

高等学校教材

信号与系统

王宝祥 主编

哈尔滨工业大学出版社



信号与系统

王宝祥 主编

哈尔滨工业大学出版社

(黑)新登字第4号

内 容 简 介

本书全面系统地论述了信号与系统分析的基础理论。全书分两篇十二章,第一章到第五章为信号篇,内容包括信号分析的基础知识,信号线性变换(傅立叶变换、拉氏变换和 z 变换)和信号相关分析原理等;第六章到第十二章为系统篇,主要包括连续系统和离散系统的分析方法(时域法和变换域法)、DFT在离散系统分析中的应用和系统的状态变量分析法。每章都有一定数量的习题,书后给出参考答案。

本书可以作为通信工程、电子工程、自动控制、计算机等专业本科生的教材或教学参考书,也可供有关专业师生和科技人员自学参考。

信 号 与 系 统

王宝祥 主编

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

黑龙江省绥化县印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张24.875 字数570千字

1992年8月第1版 1992年8月第1次印刷

印数 1—3000

ISBN 7-5603-0387-0/TN·25 定价6.65元

前 言

近几十年来,随着电子技术的迅速发展和计算机的广泛使用,已使得各工程领域发生了巨大变化。系统理论的基本概念和研究方法渗入到科学技术的各个领域,促进了诸如电路理论、通信工程、信息处理、自动控制以及计算技术等学科的发展。《信号与系统》作为上述各学科的共同理论基础课,目前已为国内外高等学校的电子工程、电气工程专业普遍开设。并且国内外一些学者还认为《信号与系统》课程开设对象应该从目前的专业范围跨出去,对于电机类、自动控制、计算机及部分机械、动力类专业都可以不同深度地开设这门课程。

目前,本课程国内教材的普遍结构是以系统分析为主线,并在各章中插入有关信号部分的内容。为了加强信号分析和系统分析二者的完整性和系统性,本书将此结构作了改变,把有关信号的内容集中放在前五章,而将系统分析内容集中在后面。全书分为两篇计十二章,其中信号篇内容包括信号分析的基础知识、信号的线性变换(傅立叶变换,拉普拉斯变换和 z 变换)和信号相关分析原理等;系统篇主要内容是连续系统和离散系统的分析方法,包括时域法和变换域法,DFT在离散系统分析中的应用以及系统的状态变量分析法。每章都配有一定数量的习题,并在书后给出了参考答案。

本书是根据作者多年使用的讲稿改写而成的。作为我校通信工程、电子工程、信息处理、电子仪器与测量和卫星工程等专业本科生的教科书。对其他需要开设本课的专业,根据其不同深度的要求可以裁减书中的某些内容。建议作如下两种内容编排:(1)学习一,二,三,四,六,七,八,九,十章,或者(2)只学习一,二,三,六,七,八章,不涉及离散信号与系统的内容。

本书由王宝祥、贾晓光、张晔、赵会文、李玉萍等编写,王宝祥任主编。全书由钱国蕙教授主审。在本书编写过程中黄秀明,陈平等参与部分工作,教研室的许多同志对本书的出版给予支持和帮助,在此特向他们致以衷心的感谢。

限于作者水平,书中错误和不妥之处难免,敬请读者批评指正。

编 者

于哈尔滨工业大学

1991.10

序

随着电子技术、计算机技术的迅速发展和广泛应用,“信息”这个字眼到处被引用,但真正了解它与和它关联的种种问题却不是简单的概念。《信号与系统》是专门研究信息的载体信号和传输与加工信号的系统的基础理论,因此它就成了无线电类专业学生接触专业后的第一门也是最重要的一门专业基础课,不少相关专业近年也纷纷选修这门课程。

关于《信号与系统》的教科书,从国外引进的和国内编写的已经不少了。每本书都有自己的思路和体系。本书是在作者多年教学实践的基础上博采众人之长而编写成的。作者在教学中,发现以模拟和离散作为两条线索分析信号与系统,终有将一个事物分离成两处之不统一协调之感,且学生学习起来又不乏重复与隔裂,不易比较掌握。如果先讲信号的各种形式及相应的分析方法,有助于学生有机地接受与掌握,讲系统部分时也是这样。这就是本书编写的主要动机。关于随机信号与随机过程的分析,依我看来,也应属于信号与系统的基本内容。但限于各课程分工,一般在此也就不予列入了。

本书前身是校内讲义,已经试用多年,基本上满足了教学要求,各章还推选了一定数量的习题便于学习(作者还曾出版了一本《信号与系统习题集》,哈工大出版社出版)。我想这本教材也是教学改革中的一个很好的尝试

钱国蕙

1992. 1. 24

目 录

信号篇——信号分析与变换

第一章 信号分析的理论基础	1
§ 1.1 引言.....	1
§ 1.2 信号的分类.....	2
§ 1.3 信号的基函数表示法.....	4
§ 1.4 正交函数.....	4
§ 1.5 奇异函数.....	10
§ 1.6 信号的时域分解与变换.....	18
§ 1.7 离散时间信号——序列.....	23
§ 1.8 卷积.....	27
习 题.....	38
第二章 傅立叶变换	42
§ 2.1 周期信号的频谱分析——傅立叶级数.....	42
§ 2.2 典型周期信号的频谱.....	49
§ 2.3 非周期信号的频谱分析——傅立叶变换.....	55
§ 2.4 典型非周期信号的频谱.....	58
§ 2.5 傅立叶变换的性质.....	65
§ 2.6 周期信号的傅立叶变换.....	76
§ 2.7 抽样信号的频谱.....	80
§ 2.8 已调信号的频谱.....	85
习 题.....	89
第三章 拉普拉斯变换	95
§ 3.1 引言.....	95
§ 3.2 拉普拉斯变换.....	95
§ 3.3 拉普拉斯变换的收敛域.....	98
§ 3.4 常用函数的拉普拉斯变换.....	101
§ 3.5 拉普拉斯反变换.....	104
§ 3.6 拉普拉斯变换的基本性质.....	113
习 题.....	119
第四章 Z 变换	122
§ 4.1 z 变换及其收敛域.....	122
§ 4.2 z 反变换.....	127

§ 4.3	z 变换的性质	131
§ 4.4	z 变换与拉普拉斯变换的关系	140
§ 4.5	信号线性变换小结	143
习 题		144
第五章 信号相关分析原理		147
§ 5.1	信号的互能量与互能谱	147
§ 5.2	信号的相关分析	152
§ 5.3	离散信号的自相关函数	159
§ 5.4	信号的互相关函数	161
习 题		165

系统篇——线性系统分析

第六章 连续系统的时域分析		167
§ 6.1	引言	167
§ 6.2	微分方程的经典解法	170
§ 6.3	零输入响应	174
§ 6.4	冲激响应与阶跃响应	179
§ 6.5	零状态响应	184
习 题		188
第七章 连续系统的频域分析		191
§ 7.1	傅立叶变换分析法	191
§ 7.2	无失真传输条件	197
§ 7.3	理想低通滤波器	199
习 题		204
第八章 连续系统的复频域分析		208
§ 8.1	拉普拉斯变换分析法	208
§ 8.2	系统函数的表示法	216
§ 8.3	极点零点分布与时域响应特性	219
§ 8.4	极点零点分布与系统频率特性	222
§ 8.5	波特图	227
§ 8.6	线性系统的模拟	233
§ 8.7	信号流图	236
习 题		241
第九章 离散系统的时域分析		248
§ 9.1	引言	248
§ 9.2	离散系统的描述和模拟	248
§ 9.3	差分方程的经典解法	255
§ 9.4	零输入响应和零状态响应	259

习 题	266
第十章 离散系统的 z 域分析	269
§ 10.1 离散系统的 z 变换分析法	269
§ 10.2 离散系统的系统函数	275
§ 10.3 离散系统的频率响应	278
§ 10.4 数字滤波器	281
习 题	288
第十一章 离散傅立叶变换	291
§ 11.1 离散傅立叶级数 (DFS)	291
§ 11.2 离散傅立叶变换 (DFT)	294
§ 11.3 离散傅立叶变换的性质	296
§ 11.4 离散傅立叶变换与 z 变换的关系	303
§ 11.5 快速傅立叶变换 (FFT)	305
§ 11.6 快速卷积与快速相关	311
习 题	314
第十二章 系统的状态变量分析法	318
§ 12.1 引言	318
§ 12.2 状态方程的建立	319
§ 12.3 连续系统状态方程的解法	329
§ 12.4 离散系统状态方程的解法	341
§ 12.5 系统的可控性和可观性	349
习 题	353
附录A 常用周期信号的傅立叶级数表	358
附录B 常用信号的傅立叶变换表	359
附录C 常用数学表	362
参考文献	365
习题答案	366

信号篇 信号分析与变换

第一章 信号分析的理论基础

§ 1.1 引言

社会生活中,人们总要不断地以某种方式发出消息和接收消息,即传递和交换消息。实现人类社会职能乃至维持人本身的生存,必须不停连进行各种消息的传递和交换。例如,我国古代利用烽火台的火光传送敌人入侵的警报;古希腊人以火炬的位置表示不同的字母符号;人们还曾利用击鼓鸣金的音响传达战斗命令等。人们将欲传送的消息变为光和声的形式,即形成了光信号和声信号。在当时,信号的形式和内容,传递信号的方式都是很简单的。因此要实现信号的传送,无论在距离、速度及可靠性等方面都受到很大局限。

19世纪以后,人们开始利用电信号传送消息。1837年,莫尔斯(F.B.Morse)发明了电报,将欲传送的字母和数字经编码后变成电信号,1876年,贝尔(A.G.Bell)发明了电话,直接将声音转变为电信号沿导线传送。在19世纪中,人们致力研究电信号的无线传输也有突破。1865年,英国的麦克斯韦(Maxwell)总结了前人的科学技术成果,提出了电磁波学说。1887年,德国的赫兹(Hertz)通过实验证实了麦克斯韦的学说,为无线电电子科学的发展奠定了理论基础。1895年,俄国的波波夫(Popov)、意大利的马可尼(Marconi)实现了电信号的无线传送。这样,经过科学家们不断地努力,终于实现了利用电磁波传送信号的美好理想。由此以后,传送电信号的通信方式得到迅速发展,无线广播、超短波通信、广播电视、雷达、无线电导航等相继出现,并且已经应用到工农业生产、国民经济管理、国防及人们日常生活的各个方面。

无线电电子学技术的发展和运用,归根到底是要解决一个信号传输问题,也就是要建立一个输送信号的装置,即所谓信号传输系统。电报、电话、电视、雷达、导航等都是信号传输系统。例如,一个电视系统,要传送的消息是一些配有声音的画面,则在传输时,首先要利用电视摄像机把画面转换成图象信号,并利用话筒把声音变成伴音信号,这就是待传送的全电视信号。由于这种信号的振荡频率太低,很难直接在天线上激励起电磁波,因此利用电视发射机把全电视信号变换为频率更高的信号,通过天线将

这种高频信号转换为电磁波发射出去，电磁波在空间传播。在收信点，电视接收天线截获到电磁波的一小部分能量并将其转变成为微弱的高频电信号，送入电视接收机。电视接收机将高频信号的频率降低，变为全电视信号，再分解为图象信号和伴音信号，并分别送到显象管和喇叭，于是就能收看到配有伴音的画面，从而得到了发送端的消息。这个过程可以用方框图表示出来，如图1.1-1所示。

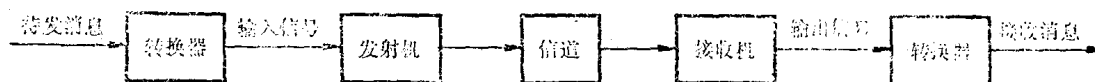


图 1.1-1 一般通信系统的组成

现在对上图中的一些名词稍作解释。

消息 待传送的一种以收、发双方事先约定的方式组成的符号，例如语言、文字、电码等。

信号 按照习惯，人们将用于描述，记录和传输消息的任何物理状态随时间变化的过程叫做信号。这里是指电信号。由于消息一般不便直接传输，故需把消息转变成相应变化的电压或电流即电信号。由此可见，信号是消息的一种表现形式，而消息是信号的具体内容。

除了消息和信号之外，人们还常用到“信息”一词。所谓信息是指包含在消息中的有效成分。在本书中，我们不讨论有关信息的问题。

转换器 把消息转换为电信号，或者反过来把电信号还原成消息的装置，如摄像管、显象管、话筒和喇叭等。由于这些装置具有将一种形式的能量转换为另一种形式能量的功能，所以也常称其为换能器。

信道 信号传输的通道。它可以是双导线、同轴电缆和波导，也可以是空间和人造卫星，或者是光导纤维。有时发射机和接收机也可以看成是信道的通道。

由上述可知，通信系统的工作主要包括三个方面：消息与信号之间的转换，信号的处理和信号的传输。可见，通信系统是以信号为核心进行工作的。为了保证信号以尽可能小的失真进行传输及得到满意的处理，作为无线电技术工作者应首先认真研究信号的特性。

§ 1.2 信号的分类

信号是通信系统中所传输的主体，而系统中所包含的各种电路、设备只是实现这种传输的手段。

信号是运载消息的载体，其最常见的表现形式是随时间变化的电压或电流，因此描述信号的常用方法是写出它的数学表达式，也可以绘图表示。由于信号表现为以时间为自变量的函数，故在本书中常常交替地使用“信号”与“函数”这两个名词而不加区别。然而，严格说来函数可以是多值的，而信号却是单值的。

对于各种信号，可以从不同的角度进行分类。

确定信号与随机信号 当信号是一确定的时间函数时，给定某一时间值，就可以确定出一相应的函数值，这样的信号是确定信号或称规则信号。但是，实际传输的信号往

往具有不可预知的不确定性，这种信号是随机信号或称不确定信号。严格说来，在自然界中确定信号是不存在的，因为在信号传输过程中，不可避免地要受到各种干扰和噪声的影响，这些干扰和噪声都具有随机特性。对于随机信号不能表示为确切的时间函数，对它的研究只能使用统计无线电方法。

周期信号与非周期信号 在确定信号中又可分为周期信号和非周期信号。所谓周期信号就是依一定时间间隔无始无终地重复着某一变化规律的信号，其表示式可以写为

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

满足此关系式的最小 T 值称为信号的周期。非周期信号在时间上不具有周而复始变化的特性，它不具有周期 T （或者认为周期 T 是趋于无限大的情况）。当然，真正的周期信号实际上是不存在的，所谓周期信号只是指在相当长时间内按某一规律重复变化的信号。

连续时间信号与离散时间信号 按照时间函数自变量取值的连续性和离散性可将信号分为连续时间信号与离散时间信号（简称连续信号与离散信号）。如果在某一时间间隔内，对于任意时间值（除若干不连续点外）都可给出确定的函数值，则此信号就称为连续信号。例如图1.2-1所示的正弦波和矩形波，都是在 $-\infty < t < \infty$ 时间间隔内的连续信号。只是在图(a)中 $t < 0$ 和图(b)中 $t < 0$ 及 $t > t_0$ 的范围内的信号值均为零，并且图(b)

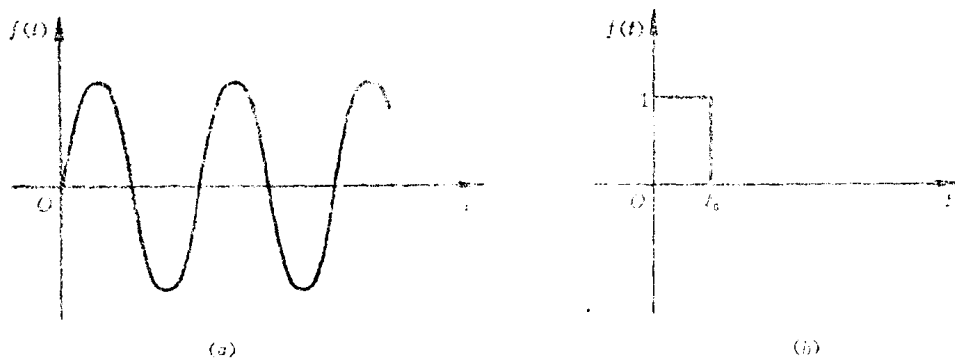


图 1.2-1 连续时间信号

中在 $t = 0$ 和 $t = t_0$ 处存在两个不连续点。连续信号的幅值可以是连续的，即可以取任何实数，如图(a)所示；连续信号的幅值也可以是离散的，即只能取有限个规定的数值如图(b)所示。对于时间和幅值都连续的信号又称为模拟信号，如图1.2-1(a)所示。与连续信号相对应的是离散信号。代表离散信号的时间函数，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，在其他时间，函数没有定义。例如在图1.2-2(a)中，函数 $f(t_k)$ 只在

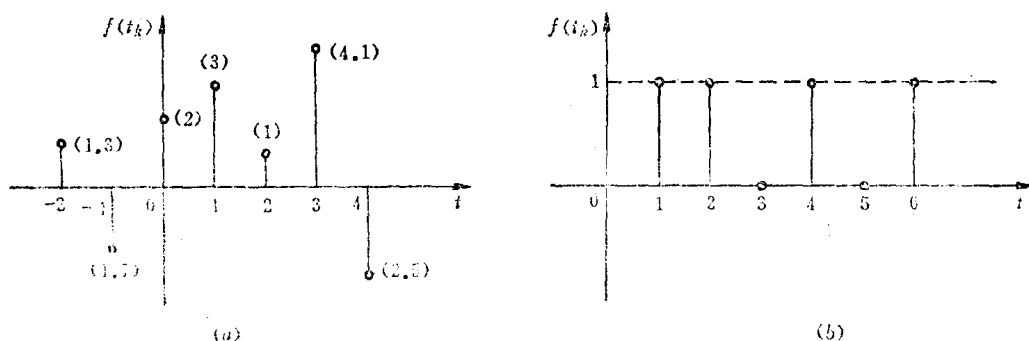


图 1.2-2 离散时间信号

$t_k = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 等离散时刻给出函数值 $1.3, -1.7, 2, 3, 1, 4.1, -2.5, \dots$ 等, 此时的函数幅值可取任何实数。离散时间间隔一般都是均匀的, 也可以是不均匀的。如果离散信号的幅值是连续的, 即幅值可取任何实数 (如图(a)), 则称为抽样信号。如果离散信号的幅值只能取某些规定的数值 (如图(b)), 则称为数字信号。

能量信号与功率信号 按照信号的能量特点可以将信号分为能量信号和功率信号, 如果在无限大的时间间隔内, 信号的能量为有限值而信号平均功率为零, 则此信号称为能量信号。对它只能从能量方面去加以考察, 而无法从平均功率去考察。如果在无限大的时间间隔内, 信号的平均功率为有限值而信号的总能量为无限大, 则此信号称为功率信号。对它只能从功率上去加以考察。不难理解, 周期信号都是功率信号, 有限时间内的信号必为能量信号, 而非周期信号可以是能量信号, 也可以是功率信号。

除以上分类方式外, 还可将信号分为一维信号与多维信号, 调制信号, 载波信号与已调波信号等等。

§ 1.3 信号的基函数表示法

信号是时间的函数, 它的最一般的表示方法是借用某个抽象的数学符号, 例如 $f(t)$, $x(t)$, $e(t)$ 等加以表示。这种数学表示对于进行任何形式的系统分析是必不可少的。但是, 由于这种不定量的抽象表示, 没有指明信号在任意瞬间的数值, 因此需要使用一种时间的显函数来表示信号, 以使在所有瞬间的数值都有准确的定义。

任何一种表示方法的选择, 常常取决于数学上是否方便, 是否易于形象化或者具体的应用等因素。

经研究证实, 将信号 $f(t)$ 表示为一组基本时间函数的线性组合, 在数学上是比较方便的。这些基本时间函数, 简称为基函数, 通过适当选择的基函数, 可以使信号表示法得到最一般的形式。

设所选定的基函数为 $\phi_0(t)$, $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\dots$, $\phi_N(t)$, 其中 N 可以是无限大, 任意信号 $f(t)$ 可以表示为这组基函数的线性组合

$$f(t) = \sum_n a_n \phi_n(t) \quad (1.3-1)$$

式中下标 n 取任意整数, 包括正整数和负整数。这样, 要表示一个具体的信号, 就变成如何选择最佳的基函数集 $\phi_n(t)$ 和确定相应的系数 a_n 的问题了。

实际使用式(1.3-1)时, 总是取有限项 N , 即要求确定有限个系数 a_n 。因此, 对信号的基函数表示法所期望的一个性质是所谓的系数的终结性。这个性质允许我们单独求出任何指定的系数, 而不需要知道其他的系数。换句话说, 即可以在表示式(1.3-1)中加上更多的项 (如要获得更高的精度), 而对前面的系数不必作任何的改变。

已经证明, 为了得到系数的终结性, 在表示式成立的时间区间内要求基函数集 $\phi_n(t)$ 是正交函数集。下面一节将介绍正交函数和正交函数集。

§ 1.4 正交函数

信号分解为正交函数分量与矢量分解为正交矢量的原理相似。我们先熟悉一下矢量

分解的概念, 然后引出正交函数和正交函数集。

(一) 正交矢量

图1.4-1表示两个矢量 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 。若矢量 $\vec{A}_1$ 在另一矢量 $\vec{A}_2$ 上的分量为 $\vec{A}_1$ 在 $\vec{A}_2$ 上的投影, 如图1.4-1(a)中的 $C_{12}\vec{A}_2$, 这里 $\vec{A}_1$ 的末端与 $C_{12}\vec{A}_2$ 末端的连线(图中虚线)垂直于 $\vec{A}_2$, C_{12} 是一个标量系数。由矢量代数可得分量 $C_{12}\vec{A}_2$ 的模为

$$|C_{12}\vec{A}_2| = C_{12}A_2$$

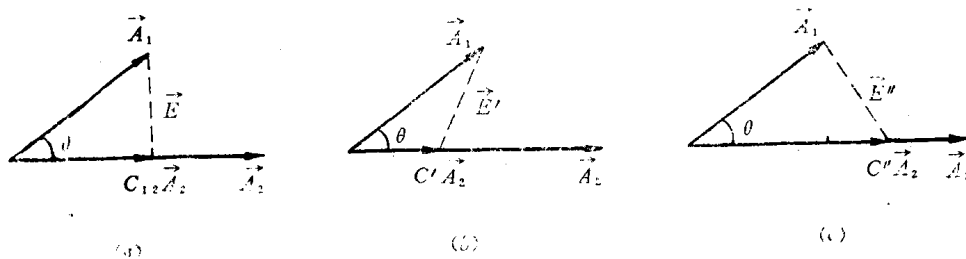


图 1.4-1

和

$$|C_{12}\vec{A}_2| = A_1 \cos \theta = \frac{A_1 A_2 \cos \theta}{A_2} = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{A_2}$$

式中 θ 是二矢量之间的夹角, A_1, A_2 分别为 $\vec{A}_1, \vec{A}_2$ 的模。由上两式可得

$$C_{12} = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{A_2^2} = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{\vec{A}_2 \cdot \vec{A}_2} \quad (1.4-1)$$

由图可见, 矢量 $\vec{A}_1$ 和它的分量 $C_{12}\vec{A}_2$ 显然是有区别的。如果用 $C_{12}\vec{A}_2$ 直接表示 $\vec{A}_1$, 则为一个近似表示式

$$\vec{A}_1 \approx C_{12}\vec{A}_2$$

$\vec{A}_1$ 和 $C_{12}\vec{A}_2$ 之间的误差矢量 $\vec{E}$ 如图1.4-1(a)中虚线所示。由图可见, 三个矢量之间的关系式为

$$\vec{E} = \vec{A}_1 - C_{12}\vec{A}_2 \quad (1.4-2)$$

式(1.4-2)表明, 矢量 $\vec{A}_1$ 可以分解为两个分量 $C_{12}\vec{A}_2$ 和 $\vec{E}$, 其方向是互相垂直的。除此之外, 矢量 $\vec{A}_1$ 在 $\vec{A}_2$ 上还存在斜投影 $C'\vec{A}_2$ 和 $C''\vec{A}_2$, 如图1.4-1(b)、(c)所示。它们也是矢量, $\vec{A}_1$ 在 $\vec{A}_2$ 上的分量, 而且这一类的斜投影分量可以有无限多个。但是, 如果要求用一矢量的分量去代表原矢量而使误差矢量为最小, 则这个分量只能是原矢量的垂直投影。由图可见, 所有其他情况下的误差矢量 $\vec{E}'$ 和 $\vec{E}''$ 等, 都将大于垂直投影时的误差矢量 $\vec{E}$ 。所以, 从一矢量的分量要与其原矢量尽量接近这一要求出发, 系数 C_{12} 的选取应使误差矢量最小, 即按式(1.4-1)确定的垂直投影情况。以上是从几何图形上直观得出的结论。

若从解析角度考虑 C_{12} 的取值问题, 可令误差矢量的平方 $|\vec{E}|^2 = |\vec{A}_1 - C_{12}\vec{A}_2|^2$ 为最小, 即令

$$\frac{d}{dC_{12}} |\vec{A}_1 - C_{12}\vec{A}_2|^2 = 0$$

亦可导出式 (1.4-1)。

系数 C_{12} 是在最小平方误差的意义上, 标志着两个矢量 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 相互接近的程度。当 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 完全重合时, $\theta = 0$, $C_{12} = 1$ 。随着 θ 增大, C_{12} 减小, 当 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 互相垂直时, $\theta = 90^\circ$, $C_{12} = 0$, 对于最后这种情况, 我们称 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 为正交矢量。此时, 矢量 $\vec{A}_1$ 在矢量 $\vec{A}_2$ 的方向没有分量。

根据上述原理, 我们可以将一个平面中的任意矢量 $\vec{A}$ 在直角坐标系中分解为两个正交矢量的组合, 如图 1.4-2 所示。即

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \quad (1.4-3)$$

这样, 平面上的任何一个矢量都可以用一个二维的正交矢量集的分量组合来表示它。

依据同样的理由, 对于一个三维空间中的矢量 $\vec{A}$ 可以用一个三维的正交矢量集来表示它, 如图 1.4-3 所示。即

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \quad (1.4-4)$$

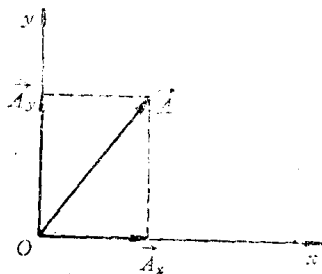


图 1.4-2

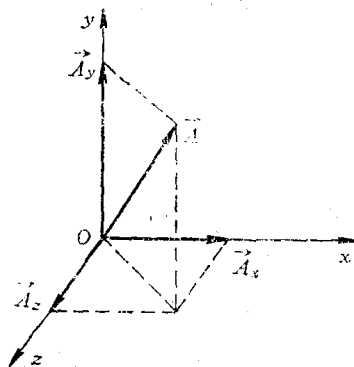


图 1.4-3

上述概念可以推广到 n 维空间。虽然在现实世界上并不存在超过三维的 n 维空间, 但是许多物理问题可以借助于这个概念去处理。

(二) 正交函数

利用与正交矢量类比的方法可以方便地定义出正交函数。

设在一定的时间区间 $(t_1 < t < t_2)$ 内, 用函数 $f_1(t)$ 在另一函数 $f_2(t)$ 中的分量 $C_{12}f_2(t)$ 来近似表示 $f_1(t)$, 即

$$f_1(t) \approx C_{12}f_2(t) \quad (t_1 < t < t_2)$$

则有误差函数 $\varepsilon(t)$, 且

$$\varepsilon(t) = f_1(t) - C_{12}f_2(t) \quad (1.4-5)$$

其中系数 C_{12} 的选择应使 $f_1(t)$ 和 $C_{12}f_2(t)$ 达到最佳的近似。这里采用使方均误差（而不是平均误差）为最小作为“最佳”的标准。方均误差为

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12}f_2(t)]^2 dt \quad (1.4-6)$$

为求得使 $\overline{\varepsilon^2}$ 为最小的 C_{12} 值，应使

$$\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dC_{12}} = 0 \quad (1.4-7)$$

即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dC_{12}} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - C_{12}f_2(t)]^2 dt \right\} &= 0 \\ \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dC_{12}} f_1^2(t) dt - 2 \int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t) dt + 2C_{12} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt \right] &= 0 \end{aligned}$$

上式第一项等于零，于是得

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} \quad (1.4-8)$$

式(1.4-8)表明，函数 $f_1(t)$ 有 $f_2(t)$ 的分量，此分量的系数是 C_{12} 。如果 C_{12} 等于零，则表明 $f_1(t)$ 不包含 $f_2(t)$ 的分量，我们称此时 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内正交。由式(1.4-8)可得两个函数在区间 (t_1, t_2) 内正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t) dt = 0 \quad (1.4-9)$$

如果 $C_{12} = 1$ ，即 $f_1(t) = f_2(t)$ ，则分量 $C_{12}f_2(t)$ ，就是函数 $f_1(t)$ 本身。所以 C_{12} 称为两函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的相关系数。

如果所讨论的函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是复变函数，那么有关正交特性的描述略有不同。

若 $f_1(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内可以由 $C_{12}f_2(t)$ 来近似

$$f_1(t) \approx C_{12}f_2(t) \quad (1.4-10)$$

则使方均误差幅度为最小的 C_{12} 之最佳值是

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)f_2^*(t) dt} \quad (1.4-11)$$

两函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内互相正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t)f_2(t) dt = 0 \quad (1.4-12)$$

式中 $f_1^*(t)$ 、 $f_2^*(t)$ 分别是 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的复共轭函数。

下面举例说明 C_{12} 的意义。

例 1.4-1 设方波函数 $f(t)$ 如图1.4-4所示，试用正弦波 $\sin t$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内近

似表示此函数,并使方均误差最小。

解

方波函数表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

在区间 $(0, 2\pi)$ 内, $f(t)$ 近似表示为

$$f(t) \approx C_{12} \sin t$$

根据式 (1.4-8) 求系数 C_{12} , 得

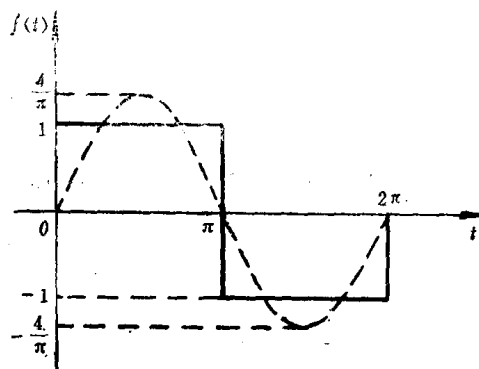


图 1.4-4

$$\begin{aligned} C_{12} &= \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) dt \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

所以 $f(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$

例 1.4-2 试用正弦函数 $\sin t$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内近似表示余弦函数 $\cos t$ 。

解 根据式 (1.4-8), 有

$$C_{12} = \frac{\int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt} = 0$$

说明余弦信号 $\cos t$ 不包含正弦信号 $\sin t$ 的分量, 或者说余弦与正弦两函数正交。

(三) 正交函数集

设 $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$, n 个函数构成一个函数集, 这些函数在区间 (t_1, t_2) 内满足下列正交条件

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt &= 0 \quad i \neq j \\ \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt &= K_i \end{aligned} \right\} \quad (1.4-13)$$

则称此函数集为正交函数集。上式中 K_i 为常数。当 $K_i = 1$ 时, 则称为归一化正交函数集或规格化正交函数集。

任意一个函数 $f(t)$, 在区间 (t_1, t_2) 内, 可以用这 n 个正交函数的线性组合来近似地表示

$$\begin{aligned} f(t) &\approx C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \dots + C_n g_n(t) \\ &= \sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \end{aligned}$$

显然，这是信号的基函数表示方法。在使近似式的方均误差最小的情况下，可分别求得各系数 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 。

设方均误差为

$$\bar{\varepsilon}^2(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \right]^2 dt$$

令 $\frac{d\bar{\varepsilon}^2}{dC_i} = 0$

则 $\frac{d}{dC_i} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \right]^2 dt \right\} = 0$

若 $r = i$

则 $[f(t) - C_i g_i(t)]^2 = f^2(t) - 2C_i f(t) g_i(t) + C_i^2 g_i^2(t)$

$$\frac{d}{dC_i} \int_{t_1}^{t_2} [f^2(t) - 2C_i f(t) g_i(t) + C_i^2 g_i^2(t)] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt = C_i \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt$$

所以 $C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt} = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt \quad (1.4-14)$

(四) 完备正交函数集

在区间 (t_1, t_2) 内，用正交函数集 $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ 近似表示函数 $f(t)$ ，有

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^n C_r g_r(t)$$

其方均误差为

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \right]^2 dt$$

若当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\bar{\varepsilon}^2$ 的极限等于零，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}^2 = 0$$

则称此函数集为完备正交函数集。所谓完备，是指对任意函数 $f(t)$ 都可以用一无穷级数表示，即

$$f(t) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r g_r(t)$$

此级数收敛于 $f(t)$ 。注意，这里是等式，而不是近似式。

下面介绍几种常用的完备正交函数集。

三角函数集 函数 $1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos n\omega_1 t, \dots, \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin n\omega_1 t, \dots$ ，当所取函数有无限多个时，在区间 $(t_0, t_0 + T_1)$ 内组成完备正交函数集。其中 $T_1 = 2\pi/\omega_1$ 。