

高等学校教学用书



数学物理方法

В. И. 列文 著

高等教育出版社



51.6323
1200
6

高等学校教学用书



数学物理方法

В. И. 列文 著

程惟松 楊思詡 史希福 譯

本书系根据俄罗斯苏维埃联邦教育部教科书出版社 (Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР) 出版的列文 (В. И. Левин) 著“数学物理方法” (Методы математической физики) 1956 年版译出。原书经俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育部审定为师范学院数学物理系教学参考书。

本书内容包括场的数学理论, 数学物理微分方程 (波动方程, 热传导方程, 拉普拉斯方程, 薛定谔方程), 概率论初步。本书的特点是讲解比较详细, 浅近易懂, 物理应用问题的例子很多, 对数学概念的物理意义也较强调, 故适合于师范学院物理专业之用, 有了数学分析基础知识的学生, 也能学习本书。

2198/30 05

数 学 物 理 方 法

В. И. 列文 著

程惟松 楊恩朗 史希福译

高等教育出版社出版 北京宣武门内大街27号

(北京市书刊出版业营业登记证出字第054号)

民族印刷厂印装 新华书店发行

统一书号 13010-707 开本 860×1103¹/₃₂ 印张 94¹/₁₆
字数 218,000 印数 0001—9,000 定价 (6) 1.00
1959年12月第1版 1959年12月北京第1次印刷

1020100

序 言

本书供师范学院数学物理系《物理》专业的学生之用。它包含了《数学物理方法》课程教学大纲（1955 出版）中所规定的內容，即：場的数学理論（即向量分析），数学物理微分方程，和作为附录的概率論初步。前两部分是本书的基本內容，它們之間有着緊密的联系。

叙述时假定学生已經学过教学大纲所规定的数学分析課程的內容。

当然，本书的名称就其內容而言是太大了。但是，取这个名字是为了強調本书的用途是作为教学計劃上《数学物理方法》課程的教材。

第九章《薛定諤方程以及某些与它有关的問題》中的材料不属于这門課程的教学大纲。其所以把它列入，是由于在这一章中所討論的問題是理論物理課程中某些部分所必須的数学工具。

在編写本书时，作者采納了莫斯科师范学院理論物理教研室的代表（E. M. 李甫希茲教授和 B. H. 洛基切夫副教授）的意見，还有 A. Г. 斯柯尔尼克副教授的意見，作者向他們謹表謝意。

В. И. 列文 (Левин)

1956 年 4 月

目 录

第一部分 場的数学理論

序	VI
第一章 数量場	1
§ 1.1. 基本概念	1
§ 1.2. 平行平面(二維)場和軸对称場	3
§ 1.3. 等值面与等值綫	4
§ 1.4. 方向导数	5
§ 1.5. 場的梯度	8
§ 1.6. ∇ 算子和梯度的运算	12
§ 1.7. 在柱面坐标系和球面坐标系中的梯度	14
习題	19
第二章 向量場	20
§ 2.1. 基本概念	20
§ 2.2. 平行平面場、二維場和其它类型的場	21
§ 2.3. 流体动力学的比拟	23
§ 2.4. 向量的流量	26
§ 2.5. 在一般情形下流量的表达式·曲面积分	28
§ 2.6. 場的散度·源和汇	35
§ 2.7. 在笛卡尔直角坐标系中散度的計算	37
§ 2.8. 在柱面坐标系和球面坐标系中散度的計算	39
§ 2.9. 散度的运算	46
§ 2.10. 場的环流和旋度·旋度在笛卡尔直角坐标系中的計算	48
§ 2.11. 在柱面坐标系和球面坐标系中旋度的計算	56
§ 2.12. 旋度的运算	59
§ 2.13. ∇ 运算	59
习題	63
第三章 积分定理	64
§ 3.1. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基定理及其某些应用	64
§ 3.2. 斯托克斯定理	71
§ 3.3. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基定理及斯托克斯定理的推广	75

习题	76
第四章 二阶微分运算及其应用	77
§ 4.1. 二阶微分运算	77
§ 4.2. 在柱面坐标系和球面坐标系中的拉普拉斯	81
§ 4.3. 向量场的分类	84
§ 4.4. 管式场和无涡旋场的性质	86
§ 4.5. 格林公式	89
习题	90

第二部分 数学物理微分方程

第五章 弦振动方程	91
§ 5.1. 方程的推导	91
§ 5.2. 无界弦振动(柯西问题)·达兰贝尔解	94
§ 5.3. 有界弦的自由振动·福里哀方法	101
§ 5.4. 有界弦的强迫振动	111
§ 5.5. 管中的气体振动	114
§ 5.6. 能量积分·混合问题解的唯一性	117
习题	122
第六章 膜振动方程	123
§ 6.1. 方程的推导	123
§ 6.2. 矩形膜振动	127
§ 6.3. 矩形膜上的节线	135
§ 6.4. 圆形膜和贝塞尔方程	138
§ 6.5. 贝塞尔函数(柱函数)	141
§ 6.6. 圆形膜振动	147
习题	154
第七章 热传导方程	155
§ 7.1. 方程的推导	155
§ 7.2. 一维热传导方程的柯西问题	157
§ 7.3. 福里哀积分	160
§ 7.4. 在无界杆中热的传播	164
§ 7.5. δ -函数·源函数	166
§ 7.6. 有界杆中热的传播	173
习题	184

第八章 拉普拉斯方程的边值问题	184
§ 8.1 问题的提出	184
§ 8.2 解边值问题的格林方法	186
§ 8.3 在球域和半空间上狄利赫里问题的解	190
§ 8.4 拉普拉斯方程在球面坐标系中的变量分离·勒让得多项式与勒让德伴随函数	198
§ 8.5 拉普拉斯球函数和球面函数	205
§ 8.6 按球函数展开来求球域的狄利赫里问题的解	208
§ 8.7 球的固有振动·阶数等于奇整数之一半的贝塞尔函数	211
习题	219
第九章 薛定谔方程和与它有关的某些问题	219
§ 9.1 薛定谔方程·在量子力学中的谱理论和契耳雪夫—爱尔米特多项式	219
§ 9.2 电子在库仑场内的运动·契耳雪夫—路盖尔多项式	225
习题	231
场的数学理论公式汇编	232
附录 概率论初步	240
§ 1. 概率的概念·统计研究方法	240
§ 2. 概率的加法与乘法	242
§ 3. 条件概率	244
§ 4. 重复试验·二项式分布	245
§ 5. 统计场和统计样本	248
§ 6. 随机变量·分布函数	248
§ 7. 数学期望·方差与均方根偏差	255
§ 8. 各种分布律的例子	265
§ 9. 拉普拉斯极限定理	274
§ 10. 大数定律·切贝雪夫定理	279
§ 11. 波阿松定理和“稀少”事件的分布·物理应用	281
函数 $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 的值的表	285

第一部分 場的数学理論

第一章 数量場

§ 1.1. 基本概念

如果空間(或者它的某一部分) V 的每一点 P 都对应着某个物理量所确定的值 u ,則称在空間 V 上确定了該物理量的場。如果 u 是数量,也就是說它的值在确定的单位系中是数,則这样的場就称为数量場。因为数值 u 一般來說是随点而变的,所以适宜于記作 $u(P)$ (我們常常用这种写法来代替 $f(P)$,拿表示因变量的字母来表示函数关系)。这里点 P 是自变量,因而就称因变量为点函数。

例1 u 可以用 $^{\circ}\text{C}$ 或 $^{\circ}\text{K}$ 来度量的温度,电荷密度,气压等等, u 也可以是位势,例如電場的位势(庫倫位势)或引力場的位势(牛頓位势)。質量为 m 的質点 M 所产生的牛頓位势为

$$u = \gamma \frac{m}{r_{MP}},$$

其中 γ 是常数(万有引力常数),其值取决于单位系的选择, r_{MP} 是从点 M 到点 P 的距离。

如果量 $u(P)$ 与時間 t 无关,則此数量場称为穩定場;如果点 P 所对应的量 u 随時間而变化,即 $u = u(P, t)$,則此数量場称为不穩定場。

例2 如果在导热的介質中放入一个赤热的物体,該物体便要逐漸冷却,于是介質中各点的温度就与時間有关,我們就有了不稳定的温度場。

在本章內我們不考慮場对時間可能的函数关系,也就是說我們所考慮的或者是穩定場,或者是不穩定場的某个确定瞬間(不穩

定场的「瞬时摄影」)。

記号 $u(P)$ (和点函数的定义一样) 不須要在空間引入任何坐标系。如果在空間引入了某个坐标系, 例如引入了笛卡尔直角坐标系 x, y, z , 則給定点 P 相当于給定它在該坐标系中的坐标 x, y, z , 这时場函数 $u(P)$ 就变成普通的三元函数 $u(x, y, z)$ 。在空間也可以引入别的坐标系, 例如柱面坐标系和球面坐标系。在柱面坐标系中(見图 1)場函数表示为

$$u = u(r, \varphi, z),$$

其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (r \geq 0), \quad \varphi = \text{Arctg} \frac{y}{x};$$

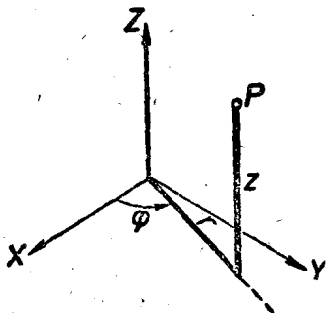


图 1

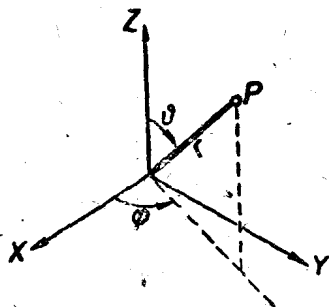


图 2

在球面坐标系中(見图 2)表示为

$$u = u(r, \vartheta, \varphi),$$

其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (r \geq 0),$$

$$\vartheta = \arccos \frac{z}{r} \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi),$$

$$\varphi = \text{Arctg} \frac{y}{x}.$$

例 3 在笛卡尔直角坐标系中质点 $M(a, b, c)$ 的牛頓位势具有

形式:

$$u = \gamma \frac{m}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

如果把球面坐标系的原点放在点 M 上, 則我們得到关于 u 的表达式 $u = \gamma \frac{m}{r}$ (因为 $r = r_{MP}$), 即 u 仅仅是一个球面坐标 r 的函数。

这样, 每个物理上的具体的数量場确定了某个点函数, 或某个三元函数 (自变量就是这点的三个坐标)。反之, 如果給定了任意函数 $u = u(x, y, z)$, 則可以把它看成是表示某个确定在其定义域上的数量場。因为变量 u 的物理意义沒有具体給出, 并且場的结构对数学研究來說是无关紧要的, 所以對於場的这样解釋是抽象的, 我們在場的数学理論中主要的就是研討这样的情形。然而正是由于場的数学理論的一般性, 其結果在理論物理中就有着重要的应用。

§ 1.2. 平行平面(二維)場和軸對稱場

有些数量場可能具有某些特殊性質, 因而使得研究起来可以簡化。

如果在空間能取到这样的笛卡尔直角坐标系, 使得場函数 u 仅与三个变量 x, y, z 中的两个有关, 例如 $u = u(x, y)$, 則此場称为平行平面場或二維場。

例 4 環繞着两端无限的均匀的热柱体 (例如一根赤热的直綫条) 形成一穩定的温度場, 这个温度場就是平行平面場, 因为在所有与柱体母綫垂直的平行平面上, 温度的分布情形是相同的。說得更确切些, 在任意一条与柱体母綫平行的直綫上, 各点的温度相同, 这也就是平行平面場名称的来源。在这个例子中可以选取与柱体母綫垂直的任何一个平面作为 x, y 平面。另一方面, 也可以单独考虑温度在薄平板上的分布, 而不去注意平板周圍介质中的

温度。于是，如取此平板为 x, y 平面，我们就得到仅在 x, y 平面（或其一部分）上研究的场，即 $u = u(x, y)$ ($z = 0$)。这就是二维场的例子（二维场有时也称为平面场）。从数学上讲，平行平面场与二维场不同之处在于前者 $u = u(x, y)$ 而 z 为任意，后者 $u = u(x, y)$ 而 $z = 0$ 。

现在研究数量场的另一特殊情形。如果在空间可以取到这样的柱面坐标系，使得场函数与变量 φ 无关，即仅仅是 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 z 的函数： $u = u(r, z)$ ，则此场称之为轴对称场。特别，如果在轴对称场中函数 u 还与 z 无关，即 $u = u(r)$ ， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，则此场称为柱面场。

如果场函数仅与一个球面坐标 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 有关，或者一般讲来仅与点 $P(x, y, z)$ 到定点 $M(a, b, c)$ 的距离有关，则此场称为球面场。

例 5 位于 z 轴上的质量线段，其牛顿位势与 φ 无关，确定了一个轴对称场。质量为 m 的质点 $M(a, b, c)$ ，其牛顿位势确定了一个球面场（见例 3）。位于坐标原点的点的对数位势

$$u = \frac{1}{2} \gamma \mu \ln \frac{1}{r},$$

确定了一个柱面场，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，而 μ 是所谓线密度（обложениеточки），即与 z 轴重合且在 x, y 平面上产生所研究的位势无限长的质线的单位长度的质量。

§ 1.3. 等值面与等值线

在任何一个坐标系中，用公式的形式来表示场函数可能还不够很直观地表明量 $u(P)$ 随点而变的变化过程。引入等值面可以很容易达到这目的，它被定义为使场函数 u 取得定值 c 的点的轨

迹。如果数量场函数等于 c ，我們得到等值面方程：

$$u(x, y, z) = c.$$

对于不同的常量 c 我們得到不同的等值面，其全体构成一个单参数族 (c 为参数)，它将数量场分成「层」。

在平行平面场中等值面是母线平行于 z 轴的柱面，在轴对称场中是环绕 z 轴的迴轉面。事实上，在笛卡尔直角坐标系中 $u(x, y) = c$ 是柱面方程，其母线与 z 轴平行，它在 x, y 平面上的准线方程为 $u(x, y) = c$ 。如果研究二维场，则这些准线，即曲线 $u(x, y) = c$ 称为等值线。在柱面坐标系中 $u(r, z) = c$ 是曲面方程，它与垂直于 z 轴的平面 $z = k$ 交成曲线 $u(r, k) = c$ ，即 $r = \text{常数}$ ，也就是中心在 z 轴上的圆周；这样的曲面是绕 z 轴的迴轉面，它在 x, z 平面上的截线方程为 $u(x, z) = c$ 。

容易看出，柱面场的等值面是圆柱面；球面场的等值面是球面。

例 6 位势 u 的等值面称为等位面。质点位势的等位面为同心球，均匀的质线段的位势的等位面为其焦点与该线段端点重合的共焦迴轉椭圆面 (这个结果在位势理论中予以证明)。在围绕无限热直线温度场中，等温面 (温度场中的等值面，或温度相等的曲面) 是以 z 轴为公共轴的圆柱面。

§ 1.4. 方向导数

点 P 在场中移动时，场函数 $u(P)$ 的变化率是研究数量场的重要元素 (在此假定场是稳定的)。考虑定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 及从点 P_0 出发的某一条射线 λ (见图 3)。这条射线的方向由它与 x, y, z 轴正方向的夹角 α, β, γ 来确定 (为了确定这些角，我们通过点 P_0 分别作平行于 x, y, z 轴且与它们同方向的射线 P_0x', P_0y', P_0z' ；此时 α 是射线 λ 与 P_0x' 之间的夹角，余类推)。现在假设点 P 从初始位

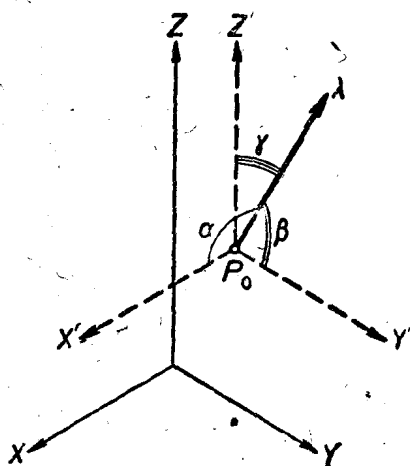


图 3

置 P_0 沿着射线 λ 等速度运动, 其速度为 1. 经过时间 t 之后 (即 t 个时间单位), 它从点 P_0 走过的距离为 t 个长度单位. 假设它在该时刻的位置是 P , 我们来计算点 P 的坐标: x, y, z . 向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 之长为 t , 而它在坐标轴上的投影等于 $t \cos \alpha$, $t \cos \beta$, $t \cos \gamma$, 所以

$$x = x_0 + t \cos \alpha,$$

$$y = y_0 + t \cos \beta,$$

$$z = z_0 + t \cos \gamma. \quad (1.4.1)$$

在此时间 t 之后, u 值的改变由初值 $u(P_0)$ 变到 $u(P)$, 即

$$u(P) - u(P_0) = u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - u(x_0, y_0, z_0).$$

u 在这段时间间隔内的平均变化率等于

$$\frac{u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{t},$$

而在时刻 $t=0$, 即在点 P_0 的瞬时变化率等于

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

显然, 这个极限值与点 P_0 的位置以及由角 α, β, γ 所确定的射线 λ 的方向有关, 下面我们就要讲它的计算. 这个极限值称为场函数 u 在点 P_0 沿 λ 方向的导数, 这是描述场在点 P_0 邻域中的性态的重要特征: 它表明当点 P 从点 P_0 出发沿着射线 λ 的方向移动时, 函数 $u(P)$ 是以什么样的速度开始变化的. 如果这个量是正的, 则函数 $u(P)$ 在 λ 方向 (从 P_0 点出发) 是增加的, 这个量愈大,

函数 $u(P)$ 增加得也愈快; 如果这个量是负的, 则在同样的条件下函数是减少的, 且这个量的绝对值愈大, 函数 $u(P)$ 减少得也愈快。

现在我们着手计算方向导数。为此我们引进一个其值等于 $u(P)$ 的单变量 t 的辅助函数 $F(t)$:

$$F(t) = u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma)$$

(因为我们所考虑的是定点 P_0 和定射线 λ , 故 $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$ 为常量)。显然, 此时 $F(0) = u(x_0, y_0, z_0)$, 而我们所要求的极限就可写成

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0).$$

为了计算 $F'(0)$, 我们应该首先计算 $F'(t)$, 然后再令 $t=0$ 。导数 $F'(t)$ 可以用数学分析中熟知的公式 (多元函数微分法) 来计算, 即: 如果 $u = u(x, y, z)$, 而 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, 则 u 是 t 的复合函数: $F(t) = u\{x(t), y(t), z(t)\}$, 它的导数是:

$$F'(t) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

在我们这里 [参看公式 (1.4.1)],

$$\frac{dx}{dt} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{dt} = \cos \gamma$$

所以

$$F'(t) = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

其中

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u'_y(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u'_z(x, y, z),$$

(等式右端的记号指出了函数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 等的自变量)。于是, 我们得到

$$F'(0) = u'_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + u'_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + u'_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma.$$

在点 P_0 偏导数的值记作

$$u'_x(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0, \quad u'_y(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0, \quad u'_z(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0,$$

并且认为 $t = \overrightarrow{P_0 P}$ (点 P_0 与 P 之间的距离), 就可以写出以下的命题:

场函数 $u(P)$ 在点 P_0 沿 λ 方向 (取极限的方向) 的导数

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{u(P) - u(P_0)}{\overrightarrow{P_0 P}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_0,$$

它等于

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \cos \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \cos \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \cos \gamma.$$

此处用 $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ 表示沿 λ 方向的导数。这种表示法是合适的, 因为从数学分析中知道偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ 是方向导数的特殊情形:

例如, 如果射线 λ 与 x 轴平行, 而且与它同一方向, 则 $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, 故 $\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0$, 余类推。在 $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ 等的括号下面的指标 0 表示它们是在点 P_0 的导数。如果沿 λ 方向计算在点 P 的导数, 我们省去括号和下标 0 可以写成:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \lambda} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = \\ &= u'_x(x, y, z) \cos \alpha + u'_y(x, y, z) \cos \beta + u'_z(x, y, z) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

§ 1.5. 场的梯度

方向导数的值与点 P 的位置以及射线的方向有关。在公式 (1.4.2) 中点 P 的坐标是偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ 的自变量, 而 λ 方向的方向余弦则是这些偏导数旁的乘数。从向量代数知道, 如果向量是用它在坐标向量 i, j, k (坐标轴方向的单位向量) 的分解式

給出的話:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

則它們的數量積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ —— 兩向量的數量積被定義為它們的長度

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

之積再乘以 $\cos \varphi$, 其中 φ 為它們之間的夾角 —— 就可以按下面的公式來計算:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

將此公式與公式 (1.4.2) 比較, 我們看到 $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ 是下面兩個向量的數量積:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \quad \text{和} \quad \mathbf{s}^0 = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = (\mathbf{N}, \mathbf{s}^0). \quad (1.5.1)$$

其中向量 $\mathbf{N}$ 僅由點 P 決定, 而與 λ 的方向無關, 向量 $\mathbf{s}^0$ 是射綫 λ 方向的單位向量:

$$|\mathbf{s}^0| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1$$

而與點 P 無關。

向量 $\mathbf{N}$ 稱為場在點 P 的梯度並記作:

$$\mathbf{N} = \text{grad} u(P) = \text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1.5.2)$$

如果在空間引入了笛卡爾直角坐標系, 同時場函數 $u(P)$ 表示成為點 P 的坐標的函數: $u = u(x, y, z)$, 則就可以按照這個公式來計算梯度。如果換以另外的笛卡爾直角坐標系 (原點不同, 坐標軸方向不同), 則坐標向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 的方向和偏導數 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 的值都改變了。然而梯度本身 (向量 $\mathbf{N}$) 却仍然不變。為了說明這一點, 我們給出所謂梯度的不變定義, 即與空間坐標軸選擇無關的定義。

从公式(1.5.1)我們得到,方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ 可表成

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = |\mathbf{N}| \cdot |\mathbf{s}^0| \cdot \cos \varphi = |\mathbf{N}| \cos \varphi, \quad (1.5.3)$$

其中 φ 是向量 $\mathbf{N}$ 和射线 λ 之间的夹角(见图4)。

因为当 $\varphi=0$ 时 $\cos \varphi$ 取得最大值——等于一,故从等式(1.5.3)得到 $|\mathbf{N}|$ 是 $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ 在点 P 最大可能取到的值,而 $\mathbf{N}$ 的方向则与从点 P 出发的使 $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ 取最大值的射线的方向相一致。

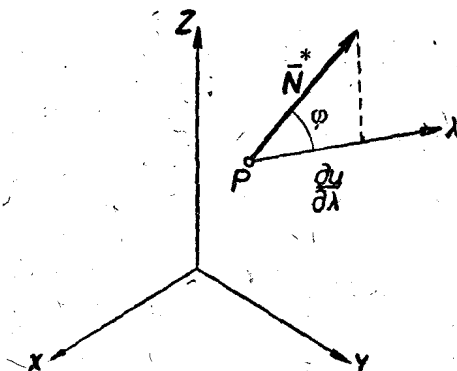


图 4

这样一来,场在给定点 P 处的梯度,它的方向是函数增长最快的方向(即在該点的方向导数取得最大值的方向),它的长度等于函数的最大增长速度(即等于在該点的方向导数的最大值)。梯度的这个定义与坐标系的选择无关,因而是个不变定义。

容易看出, P 点的梯度与经过 P 点的场的等值面垂直(即 $\mathbf{N}$ 在此等值面的法线上)。这是因为等值面 $u(x, y, z) = c$ 在点 $P(x, y, z)$ 处的法线方程为:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial u}{\partial z}},$$

其中 X, Y, Z 为法线上的流动坐标(見多元函数微分法),所以

$$\mathbf{N} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

* 本书图形中,凡是外文字母上加一横的(如 $\overline{N}$)都表示向量,它与正文中同字母以黑体字排印者(如 $\mathbf{N}$)相同——譯者注。