大学

数学系

自学丛书

微分几何

WEIFEN JIHE

大学数学系自学丛书

微分几何

东北师范大学

王家彦　主编

辽宁人民出版社

一九八四年·沈阳

大学数学系自学丛书

微　分　几　何

Weifen Jihe

王家彦　主编

辽宁人民出版社出版　　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　　沈阳市第一印刷厂印刷

字数：440,000　开本：850×1168 1/32　印张：19 1/4　插页：2
印数：1—19,000
1984年10月第1版　　1984年10月第1次印刷

责任编辑：俞晓群　　封面设计：安今生

统一书号：7090·265　　定价：2.55元

出 版 说 明

为了适应广大在职人员和社会青年自学成才的需要，根据国家建立高等教育自学考试制度的精神，以满足学员自学教材的要求，由辽宁人民出版社出版一套大学数学系自学丛书。

本丛书是由东北师范大学数学系，根据教育部规定的普通高等院校本科必修课现行教学计划和教学大纲编写的。教材内容系统，数据充实，条理清晰，深入浅出；每章均有学习指导和习题解答，便于自学。经过刻苦自学，即可无师自通，达到本科毕业水平。

本丛书有：空间解析几何、高等代数、数学分析、高等几何、常微分方程、复变函数论、近世代数、实变函数论、微分几何、计算机与算法语言 BASIC、概率论与数理统计、计算方法等。本丛书既可供自学应试之用，也可供大专院校的本科在校生和函授生及业余大学学生使用。

本丛书由于水平所限，不当之处在所难免，我们热诚希望广大自学读者批评指正。

目 录

第一部分　微分几何

第一章　曲线论

曲线是微分几何研究的基本对象之一．在这一章里，我们主要讨论光滑曲线在某点邻域内的形状和性质．

§1　简单曲线弧及其解析表示

为了给出曲线的概念，我们先介绍一下关于从空间中任意点集到另一点集的映射知识．

设M，N是任意二点集，当它们之间存在某种对应关系f，使得M里的每个点X都有N中的一点$f(X)$与其对应时，我们就说给定了从集M到集N的一个**映射**f(*)，记作$f: M\to N$．点$f(X)$称为点X的象。集M中所有点的象$\{f(M)\}$称为M在N中的象．

如果给定N的一个映射f^{-1}，使集合N中的点$f(X)$与M里的点X相对应，则称映射f^{-1}为f的**逆映射**．

如果两个点集M和N，满足下列条件：

(i)　单值映射：M里的不同点，在N里有不同的象（同样，N里的不同点，在M里也有不同的象），即f（f^{-1}）是**单值映射**．若f，f^{-1}都是单值映射，这时，说M与N是一对一

(*) 是指一个变换或一种对应．

的。

(ii) 连续映射：对于M中的任意两点X，Y 及任意的一个正数$\varepsilon>0$，总存在正数 $\delta>0$，如果M中两点 X，Y 的距离 $|X-Y|<\delta$，使得N中的两点 $f(X)$，$f(Y)$ 的距离 $|f(X)-f(Y)|<\varepsilon$，则称映射f为**连续映射**.

【定义】 已给两个集合M和N，它们之间如果存在映射f，满足条件：

（1）f是一对一的；

（2）f和它的逆f^{-1}都是连续的。这时称M与N**同胚**.

例如，我们最熟悉的平移变换和旋转变换就是单值的连续映射，所以变换前后的两个点集 $M=\{X\,|X=(x,\ y);\ x,y\in R\}$ 与 $f(M)=\{f(X)\,|f(X)=(x+h,\ y+k)\}$ 是同胚的（h、k为常数）；$M=\{X|\ X=(x,y);\ x,y\in R\}$与$f(M)=\{f(X)|f(X)=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ \ x\sin\theta+y\cos\theta);\ x,y,\ \theta\in R\}$ 也是同胚的（θ为已知常数）.

下面，我们定义简单曲线弧.

【定义】 已给一曲线弧L和一开直线段S，若L满足下列条件：

(i) L与S同胚；

(ii) L上每个点都存在切线，而且当切点沿L移动时，切线也随之连续转动.

这时，称L为**简单曲线弧**. 简单曲线弧上的点叫**正常点**。由条件 (ii) 知简单曲线弧是光滑的.

假设线段S上点的坐标用参数 $t(a<t<b)$表示，它在映射 f 下的象是曲线弧L，并设 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 是与线段S上的点t相对应的曲线弧上点的坐标，则函数组

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad (a<t<b)$$

称为曲线 L 的**参数方程**。

那么，在什么情况下，参数方程

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad (a<t<b)$$

表示的是简单曲线弧呢？

【定理 1】已给曲线弧 L 的参数方程

$$L:\ x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad (t_1<t<t_2)\qquad (1\cdot1)$$

如果满足下列条件：

(a) 函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 是单值且 C^1 类（一阶导数存在且连续）的；

(b) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 中，至少有一个一阶导数不为0，即 $\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)>0$；

则方程(1·1)确定简单曲线弧。

（证明）只须证明满足定理条件 (a), (b) 的方程 (1·1) 所确定的曲线弧 L 满足简单曲线弧定义的条件(i), (ii)即可。

先证条件 (i)：取一线段 $\overline{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 同胚。设实数 t 是此线段上点 M 的坐标，即

$$M=M(t)$$

由方程(1·1) 给出了线段 $\overline{AB}$ 与曲线弧 L，即 $\overset{\frown}{A'B'}$ 上点的对应关系。由定理条件(a)知函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 是单值连续的。所以对于给定任意的 $\varepsilon>0$，则有 $\delta>0$，当 $|\overline{M_0(t_0)M_1(t_1)}|<\delta$ 时，便得 $|\overset{\frown}{M'_0M'_1}|<\varepsilon$，即 M_1' 在以 M'_0 为中心的 ε 球内。由此函数联系着的从线段 $\overline{AB}$ 到曲线弧 $\overset{\frown}{A'B'}$ 上的对应是单值连续的。

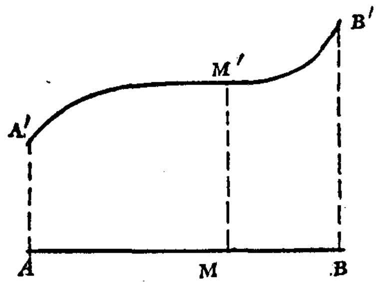

图 1—1

要满足简单曲线弧定义中的同胚条件，尚须证明：从曲线弧$\overset{\frown}{A'B'}$到线段$\overline{AB}$上的对应也是单值连续的。为此，我们通过(1·1)利用隐函数存在定理寻找一个从$\overset{\frown}{A'B'}$到$\overline{AB}$上的对应关系（函数），并且是单值连续的。

由定理条件(b)，我们设 $\dot{x}(t)\neq 0$ 并不失一般性，为利用隐函数定理来反解（1），我们做C^1类函数

$$F(x,\ t)=x(t)-x \tag{1·2}$$

并且取 $t=t_0$ 时，对应的 $x(t)$ 值为x_0做为初始值（即$x(t_0)=x_0$）。这时，显然有下式成立

$$F(x_0,\ t_0)=x(t_0)-x_0=0$$

由定理条件（a），（b）可知：$x(t)$是C^1类的，且导数

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{d}{dt}x(t)-\frac{dx}{dt}=\dot{x}(t)\neq 0$$

所以(1·2)式满足隐函数存在定理，故必存在一函数

$$t=\varphi(x)$$

并且当 $x=x_0$ 时，取 $\varphi(x_0)=t_0$。此函数在x_0点的邻域内是单值连续的。在这种情况下，一个x就确定一个t值，这个 t 值又确定一组 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$，这时$\overset{\frown}{A'B'}$上的点$M'(x(t),y(t),z(t))$就对应$\overline{AB}$上唯一的$M(t)$ 点。所以，从曲线弧$\overset{\frown}{A'B'}$到线段$\overline{AB}$上点的对应也是单值连续的。

即由（1）式确定的曲线弧$\overset{\frown}{A'B'}$与线段$\overline{AB}$是同胚的。

其次，证明条件(ii)。

为方便起见，我们把（1·1）式写成向量式

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3\quad(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\ \text{是基底})$$

由定理条件(b)可知

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{e}_1+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{e}_2+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{e}_3\neq 0$$

从向量函数导数的几何意义来解释，即切向量存在。又由定理条件(a) 知，不仅导数存在，而且连续（C^1类）．所以，当点沿曲线L移动时， 切向量也随之连续转动， 故满足定义条件(ii)。

由此证得，满足条件 (a)，(b) 的参数方程 (1·1) 所确定的曲线弧是简单曲线弧．

从解析几何我们知道，空间曲线还可由两个曲面的交来确定，此时，它的方程可写做：

$$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$$

下面，我们再给出这样方程所表示的曲线是简单曲线弧的条件。

【定理 2】设 $\varphi(x,y,z)$，$\psi(x,y,z)$ 都是变量x，y，z的正则函数（即它们存在连续偏导数），而空间曲线L上点是满足方程

$$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}\tag{1.3}$$

的点集．$M_0(x_0, y_0, z_0)$是这个点集里的任意一点，在该点矩阵

$$\begin{pmatrix}\varphi_x & \varphi_y & \varphi_z\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{pmatrix}\tag{1.4}$$

的秩等于2．则点 M_0 (x_0, y_0, z_0) 存在一个邻域，使L上所有属于这个邻域的点，构成一条简单曲线弧．

（证明）由已知条件，在点M_0矩阵(1·4)的秩为2，就是说，它的二阶子式中至少有一个不等于0．设

$$\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} \neq 0$$

并不失一般性。由数学分析中的隐函数存在定理（多变数的）可知，在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的邻域中，存在一对单值可微函数

$$y = F(x),\quad z = \Phi(x) \tag{1.5}$$

且当 $x = x_0$ 时，$y_0 = F(x_0)$，$z_0 = \Phi(x_0)$。

实际上，(1·5) 式就是 (1·3) 式在点 M_0 邻域内的参数表示，这里只不过是取参数 $t = x$。

为求曲线(1·5)在 M 点的切向量，将方程组(1·3)关于 x 求导，有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \end{aligned}\right\}$$

即是

$$\left.\begin{aligned} \varphi_x + \varphi_y F'(x) + \varphi_z \Phi'(x) = 0 \\ \psi_x + \psi_y F'(x) + \psi_z \Phi'(x) = 0 \end{aligned}\right\}$$

解方程组，得切向量坐标为 $\{1,\ F'(x),\ \Phi'(x)\}$(*)，显然它是 x 的连续函数，所以当点 M 沿曲线移动时，切向量也随之连续转动，即曲线弧是光滑的。

简单曲线弧的上述两种解析表示是可以互化的，其中最常用的还是参数表示式。

当给出曲线的一般表示式

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

(*) 参看数学分析中偏导数的应用。

时，我们总可以把它化为参数表示。

〔例 1〕将曲线方程：$x^3 = 3a^2y$，$2zx = a^2$ 化为参数表示式。

（解）设 $x = t$，由原方程解得

$$y = \frac{t^3}{3a^2}, \quad z = \frac{a^2}{2t}$$

所以曲线的参数表示式为：

$$\boldsymbol{r} = \left\{t, \frac{t^3}{3a^2}, \frac{a^2}{2t}\right\}$$

由于参数选取方法的不同，因此曲线的参数表示式并不唯一。

§2 曲线的弧长，微分不变量

§2.1 曲线的弧长

对于简单曲线弧，我们先引入弧长的概念。

【定义】假设 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ 所确定的简单曲线弧为 $\overset{\frown}{AB}$，其中 $\boldsymbol{r}(a)$，$\boldsymbol{r}(b)$ 对应端点 A、B，在 A、B 之间，按 t 值的增加顺序，取 $n-1$ 个分点 P_1, P_2，……，P_{n-1}，这样把曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 分成 n 段小弧，把 A 点记作 P_0，B 点记作 P_n. 当把相邻的分点用直线段连结起来，就得到一条折线，其长度为

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$$

当分点无限加细（即 $\overline{P_{i-1}P_i} \to 0$）时，折线长 s_n 趋于一个确定的

极限，这个极限值叫做曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长。

下面，我们给出关于弧长的计算公式。

【定理 1】若已知曲线的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

则从 $t=a$ 到 $t=b$ 的弧长为

$$s=\int_a^b |\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt \qquad \left(\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) \tag{2.1}$$

（证明）在数学分析中，我们已经证明过：当函数 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 具有连续的导数，且满足不等式 $\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)>0$ 时，由此而确定的曲线从 $t=a$ 到 $t=b$ 的弧长由积分

$$s=\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt$$

来计算。

又因为 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$

所以 $\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{x}(t)\boldsymbol{e}_1+\dot{y}(t)\boldsymbol{e}_2+\dot{z}(t)\boldsymbol{e}_3$

而 $|\dot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}$

所以

$$s=\int_a^b |\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt$$

若以 $s(t)$ 表示从 $t=0$ 到 $t=t$ 的弧长，则本节(2·1)式可写作

$$s=\int_0^t |\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt \tag{2.2}$$

此式表明 s 是 t 的单值连续函数。

对上式求导，得

$$\dot{s}(t)=|\dot{\boldsymbol{r}}|$$

因为简单曲线弧上的点都是正常点，即 $\dot{\boldsymbol{r}}\neq 0$，所以 $|\dot{\boldsymbol{r}}|>0$，

因此，弧长s又是t的连续的单调增函数。由反函数定理可知，$s(t)$ 存在连续的反函数 $t(s)$，只要把 $t(s)$ 代入曲线方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，便得以弧长为参数的曲线方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t(s))$$

这样，每条曲线都存在弧长，因此总可以用 s 作为它的参数，所以把弧长 s 叫做曲线的**自然参数**.

引入弧长为参数后，由于曲线上的点与弧长的值之间建立一种一对一的连续对应，因此，借助此参数方程来研究曲线，会带来许多特殊的方便，其中最突出的特点是在曲线上引进了坐标。

【定理 2】已给曲线L：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的参数t是自然参数 s 的充分必要条件是 $|\dot{\boldsymbol{r}}|=1$.

（证明）必要性： 已知L的参数为自然参数. 对于本节(2·1) 式取 $a=0$ $b=t$ 时，进行微分，则有

$$ds=|\dot{\boldsymbol{r}}|\,ds$$

所以 $\quad |\dot{\boldsymbol{r}}|=1$

充分性：若 $|\dot{\boldsymbol{r}}|=1$，即是$\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=1$，则$\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt=dt$.

积分上式，左端 $\displaystyle\int_0^t\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt=s$

右端 $\displaystyle\int_0^t dt=t$

即 $\quad \displaystyle s=\int_0^t|\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt=\int_0^t dt=t$

故参数为自然参数.

注意：今后向径$\boldsymbol{r}$对自然参数s的导向量用$\boldsymbol{r}'$来表示，而对于非自然参数的导向量用$\dot{\boldsymbol{r}}$来表示.

现在，我们举例说明如何将曲线的一般参数 t换为自然参

数 s.

〔例 1〕 试将圆柱螺旋线 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$ 的参数 t 换为自然参数 s.

（解）先求出从 $t=0$ 到任意点t的弧长：

因为 $\dot{\boldsymbol{r}}=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

于是 $$s=\int_0^t|\dot{\boldsymbol{r}}|\,dt=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t$$

所以 $$t=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

将上式代入原螺旋线方程，得

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$$

它就是以弧长s为参数的圆柱螺旋线的方程.

这里值得注意的是，有时在换参数的过程中，带来一些计算上的繁琐或困难。所以在处理具体问题时，究竟选取那个参数为好，需要根据问题而定.

§2.2 微分不变量

在解析几何里我们知道，曲线和曲面用方程来表示，这样就使得对几何图形性质的研究通过坐标系转化为代数运算，从而以代数为工具解决了几何中的很多问题，促进了几何的发展。但是由于坐标系选择的任意性，往往使表示几何图形的方程复杂化，其中有的量代表图形的基本特征，而有的纯属于由坐标系选择的任意性而派生出来的. 为探讨上方便，我们研究了坐标变换下的不变量和不变式，即挑出能够表示图形特征的量而抛弃与图形无关的量，使解析几何转化为坐标变换群下的不变量理

论，而使几何向前迈进一大步。

微分几何也是一样，古典微分几何是以向量分析为工具研究曲线和曲面在某一点邻域中的性质和形状的。因此，曲线和曲面的解析表示式大都是用以数量为参数的向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 来表示的，而且对几何图形特征的表示式大都是向量函数的各阶导数来表出的，尤其是在讨论具体问题时，往往是借助于曲线上某一点处的相伴坐标系来进行讨论的。这样由参数选择的任意性和坐标系选择的任意性，常常在解析式中产生和图形无关的一些量，而使解析表示式复杂化。为研究上的方便，迫使我们必须寻求与曲线直接有关的弧长为参数和在相伴坐标系变换下的微分不变量。

为此，我们先来讨论向径的各阶导向量与坐标变换的关系。

【定理3】向径 $\boldsymbol{r}(s)$ 的任何阶导向量都是坐标变换下的微分不变量。

（证明） 定理证明，分为两部分进行：

(i) 在平移变换下，向径 $\boldsymbol{r}(s)$ 的各阶导向量是不变量。

事实上，假设有两个坐标系，一个是以 O 为原点，而另一个以 O^* 为原点，对于空间每一点 M 都有两个向径，如图

$$\boldsymbol{r}(s)=\overrightarrow{OM} \quad \boldsymbol{r}^*(s)=\overrightarrow{O^*M}$$

而三角形 OO^*M，按向量和的定义，有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O^*M}+\overrightarrow{OO^*}$$

即 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}^*(s)+\overrightarrow{OO^*}$

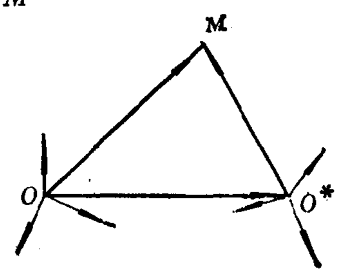

图 1—2

这就是向径在平移变换时的变换式，此式说明在平移变