态。当某一个质点受到扰动以后，它就要偏离

原来的平衡位置而进入运动状态。由于质点间相对位置的变化,使得受扰动质点同其周围质点之间增加了附加的弹性力,从而与受扰动质点相邻的质点也必然受到影响而进入运动状态。这种作用依次传递下去,便形成一个由扰动源开始的波动现象。这种扰动借质点间的弹性力而逐渐传播的过程,称为弹性波。如果介质是无限大的,扰动将会随时间的发展一直传播出去。然而一个实际的物体总是有边界的,当扰动到达边界时,将要和边界发生相互作用而产生反射。对一个有界的物体,由于扰动在其边界上来回反射,从而使得整个物体就会呈现出在其平衡位置附近的一种周期性的振荡现象,称之为弹性体的振动。弹性波和弹性体的振动之间存在着本质的内在联系。这两种现象的形成有着相同的机制,它们都是由介质的弹性和惯性两个基本性质所决定的。弹性性质有使发生了位移的质点回复到原来平衡位置的作用,而运动质点的惯性有使当前的运动状态持续下去的作用,或者说弹性是贮存势能的要素,惯性是维持动能的表征。正是由于这两种特性的存在,系统的能量才能得以保持和传递,外部的扰动才能激发起弹性波和弹性体的振动。弹性波的传播和弹性体的振动,实际上可以看作是同一物理问题的不同表现形式。扰动一开始总是以行波的方式将能量传播出去,而当物体有边界时,由于行波的来回反射,最终使物体趋于定常的运动状态,则表现为振动现象。弹性体的振动是波动过程的一种特殊表现形式,并不意味着波动过程已经消失,而是一种在有界物体中长时间范围内的波动过程。在实际的弹性动力学问题中,有时需要考察波动过程,有时则对振动现象更感兴趣。对应于这两种情况,在数学上对动力响应的解答常分别采用波动解和振动解。波动解具有行波的形式,如在一维情况下其波函数形如 $F(x \pm ct)$,这种解能给波动过程以直观形象的描述,在每一时刻可以清晰地看到扰动传播的形状和所到达的位置。在振动解中,波函数被表达为 $\Phi(x)q(t)$ 的分离变量的形式。由数理方程理论可知,振动解一般为一无穷级数 $\sum_n \Phi_n(x) q_n(t)$,级数中的每一项代表了一个在空间具有固定模式并按一定频率振动的驻波。可以看出,振动解是用无穷多个驻波的迭加描述了行波的传播,而驻波是由相同频率的时间简谐行波的迭加而得到。这两种解答可以由 Fourier 级数(或积分)联系起来,这正反映了波动与振动之间的本质联系。这两种解答也各有自己的特点,在波动解中,空间坐标为 x_1 和 x_2 的两点存在着相位差 $|x_2 - x_1|/c$,此处 c 是波传播的速度。而在振动解中,则是把整个物体看作是一个大的振子,各点作同步的运动,而不存在相位上的差别,各点振动的幅值在空间依函数 $\Phi(x)$ 确定的模式分布。

对某个特定的动力响应过程,解的形式选择,要视实际问题的需要来确定。这既取决于扰动源的性质,又取决于所考虑物体的相对尺寸,同时还与研究者所关心的问题等诸因素有关。一般说来,当荷载作用时间极为短促或变化极为迅速的情况下,如经受撞击、爆炸等荷载作用时,了解物体的瞬态变形和应力变化的规律是重要的,这时宜采用波动解。如用振动解,则由于其频带较宽,尽管级数中取很多项,往往也难给出满意的解答。又当物体尺寸很大时,弹性波通过物体所需的时间就显得非常重要而必须加以考虑,在此情况下局部的扰动主要激发起波动过程,而整个物体的振动则是比较微弱的,显然采用波动解是合适的。如研究地震作用下地球内部的应力场的变化就属于此列。当然若考察地震作用激发的地球本身的自由振荡则应另当别论。在一般的机械振动和工程结构的动力响应问题中,由于所研究对象的几何尺寸相对来说比较小,则可不考虑波动过程,而直接作为振动问题来分析更为简单可行。然而如果我们的兴趣在于了解在动力荷载作用下物体的拐角或介质内部的孔洞,裂缝等部位的局部信息时,则应作为波动问题处理,通过分析波通过障碍物时的绕射或散射过程

将能给出这些细部的应力和变形的变化以详尽地描述。一般地讲，波动解能从数学上给出动力学过程以完美的解答，但相对于振动解来说，其求解过程往往比较繁难。

§ 1.3 波动及其分类

波动是一个极其广泛而有趣的研究课题，几乎所有学科和工程技术领域都包含着波动现象。如声波、水波、电磁波、固体中的波，量子力学中的几率波等都从不同的物理系统来研究波动问题。又如化学反应、生命过程、人口迁移以及交通流等过程中也都涉及到波动现象。尽管这些系统或过程彼此相互独立，所考察的现象和所关心的结果毫不相干，但却表现出许多极为相似的规律。可见这些不同的时间过程都受着某种共同的运动法则的制约，因而，跟踪这些时间过程的发展方程及其求解技术也必然有着一定的联系。

在所有这些不同类型的波中，人们对于机械波（包括液体中的压力波，气体中的声波和固体中的应力波）和电磁波（包括光波和无线电波）的认识和利用最早最多，这两类波有着相当多的共同特性，这就是：

1. 波在运行中遇到不同介质时，在交界面要发生反射和折射（或透射），可以全反射，也可以全透射。

2. 波在运行中可以实施聚焦和发散，可以变向运行。

3. 波具有线性特性，可以互相迭加。因此，一个很复杂的波可以看成是许多简单波的合成。可借助于富氏级数把一个复杂波分解成许多简谐波，而简谐波正是波动中最基本最简单的波形。

4. 波在遇到障碍时产生衍射，同频率的波相遇时产生相干作用。

5. 在不同的介质中波的运行速度不同，即波的速度与介质性质有关。例如，在空气中以近于光速运行的无线电波，在玻璃中的速度就要减慢。

6. 波动过程也遵守能量守恒。在不考虑介质中热损失的情况下，机械波辐射的能量总是以介质分子的势能和动能交替地进行变换，其总和始终保持常量。电磁波中也有相似的情况。

由于波动被包含在如此广泛的自然现象之中，所以它一直在强烈地吸引着各个方面研究者的兴趣，并把许多研究领域微妙地联系起来。波动问题十分惹人注目，因此研究波动现象的数学概念和技巧取得了极为丰富的研究成果和进展，目前已形成一套相当完善的理论和方法。近年来，由于非线性效应日益被人们所关注，给波动理论的研究开辟了更为广阔的前景。

波动现象早已为人们所熟悉，抛开具体物理过程，下述直观简明的定义似乎可以概括波动现象的主要特征而具有较大的覆盖性：波是一个以可以鉴别的速度，由介质的一部分向另外一部分传递的可以鉴别的信号。这个信号可以理解为某种性质的扰动，它可以是某个量的极大值或突变，只要可以清楚地识别出来，并在任何时刻可以确定它的位置，而且容许在传播过程中改变其强度、形状和传播速度。简单地说，波动就是扰动在介质中的传播。扰动总是具有某种能量，因此，波的基本特征之一是能量在介质中的传递。显而易见，一个均匀场，尽管是可变的，是不会有波动现象存在的。另外，一个信号的传递若没有可以识别的速度也不称其为波动过程。

一个波动总是受到扰动源的激发而产生并通过介质而传递的，所以它既携带着扰动源的信息，又包含着介质本身的特征。如果我们的兴趣在于了解介质本身的一般的波动性质，这类问题常属于波的传播问题；如果我们关心的是某一特定扰动的传播规律，则属于波的激发问题。这两类问题的研究是相辅相成的，而且往往是耦合在一起的。

1.3.1 行波及波动方程

数学上最简单的波的传播是扰动沿一个方向，以固定的速度 c 并保持扰动原来的形状的传播过程。我们来看沿笛卡尔直角坐标系的 x 轴正方向传播的一个扰动（图 1.3）。如果与这

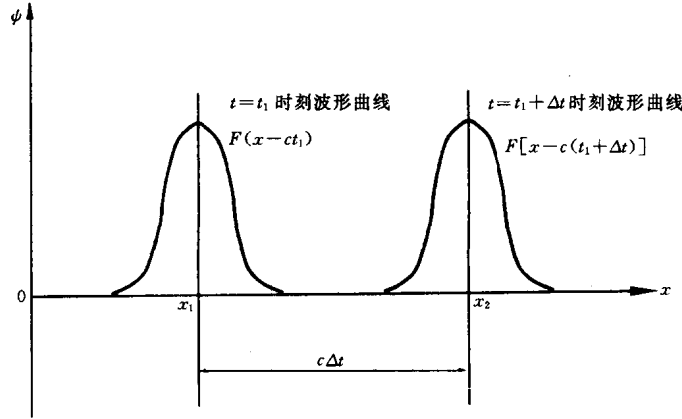


图 1.3

个扰动相关的某种特性（如波形）用 $\psi(x, t)$ 来表示，在 $t=0$ 时刻该扰动的波形只是该时刻的一个空间分布，用函数 $F(x)$ 来表示。由于该扰动沿 x 正方向以固定的速度 c 并保持扰动原来的形状向前传播，所以对于 $t>0$ ，扰动的传播可以表示为 $\psi(x, t) = F(\xi)$ ，此处 $\xi = x - ct$ 。可以想象，对于一个沿 x 正方向以固定的速度 c 与扰动同时向前行进的观察者来说，其观察到的扰动波形 $\psi(x, t)$ 是不变的。按照这种规律随时间在空间变化的量 $\psi(x, t)$ 代表了一个沿 x 轴的正方向行进的波（简称行波）。这里 $\psi(x, t)$ 称为波函数，宗量 $\xi = x - ct$ 称为波函数 ψ 的相（位）。如果相位保持常数，即 $\xi = C$ ，那末就有 $\frac{d\xi}{dt} = 0$ ，即 $\frac{dx}{dt} = c$ ，可见 c 是恒定相位沿 x 轴的正方向传播的速度，所以称为相速度。在现在的例子中，由于相位 ξ 为常数时，扰动 ψ 就保持为常数，所以 c 也就是扰动传播的速度，即波速。下面我们来看一下 $F(\xi) = F(x - ct)$ 的物理意义。首先，对于某一特定时刻 t_1 ， $F(x - ct_1)$ 仅是 x 的函数，它表示 t_1 时刻扰动 ψ 沿 x 轴的分布。经过一个时间增量 Δt 以后，函数的宗量变成了 $x - c(t_1 + \Delta t)$ ，显然这时 x 点处的函数值随着时间的变化而发生了改变。然而如果将空间坐标 x 也增加一个 $c\Delta t$ ，于是函数的宗量为 $(x + c\Delta t) - c(t_1 + \Delta t) = x - ct_1$ ，和 t_1 时刻函数的宗量一样，即空间点 $x + c\Delta t$ 在 $t_1 + \Delta t$ 时刻的相位与空间点 x 在 t_1 时刻的相位相同。于是 t_1 时刻扰动的分布经过一个时间增量 Δt 以后沿 x 轴正方向平移了一个距离 $c\Delta t$ 。由此可见， $F(x - ct)$ 代表了沿 x 轴正向以速度 c 传播的行波。 x_2 处所经历的扰动将完全重复 x_1 处所经历的扰动过程，只是在时间上推迟了 $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{c}$ 。

类似地，对于沿 x 负方向保持形状不变以速度 c 传播的扰动，若 $t=0$ 时的扰动空间分布为 $\psi = G(x)$ ，则 $t>0$ 以后的扰动可以表示为 $\psi(x, t) = G(\eta)$ ，其中 $\eta = x + ct$ 。

对于上述沿 x 轴正向行进的波 $\psi(x, t) = F(x - ct)$ ，由于 $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -cF'$ ， $\frac{\partial \psi}{\partial x} = F'$ ，可见波函数满足微分方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1.3.1)$$

同理沿 x 负方向行进的波，其波函数满足微分方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1.3.2)$$

(1.3.1) 和 (1.3.2) 是两个一阶的波动方程，它们是描述波动现象的最简单的数学模型。显然沿 x 轴正向和负向行进的波，应同时满足二阶微分方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.3.3)$$

式 (1.3.3) 常称为一维波动方程，以后将看到它的解是两个反向行波的迭加，具有以下形式

$$\psi(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (1.3.4)$$

推广式 (1.3.3) 可以得到三维的波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (1.3.5)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ，方程 (1.3.5) 有如下形式的解

$$\psi(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z \pm ct) \quad (1.3.6)$$

此处 f 是任意函数， α, β, γ 是常数，且满足 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ 。解 (1.3.6) 代表了三维介质中沿某一方向传播的平面波，即在特定时刻垂直于波传播方向的同一平面上各点感受到的扰动均相同。以后将会看到除平面波形式的解外，方程 (1.3.5) 还有其它形式的解。

方程 (1.3.3) 和 (1.3.5) 在经典波动理论中起着相当重要的作用，它们能给出许多物理现象很好的近似描述。在弹性动力学问题中，经线性化后的波动方程基本上都可化为这两个方程。

1.3.2 理想弦线中的波

作为如何建立波动方程的例子，我们讨论在理想弦线中传播的波。一条绷紧的弦线所构成的最简单的动力学系统，可以给出波动和振动问题基本而清晰的物理图象。由于在理想弦中排除了几何上的复杂性，从而可以使我们避开烦杂的数学运算而把注意力集中到问题的物理本质上。有趣的是通过这个简单系统的分析所获得的许多重要信息都包含在更为复杂的系统中，这里所提供的处理问题的数学技巧对于讨论复杂系统和后面讨论复杂的弹性动力学问题同样具有一定的普遍意义。

理想弦线是指一根均匀、柔软、富有弹性的纤线，它在很强的张力下绷得很紧，当受到外界的扰动后就开始运动起来。以下的讨论中对弦的运动作了两点限制：

(1) 弦上各点的运动均发生在同一平面内，且与 x 轴垂直；

(2) 运动是微小的，即 $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$ 。

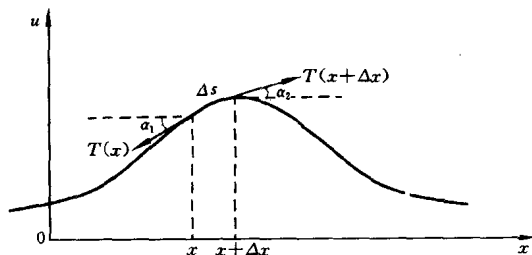


图 1.4

如图 1.4 所示，在平衡位置具有横坐标为 x 的点，在 t 时刻的位移为 u ，显然 u 是 x 和 t 的函数，即 $u = u(x, t)$ 。考虑弦上的微元段 Δx ，其运动以后变为 Δs ， $T(x)$ 是弦中 x 处的张力。由于运动是微小的，可以得到以下的几何关系

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2} dx \approx \Delta x$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2}} \approx 1 \quad \sin \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} \right]^2}} \approx 1 \quad \sin \alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}$$

考虑在 x 方向微元段的平衡, 则有

$$T(x + \Delta x) \cos \alpha_2 - T(x) \cos \alpha_1 = 0$$

由于 $\cos \alpha_2 \approx \cos \alpha_1 \approx 1$, 从而有

$$T(x + \Delta x) \approx T(x) \approx T_0$$

其中 T_0 是弦中的初始张力。

微元段 Δx 在 u 方向受的合力为

$$T(x + \Delta x) \sin \alpha_2 - T(x) \sin \alpha_1 = T_0 \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]$$

考虑微元段 Δx 在 u 方向的动量守恒, 有

$$T_0 \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \rho \Delta x$$

其中 \bar{x} 是 $[x, x + \Delta x]$ 中间的某一个值, 对上式左端应用中值定理可得

$$T_0 \frac{\partial^2 u(x + \theta \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x = \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \rho \Delta x \quad (0 < \theta < 1)$$

上式中消去 Δx , 并令 $\Delta x \rightarrow 0$, 则有 $x + \theta \Delta x \rightarrow x$, $\bar{x} \rightarrow x$, 最后得

$$T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

或

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3.7)$$

此处 $c = \sqrt{T_0/\rho}$ 是弦中的波速。式 (1.3.7) 正是前面给出的一维波动方程 (1.3.3)。如果弦上作用有分布的横向外力 $F(x, t)$, 则不难得出弦的强迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1.3.8)$$

其中 $f(x, t) = F(x, t)/\rho$ 。

以上我们仅讨论了运动波和弦线中波的控制微分方程的建立, 它们都是从某些守恒律得到的。仅有支配问题的微分方程还不足以完全确定系统的运动状态, 还需要知道 $t=0$ 初始时刻的运动状态, 才能够确定 $t>0$ 以后各时刻的运动状态。初始运动状态的数学表述叫做初始条件。如在理想弦的波动方程 (1.3.7) 中, 含有时间 t 的两阶导数, 必须提供两个初始条件, 即初始时刻的位移分布和速度分布, 它们都是空间变量 x 的函数。

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \phi_1(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \phi_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.9)$$

对于无限长的弦，仅有初始条件就够了；对于有限长的弦，只要扰动尚未到达弦的端点，仍可以作为无限长弦处理。

在有限长的弦中，为了考察扰动到达端点以后的运动情况，尚需给出弦的端点应满足的条件，称为边界条件。对于端点为 $x=0$ 和 $x=l$ 的弦，其边界条件一般是时间 t 的函数

$$\left. \begin{aligned} u(0,t) &= x_1(t) \\ u(l,t) &= x_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.10)$$

特别地，当弦的两端固定时，有

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad (1.3.11)$$

初始条件和边界条件统称为定解条件。对于特定的波动过程，定解条件的重要性并不低于支配问题的微分方程。我们的兴趣常常不在于寻找微分方程的通解，而更关心的是求适合定解条件的特解。实际上除个别简单的情形外，求其通解是困难的，甚至是不可能的。一般地说，偏微分方程问题的求解和定解，往往一开始就紧紧地耦合在一起。

为了以后讨论方便，有必要对波动进行分类。基于不同的考虑则有不同的分类方式。如可根据所描述的物理现象对波进行分类，也可根据支配方程的性质进行分类。下面根据方程解的特点进行分类，尽管不是十分严格的但是是非常有用的。为简明起见，我们只考虑一维线性波，然而，由此对波所作的分类，可以推广到更为一般的波动问题中去。

考虑初值问题，若 $t=0$ 时施加于系统的扰动为 $\psi=F(x)$ ，可以将这一扰动展成简谐函数的迭加

$$F(x) = \sum A(k) \exp(ikx) \quad (1.3.12)$$

如果 $t>0$ ，有

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \sum A(k) \exp\{ik[x - c(k)t]\} \\ &= \sum A(k) \exp\{i[kx - \omega(k)t]\} \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

其中
$$c(k) = \frac{\omega(k)}{k} \quad (1.3.14)$$

根据波动的意义， $\psi(x,t)$ 代表了一个波动。此处 k 称为简谐波的圆波数； $c(k)$ 和 $\omega(k)$ 分别为波数为 k 的简谐波的相速度和圆频率。一般情况下它们可能是复数，我们称 $\omega=\omega(k)$ 为系统的弥散关系。随弥散关系的不同，波动将呈现出不同的特征。现根据 $\omega=\omega(k)$ 的性质对系统或波动进行如下分类：

(1) 如果 $\omega(k)$ 是实函数，且正比于 k ，则相速度 c 与波数 k 无关。这个系统是简单的，此时波动在传播过程中速度不变，形状不变，故称这样的波动为简单波或者是非弥散非耗散波。

(2) 如果 $\omega(k)$ 是关于 k 的非线性实函数，即 $\omega''(k) \neq 0$ ，我们说系统是弥散的。在此情况下不同波数的简谐波具有不同的传播速度，于是初始扰动的波形随着时间的发展将发生波形歪曲，这样的波称为弥散波。根据引起弥散的原因不同，可分为物理弥散和几何弥散。前者是由于介质的特性所引起，弥散的关系可由问题的支配方程来导出；后者是由于几何效应所引起，其弥散关系往往由边界条件来确定。在本书以后所讨论的弹性动力问题中，通常认为介质为非弥散的。几何弥散效应是由于把几何上某些特征尺寸引入到问题中来所导致的。

(3) 如果 $\omega(k)$ 是复函数，则波的相速度由 $\omega(k)/k$ 的实部给出。如果令复函数 $\omega(k) = a(k) + ib(k)$ ，则解 (1.3.13) 可写成

$$\psi(x,t) = \sum A(k) \exp[b(k)t] \exp\{i[kx - a(k)t]\}$$

基于物理上的要求 $b(k)$ 应为负的。上式给出的波既有弥散又有耗散效应，称为耗散波。如粘

弹性波就是一种耗散波。

如果 $\omega(k)$ 是纯虚函数，则不能给出波动现象，这时实际上是描述了一个扩散过程。

对一个系统或过程要判别其是否为弥散的，只需假定问题有形如 $A \exp [i(kx - \omega t)]$ 的基本解，将其代入问题的支配方程（有时需要满足边界条件）就可以得到 ω 和 k 的关系 $\omega = \omega(k)$ 。如将基本解代入 (1.3.3) 可以得到 $\omega = \pm ck$ ，可见 (1.3.3) 所描述的系统是简单系统。又如对于梁的运动方程

$$\phi_{tt} + \gamma^2 \phi_{xxxx} = 0$$

可得其弥散关系为 $\omega = \pm \gamma k^2$ ，故知梁中的弯曲波是弥散的。

§ 1.4 弹性动力学的发展

波动和振动现象的研究可以追溯到几百年以前，早期的研究常常关心的是音乐的音调或者是水波等类问题，而且多半是凭借于感性观察而未能进入定量的分析。19世纪初，关于光的波动性质被揭示后，有力地推动了弹性波传播理论的研究。由于地球物理学和地震学的需要，19世纪到20世纪初许多数学力学家致力于弹性固体中波动的研究。从数学上严格地建立弹性动力学的基本理论是从19世纪20年代开始的。1821年 Navier 首先导出了弹性体平衡和振动的一般方程。1822年 Cauchy 对包括动力学方程在内的经典弹性理论作了许多奠基性的贡献，从而为弹性动力学的发展奠定了基础。此后，弹性固体中波的传播成为一个广泛研究的课题，强烈地吸引着广大研究者的兴趣。在1829年 Poisson S. D 首先指出了位移波动方程的解由两部分组成，一部分是一个标量势函数的梯度，另一部分代表了一个旋转场。这就揭示了在弹性介质内部扰动的传播由两类基本的位移波所组成，就是我们现在熟知的膨胀波和等容积波。在此基础上，Lamè 于1852年明确地提出了标量势和矢量势的概念，他给出一般的弹性动力位移场可表示为一个标量势函数的梯度与一个矢量势函数的旋度之和，且这两个势函数满足两个非耦合的波动方程，分别具有膨胀波和等容积波的传播速度。位移场这种分解的引入，对于位移波动方程的解提供了极为有用的知识。在这个时期，弹性波传播的研究取得了许多重大进展。如 Cauchy (1830) 研究了晶体介质中平面波的传播，得到了波前传播的速度方程。一般情况下有三个波速值，在各向同性的情况下，有两个是重合的，它们与平面横波相对应。接着 Poisson 等 (1831) 处理了初值问题，Stokes (1849) 研究了由于体积力引起的波动问题，并对于突加点荷载导出了基本奇异解，后来 Love 对 Stokes 解进行了某些推广。Christoffel (1877) 讨论了间断面传播的有关问题。Kirchhoff (1882) 得到了由非齐次波动方程支配的势的积分表达式。这时对于各向同性的、均匀的、无限弹性介质中波的研究已相当完善。

1887年 Rayleigh 有个重大发现，这就是众所周知的 Rayleigh 面波，这种波的产生源于在弹性半空间表面入射的一对平面谐和波：膨胀波和等容积波。Rayleigh 表面波沿着平行于表面的方向并以略小于等容积波的波速传播，且随着远离表面的方向指数衰减。它在研究具有自由表面的弹性半空间的波动问题中起着极为重要的作用。Lamb (1904) 研究了表面源和埋入源产生的扰动传播问题，他指出对于面源的反应是由膨胀波前和跟在后面的等容积波与 Rayleigh 面波所组成，并指出随着距扰动源距离的增加，Rayleigh 面波将不断增加它的优势。Lamb 的讨论在地震学中有着重要的价值。

Knott 在1899年首先研究了波在两个弹性半空间交接面处的反射和折射问题，后来还有许多人进行了这方面的研究工作。在均匀介质内部，由扰动激发起的膨胀波和等容积波以不