工科研究生用书

罗家洪 编

矩阵分析引论

华南理工大学出版社

·工科研究生用书·

矩阵分析引论

罗家洪　编

华南理工大学出版社

内 容 简 介

本书是工科硕士研究生教材，全书共分六章：线性空间与线性变换、内积空间、矩阵的标准形与若干分解形式、矩阵函数及其应用、特征值的估计与广义逆矩阵、非负矩阵。书中着重介绍工科专业应用较多的矩阵分析基本理论和方法，注重理论和应用的结合，具有工科教材的特点。

本书也可供工科学生、教师及工程技术人员阅读、参考。

〔粤〕新登字12号

工科研究生用书
矩阵分析引论
罗家洪 编
责任编辑 杨昭茂
*
华南理工大学出版社出版发行
（广州·五山·邮码 510641）
广东省新华书店经销
华盛电脑服务部电脑排版
广州红旗印刷厂印刷
*
开本 850×1168 1/32 印张 7.75 字数 201 千
1992 年 7 月第 1 版 1993 年 4 月第 2 次印刷
印数 1001—2500
ISBN 7－5623—0345—2/O·33
定价：4.65 元

出版说明

研究生教材建设是研究生教育的基础工程，是提高研究生教学质量的重要环节。自1978年恢复招收研究生以来，我校先后编写了多种供研究生使用的教材和教学参考书，有的已正式出版，但更多的是采用讲义形式逐年印发。为满足研究生教育事业发展的需要，我校决定出版"工科研究生用书"系列教材。

"工科研究生用书"以公共课和部分学术专著为主，专业学位课程将根据学科设置和国内相同学科的需求情况有计划地分批出版。我们希望，本系列教材能从研究生的教学需要出发，根据各门课程在教学过程中的地位和作用，既包含本门课程的基本内容，又反映我校工科研究生的特点，并在该学科领域内求新、求深、求精，使学生掌握必须的基础理论和专门知识。学位课教材还应包含学科前沿和交叉学科的丰富内容，反映国内外最新研究成果，学术思想活跃，适应目前科学技术发展的形势。学术专著要充分反映作者的研究成果和学术水平，阐述自己的学术见解，对实现研究生的培养目标，提高教育质量起重大作用。

"工科研究生用书"的内容结构和阐述方法，力求条理清楚，论证严谨，具有科学性、系统性和先进性。

由于我校研究生教材建设起步较晚，限于我们的水平和经验，本系列教材难免有错误和不足之处，恳请读者指正，我们将非常感谢。

华南理工大学研究生处

1992年3月

前 言

本书是为我校工科硕士研究生《矩阵分析》课程编写的教材。编者从工作中体会到:一本教材如果不考虑教学对象的实际情况,不考虑客观需要与可能,那在教学过程中它就难于起到应有的作用。本课程属于基础理论课,它的应用(包括在其他数学分支中的应用)十分广泛,因此不可能讲得很具体,历来被认为抽象、难学。为减少学生学习过程中的困难,使他们学得更好一些,在编写过程中,编者作了以下的尝试:

第一,虽然我们基本假定读者学习过大学本科生工程数学中《线性代数》这一课程,但为了新旧内容有较好的衔接,我们把《线性代数》中线性空间、线性变换及矩阵的相似对角形等少量主要概念,分别在第一、第三章里作了扼要的复述,特别是第一章。这样做,对学习本书的其他材料也许是有帮助的。

第二,从目录中可以看到,本书在材料的安排和处理上都作了较大的变革,这主要是:第三章以矩阵的标准形为核心,同时讨论了在其他书中往往分散在若干章里的课题;在第四、第五章中亦有类似的情形。这样做的目的,是希望使本书的叙述更简炼些,主要内容更突出些。

第三,矩阵的约当标准形与多项式矩阵向来是教学的难点。本书在讲述一般的多项式矩阵理论之前,就以数字矩阵 A 的特征矩阵的行列式因子来定义特征矩阵的不变因式及初级因子,从而定义了矩阵 A 的相应概念,并给出了矩阵 A 的约当标准形的概念及作法,然后再来叙述多项式矩阵的理论。这一做法,编者在 1965 年讲授依·盖尔冯德的《线性代数学》时,就曾经用过,当然该书的叙述,要比这里讲的更完整些。这样做可以使数字矩阵的标

准形问题叙述得更加紧凑，学生也较易理解。

第四，本书删繁就简，减少了一些证明，但是却较多地注意了矩阵分析在线性控制系统等方面的应用。这或许是它的一个与大多数数学教材显著不同之点。

以上说明了编写本书时的主要考虑，也说明了本书的主要特点。编者认为，这里选择的材料对工科研究生的学习与应用是比较合适的，而本书只是这些广泛题材的一个导引，叙述简明，便于自学。当读者发觉有些问题还需进一步去拓宽和深入了解时，可查阅参考书目中的有关著作。

本书初稿承蒙王进儒教授的认真审阅，并提出了不少宝贵的意见，编者对此表示衷心的感谢。编者还要感谢江奇嵩副教授，因为他对本书的编写也提出过许多有益的建议。

由于编写时间紧迫，更限于编者水平，可能有不少谬误和不当之处，敬请批评、指正。

编　者

1991. 12. 30

目　录

第一章　线性空间与线性变换 …………………………………… (1)

§1　线性空间的概念 …………………………………… (1)

§2　基变换与坐标变换 …………………………………… (6)

§3　子空间与维数定理 …………………………………… (8)

§4　线性空间的同构 …………………………………… (15)

§5　线性变换的概念 …………………………………… (19)

§6　线性变换的矩阵表示 …………………………………… (24)

§7　不变子空间 …………………………………… (29)

习题一 …………………………………… (31)

第二章　内积空间 …………………………………… (35)

§1　内积空间的概念 …………………………………… (35)

§2　正交基及子空间的正交关系 …………………………………… (39)

§3　内积空间的同构 …………………………………… (45)

§4　正交变换 …………………………………… (46)

§5　点到子空间的距离与最小二乘法 …………………………………… (50)

§6　复内积空间（酉空间） …………………………………… (53)

§7　正规矩阵 …………………………………… (57)

§8　厄米特二次型 …………………………………… (64)

§9　力学系统的小振动 …………………………………… (70)

习题二 …………………………………… (72)

第三章　矩阵的标准形与若干分解形式 …………………………………… (75)

§1　矩阵的相似对角形 …………………………………… (75)

§2　矩阵的约当标准形 …………………………………… (83)

§3　哈密顿-开莱定理及矩阵的最小多项式 …………………………………… (93)

§4　多项式矩阵与史密斯标准形 …………………………………… (98)

§5　多项式矩阵的互质性与既约性 …………………………………… (110)

§6　有理分式矩阵的标准形及其仿分式分解 …………………… (119)
§7　系统的传递函数矩阵 …………………………………………… (125)
§8　舒尔定理及矩阵的 QR 分解 ………………………………… (129)
§9　矩阵的奇异值分解 ……………………………………………… (133)
习题三 ………………………………………………………………… (135)
第四章　矩阵函数及其应用 ………………………………………… (138)
§1　向量范数 ………………………………………………………… (138)
§2　矩阵范数 ………………………………………………………… (144)
§3　向量和矩阵的极限 ……………………………………………… (148)
§4　矩阵幂级数 ……………………………………………………… (156)
§5　矩阵函数 ………………………………………………………… (163)
§6　矩阵的微分与积分 ……………………………………………… (179)
§7　常用矩阵函数的性质 …………………………………………… (181)
§8　矩阵函数在微分方程组中的应用 ……………………………… (186)
§9　线性系统的能控性与能观测性 ………………………………… (191)
习题四 ………………………………………………………………… (196)
第五章　特征值的估计与广义逆矩阵 ……………………………… (199)
§1　特征值的界的估计 ……………………………………………… (200)
§2　圆盘定理 ………………………………………………………… (203)
§3　谱半径的估计 …………………………………………………… (206)
§4　广义逆矩阵与线性方程组的解 ………………………………… (208)
§5　广义逆矩阵 A^+ ……………………………………………… (213)
习题五 ………………………………………………………………… (216)
第六章　非负矩阵 …………………………………………………… (218)
§1　正矩阵 …………………………………………………………… (218)
§2　非负矩阵 ………………………………………………………… (223)
§3　随机矩阵 ………………………………………………………… (228)
§4　M－矩阵 ……………………………………………………… (231)
参考书目 ……………………………………………………………… (240)

第一章　线性空间与线性变换

本章扼要概述线性空间与线性变换的基本概念和基本理论．这些材料是学习矩阵分析及其应用的入门知识．对于线性代数基础较好的读者，有些部分粗看一下就可以了．

§1　线性空间的概念

人们谈论问题，往往都是就一定"范围"来说的，脱离了这个"范围"，就难以讲得清了，甚至只能在某个"范围"内才能提出或研究某种问题．明白了这一点，就较易理解我们引入数域及线性空间的目的了．

我们知道，由所有有理数组成的集合具有这样的性质：这集合中任意两数的和、差、积、商（除数不为零）仍是这集合中的数．这个集合我们用 Q 来表示．类似地，由所有实数构成的集合 R，以及由所有复数构成的集合 C 也都具有这一性质．这三个集合的包含关系为：

$$Q \subset R \subset C .$$

因此，我们说"一个复数"时，自然包括这个数可能是有理数或实数这两个特殊情况在内．

在引入线性空间这一重要概念之前，我们首先要给出数域的概念．

如果复数的一个非空集合 P 含有非零的数，且其中任意两数的和、差、积、商（除数不为零）仍属于该集合，则称数集 P 为一个

数域。于是上述的集合 Q,R,C 都是数域，分别称为有理数域、实数域及复数域. 又如集合

$$Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$$

也构成一数域，请读者加以验证. 但是由所有整数组成的集合 Z 是不构成数域的。

数域有一个简单性质，即所有的数域都包含有理数域作为它的一部分。特别，每个数域都包含整数 0 和 1。现在我们可以给出线性空间的定义了。

定义 1 设 V 是一非空集合，P 是一数域。如果：

1) 在集合 V 上定义了一个二元运算(通常称为加法)，即是说，V 中任意两个元素 x,y 经过这个运算后所得到的结果，仍是集合 V 中一个唯一确定的元素，这元素称为 x 与 y 的和，并记作 $x+y$；

2) 在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算，叫做数量乘法，即是说，对于 P 中任一数 λ 与 V 中任一元素 x，经这一运算后所得结果仍为 V 中一个唯一确定的元素，称为 λ 与 x 的数量乘积，记作 λx；

3) 上述两个运算满足下列八条规则：

(1) 对任意 $x,y\in V$, $x+y=y+x$；

(2) 对任意 $x,y,z\in V$, $(x+y)+z=x+(y+z)$；

(3) V 中存在一个零元素，记作 θ，对任一 $x\in V$，都有 $x+\theta=x$；

(4) 任一 $x\in V$，都有 $y\in V$，使得 $x+y=\theta$，元素 y 称为 x 的负元素，记作 $-x$；

(5) 对任一 $x\in V$，都有 $1x=x$；

$$\left.\begin{array}{l}(6)\ \lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x\\(7)\ (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x\\(8)\ \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y\end{array}\right\}\text{对任何 }\lambda,\mu\in P,\quad x,y\in V$$

则集合 V 称为数域 P 上的线性空间或向量空间。V 中的元素常称为向量。V 中的零元素称为零向量。当 P 是实数域时，V 叫实线性空间；当 P 是复数域时，V 叫复线性空间。数域 P 上的线性空间有时简称为线性空间。

由定义可以证明：

线性空间 V 中的零向量是唯一的；V 中每个元素 x 的负元素也是唯一的；并且有

$$0x=\theta,\quad \lambda\theta=\theta,\quad (-1)x=-x,$$

这里 $\lambda\in P,x\in V$，又 V 中元素的减法可以定义为（对任何 $x,y\in V$）：

$$x-y=x+(-y).$$

线性空间的例子：

例 1 若 P 是数域，V 是分量属于 P 的 n 元有序数组的集合

$$V=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\mid\forall\ \xi_i\in P\},$$

若对 V 中任二元素

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

及每个 $\lambda\in P$（记作 $\forall\ \lambda\in P$），定义加法及数量乘法为：

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n),$$
$$\lambda x=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\cdots,\lambda\xi_n),$$

则容易验证集合 V 构成数域 P 上的线性空间，这个线性空间记为 P^n。

例 2 所有元素属于数域 P 的 $m\times n$ 矩阵组成的集合，按通常定义的矩阵加法及数与矩阵的数量乘法，也构成数域 P 上的一个线性空间，并把它记为 $P^{m\times n}$。

例 3 若 n 为正整数，P 是数域，则系数属于 P 而未定元为 t 的所有次数小于 n 的多项式的集合，按通常多项式的加法及数与多项式的乘法，这个集合连同零多项式在内亦构成数域 P 上的线性空间。我们用 $P[t]_n$ 代表这个空间。若把“次数小于 n 的”这一限

制取消，则也得到一个线性空间，并记为 $P[t]$。

例 4 所有定义在区间 $[a,b]$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 上的实值连续函数构成的集合，按照函数的加法及数与函数的乘法，显然构成实数域上一个线性空间。

在讨论线性空间的问题中，下面几个基本概念是必须熟知的。

定义 2 设 V 是数域 P 上的线性空间，$x,y,\cdots,v$ 是 V 的一组向量，如果 P 中有一组不全为零的数 $\alpha,\beta,\cdots,\delta$，使得

$$\alpha x+\beta y+\cdots+\delta v=\theta, \tag{1}$$

则称向量 $x,y,\cdots,v$ 线性相关；若等式(1)仅当 $\alpha=\beta=\cdots=\delta=0$ 时才能成立，则称这组向量是线性无关的。

由这定义得知，如果向量 $x,y,\cdots,v$ 线性相关，则使得(1)式成立的数 $\alpha,\beta,\cdots,\delta$ 中至少有一个不等于零，比如 $\alpha\neq0$，则有

$$x=-\frac{\beta}{\alpha}y-\cdots-\frac{\delta}{\alpha}v,$$

这时我们说向量 x 是向量 $y,\cdots,v$ 的线性组合，或者说，向量 x 可由向量 $y,\cdots,v$ 线性表出(示)。

一般地说，一组向量(含有限个向量)线性相关时，则其中至少有一个向量可由组中其他向量线性表出；反过来，如果这组向量具有这一性质，则这组向量必定线性相关。但不难推知，线性无关的一组向量，其任一向量都不可能由组中其余向量线性表出。

定义 3 设 V 是数域 P 上的线性空间。如果 V 中有 n 个线性无关的向量，而无更多个数的线性无关向量，则称 V 是数域 P 上的 n 维线性空间。

若线性空间 V 内能求得任意个数的线性无关向量，则 V 便称为无限维线性空间。本书主要讨论有限维线性空间。

在 n 维线性空间中，其任意的 n 个线性无关向量都称为它的一组基。由线性空间维数定义可知，在有限维线性空间中，基是存在的，但不唯一，因为当维数是 n 时，空间里的任何 n 个线性无关

向量都可以作为它的一组基。然而，我们却有下述定理。

定理 1 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基.则 V 中任一向量 x 都可以表示为这组基的线性组合，且表示式是唯一的.

证明 因 V 中 $n+1$ 个向量 $x,e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性相关，故 P 中存在 $n+1$ 个不全为零的数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$，使得

$$a_0x + a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n = \theta. \tag{1}$$

在这里，数 a_0 是不可能等于零的，否则，由(1)式便推出 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性相关，这是不可能的。因此，我们有

$$x=-\frac{a_1}{a_0}e_1-\frac{a_2}{a_0}e_2-\cdots-\frac{a_n}{a_0}e_n,$$

不妨将其写为

$$x = \xi_1e_1 + \xi_2e_2 + \cdots + \xi_ne_n. \tag{2}$$

即 x 可以表示成 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的线性组合。如果 x 还有另一表示：

$$x = \eta_1e_1 + \eta_2e_2 + \cdots + \eta_ne_n, \tag{3}$$

则由(2)式减(3)式即得

$$(\xi_1-\eta_1)e_1 + (\xi_2-\eta_2)e_2 + \cdots + (\xi_n-\eta_n)e_n = \theta,$$

因基向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关，所以

$$\xi_1-\eta_1=0,\quad \xi_2-\eta_2=0,\cdots,\xi_n-\eta_n=0,$$

从而有 $\xi_i=\eta_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$，这证明了表示式的唯一性，定理证毕.

表示式(2)中的数 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 称为向量 x 在基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下的坐标。这定理说明，取定一组基后，每个向量 x 在这组基下的坐标是唯一确定的。x 的第 i 个坐标 $\xi_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 也称为 x 的第 i 个分量.

我们再来看看前述几个例子中线性空间 P^n, $P^{m\times n}$ 及 $P[t]_n$ 的维数.

首先，容易证明

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots,$$
$$e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$$

是线性空间 P^n 的 n 个线性无关向量，又显然 P^n 中任一向量

$$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$$

都可由这 n 个线性无关向量线性表出：

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n,$$

因此，$x, e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性相关。从而得知 P^n 是 n 维线性空间。今后用得较多的是 R^n 及 C^n。

再考察线性空间 $P^{m\times n}$.若用 E_{ij} 表示第 i 行、第 j 列上的元素等于 1 而其他元素均等于零的 $m\times n$ 矩阵，则下列的 mn 个矩阵

$$E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{ij}, \cdots, E_{mn}$$

$(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 构成 $P^{m\times n}$ 的一组基，故 $P^{m\times n}$ 是 mn 维线性空间。今后用得较多的是 $R^{m\times n}$ 及 $C^{m\times n}$，包括它们当 $m=n$ 时的特殊情况。

最后，由于 $1, t, t^2, \cdots, t^{n-1}$ 是 $P[t]_n$ 的一组基，故 $P[t]_n$ 是 n 维线性空间。

§2　基变换与坐标变换

设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，又 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 及 $e_1', e_n', \cdots, e_n'$ 是 V 的两组基。假设这两组基的关系为

$$\begin{cases} e_1' = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ e_2' = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n' = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n, \end{cases} \tag{1}$$

这组关系式可缩写为

$$\left.\begin{aligned} e_i' &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k \\ i &= 1,2,\cdots,n \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

现设 x 为 V 中任一向量，且在此二组基下其表示式为：

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \tag{2}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' e_i'. \tag{3}$$

下面我们要研究向量 x 在基变换下，其坐标的变化规律．与变换(1)相对应，我们把矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为从基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 到基 $e_1',e_2',\cdots,e_n'$ 的过渡矩阵。由于基向量线性无关，并利用齐次线性方程组只有零解的条件，便可证明矩阵 A 是可逆的。由(3)式及(1′)式可得

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i' e_i' \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i' \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, e_k\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \xi_i'\Big) e_k, \end{aligned} \tag{4}$$

由(2)式又有

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k. \tag{5}$$

由于 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关，所以(4)、(5)两式右边 e_k 的系数

应相等：

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\xi_i', \qquad k = 1,2,\cdots,n .$$

写成矩阵形式就是

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{bmatrix}$$

亦即

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{bmatrix} \tag{6}$$

从而又有

$$\begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

(6)、(7)两式给出了在基变换(1)下，向量 x 的坐标变换公式。

§3 子空间与维数定理

线性空间有些性质需用子空间的性质来表达，所以研究线性空间的子空间是必要的。

定义 1 设 V 是数域 P 上的线性空间，W 是 V 的一个非空子集。如果 W 对于线性空间 V 所定义的加法运算及数量乘法运算，也构成数域 P 上的线性空间，则称 W 为 V 的线性子空间，简称子

空间。

从线性空间的定义很容易找到上述非空子集为 V 的子空间的充要条件。这就是下述定理。

定理 1 设 W 是数域 P 上线性空间 V 的非空子集，则 W 是 V 的线性子空间的充要条件是：

(1) 若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W$，则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W$；

(2) 若 $\boldsymbol{x}\in W,\lambda\in P$，则 $\lambda\boldsymbol{x}\in W$

换言之，线性空间 V 的非空子集 W 是子空间的充要条件，是 W 关于 V 中定义的两个运算是"封闭"的。

证明 条件的必要性是显然的，因为当 W 为 V 的子空间时，由定义 1 即知条件(1)与(2)自然是满足的。反过来，若定理 1 的两个条件已满足，则可推出零向量 $\boldsymbol{\theta}\in W$(取 $\lambda=0$ 并利用条件(2))；又当 $\boldsymbol{x}\in W$ 时，取 $\lambda=-1$ 便可从条件(2)推出 $-\boldsymbol{x}\in W$。至于线性空间定义中的其他运算"规则"，由于对 V 中所有元素都成立，当然对子集 W 的元素也能成立。所以，定理中的条件也是充分的。证毕。

在线性空间 V 中，由单个的零向量组成的子集 $\{\boldsymbol{\theta}\}$ 是 V 的一个子空间，称为**零子空间**，而线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间。这两个子空间称为**平凡子空间**。零空间的维数定义为零。

例 1 在 n 维线性空间 P^n 中，子集

$$W=\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{x}\in P^n\}$$

构成 P^n 的一个 $n-r$ 维子空间，r 是 $A\in P^{m\times n}$ 的秩。

例 2 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 是数域 P 上线性空间 V 的 m 个向量。则这组向量的所有形如

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{x}_m\quad(\lambda_i\in P)$$

的线性组合构成的集合非空，且对 V 中的加法及数量乘法皆封闭，故形成 V 的一个子空间，称为由这组向量生成的子空间，并记为 $L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$。