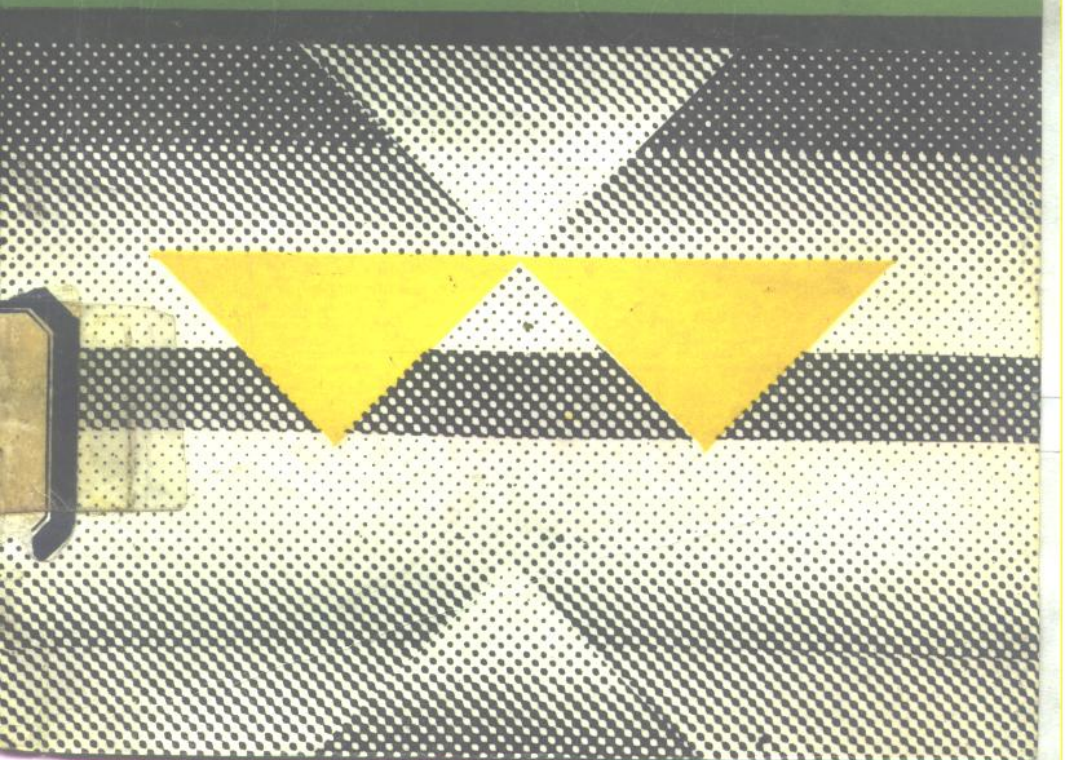


# 数学思维 与 数学方法论

王仲春 李元中 编著  
顾莉蕾 孙名符

高等教育出版社



# 数学思维与 数学方法论

王仲春 李元中 编著  
顾莉蕾 孙名符

高等教育出版社

## 内 容 提 要

本书是一本综合数学思维与数学方法论述的基础书籍。

本书由三部分内容组成：一、论述一般科学思维及数学思维方法；二、论述对数学发展有重大意义的数学思想方法；三、讨论数学思维与数学方法的培养。

本书可供师范院校、理工科大学数学专业师生选用。

## 数学思维与数学方法论

王仲春 李元中 编 著  
顾海善 孙名符

高等教育出版社出版

新华书店北京科技发行所友行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 7.5 字数 190 000

1989 年 11 月第 1 版 1989 年 11 月第 1 次印刷

印数 0001—3 202

ISBN 7-04-002531-7/O·855

定价 2.30 元

## 序

数学教育这几年似乎很兴旺，值得高兴。摆在面前的这本《数学思维与教学方法论》，属于探讨数学教育理论基础的书籍。作者的许多见解，我很赞成。有些看法，也引起了我的思考。

我较为欣赏的是关于“数学思维”的论述。作者特别把“非逻辑思维”辟为专章，对直觉思维作了详细的分析，而且提出“培养学生非逻辑思维能力是数学教学的重要任务”。鉴于当前我国数学教育的现状，我很佩服作者的胆识。

确实，当今世界数学教育有两种不同的看法。一种是强调数学的严谨性，突出逻辑思维能力的培养，着重形式演绎。另一种强调数学的应用性，突出教学观念与教学方法的确立，着重非形式化叙述与逻辑演绎能力的结合。中国的潮流无疑属于前一种。有些同志把逻辑思维能力强调得过了头，几乎把数学当作逻辑的附庸。欧洲的潮流是后一种。他们的教材富有趣味性，注意现实生活原型，而对逻辑演绎证明则适可而止，正式提出“非形式化”原则。一些比较激进的教学教育家，甚至把“定义—定理—证明”这种教材模式，看作“新数学”运动的祸害，说成是布尔巴基学派在教育上的失败。我想，偏激总是不好的。本书作者同时注意逻辑思维与非逻辑思维两个方面，恐怕比较妥当。

作者贯穿全书的另一条线索是教学方法论。我想也有其一定的道理。实际上，数学本身就是一种教人聪明的方法。从方法论角度论述数学与数学教育，自是顺理成章的事。本书列举的多半是宏观上的教学方法。如“模型方法”、“结构方法”、“公理化方法”以及“变换方法”、“无穷小方法”等等。这对于提高数学教育工作者的哲学素养、加强教学方法的总体认识，当然

是很有帮劲的。此外，有些专著则论述数学解题中的微观数学方法，如“变量替换”、“数学归纳法”、“迭代递推”等等，不计其数。我读过这些论述后，觉得思维更有条理，得益良多。不过，我至今仍存在一个问题：“教学方法那么多，究竟应该按怎样的体系怎样分类才好？”曾经思考过一阵子，仍不得要领。近来忽发奇想，觉得按数学中存在的矛盾和范畴将宏观数学方法归类，或许能成一体系。可惜尚未能加之实现，只好留待将来去尝试一下。

我认为，整个数学教育学尚处于襁褓之中。要使数学教育学从一般教育学中独立出来，具有自己独特的规律，恐非一朝一夕所能完成。不过，“千里之行，始于足下”。本书作者为探究数学思维与数学方法的规律所作的努力，是漫长征途中不可缺少的一步。此类著作的不断涌现，乃是数学教育研究兴旺发达的标志之一。欣喜之余，遂有此序，并就教于作者与各位方家。

张莫宙

1988. 12. 10

于华东师范大学

## 前 言

回顾科学发展的历史，可以清楚地看到，科学的发展总是和思维的发展相联系着的。它们一起从低级到高级、从简单到复杂、从具体到概括发展着。

今天，科学技术蓬勃发展，思维的研究也应相应地得到发展。钱学森倡导建立思维科学，他把科学分为六大部门：自然科学、社会科学、数学科学、系统科学、人体科学和思维科学。把思维科学作为与其他科学部门并列的独立的科学部门之一。他认为，思维科学的目的是，在于研究人认识客观世界的规律和方法。人们预计，思维科学的研究，将对今后的科学发展起重大的推动作用。

科学方法是科学思维作用于科学研究中所体现出的认识世界和改造世界的方法。科学的发展也与科学方法的发展是联系在一起的，它们好象两条平行的直线，在科学历史发展的进程中一起向前延伸。任何科学内容都包含着一定的科学方法，科学方法都是从科学内容中提炼出来的，而科学方法的应用，又返回来会促进科学内容的发展。科学就是在这种循环往复的作用下不断前进的。

每一门具体的科学都有自己独特的科学方法，用其促进本门科学的发展。数学也是这样。

随着科学技术的发展，人们的教育观念也发生了急剧的转变。传统的教育观念认为，除了对学生在道德修养上的要求之外就是传授知识。把学生视为容纳知识的仓库，教师的责任就是传授知识。考试就是考查记忆知识的多少，题目大多是所学知识的再现。

现在人们已经认识到，学校所培养的不是知识型的人才，而应该是智能型的人才。在学校应使学生建立起汲取知识的基础，掌握汲取知识、形成知识的方法，并善于运用知识。也就是说，不只是给学生传授一定的知识，更重要的是培养学生的能力，其中最主要的是创造性的思维能力。

要形成学生的数学能力，不能只是传授数学知识，而更重要的是要自觉地注意数学思维和方法的培养。因此，从数学教学的角度来看，更有讨论数学思维和数学方法的必要。本书正是为了满足教学上的这种需要而编写的。

本书由三部分内容组成：第一部分论述一般科学思维及数学思维方法；第二部分着重论述对数学发展有重大意义的数学思想方法；第三部分讨论数学思维与数学方法的培养。

本书可供高等师范院校、理工科大学数学专业作为教材或参考书。

本书初稿由甘肃省教委委托兰州大学陈文颢教授、西北师范大学郑宪祖教授进行了审查，并提出宝贵的修改意见和建议；华东师范大学张冀宙教授也审阅了本书的初稿，同样也提出了可贵的修改意见和建议；西北师范大学丁传松教授对本书的编写给了很大支持和鼓励，在此我们一并表示衷心的感谢。

由于思维科学正处于开创时期，一些课题还有待作进一步的研究。数学方法论著作的出版，以及这门课程的开设，也只是近几年来的事情，有待研讨的问题也很多。兼之，编者学识浅陋，阐释肤浅，论述不周以至谬误之处必不可免，恳请读者指正。

编者

1989年1月

# 目 录

<b>第一章 思维方法概述</b> .....	( 1 )
§ 1 思维概念及其结构与功能.....	( 1 )
一、思维概念.....	( 1 )
二、思维结构.....	( 1 )
三、思维功能.....	( 2 )
§ 2 思维的特征.....	( 3 )
一、思维的目的性和问题性.....	( 3 )
二、思维的概括性.....	( 3 )
三、思维的间接性.....	( 3 )
四、思维的逻辑性.....	( 3 )
§ 3 思维过程及其分类.....	( 4 )
一、思维过程.....	( 4 )
二、思维分类.....	( 4 )
<b>第二章 思维的逻辑形式</b> .....	( 7 )
§ 1 科学抽象.....	( 7 )
一、科学抽象及其作用.....	( 7 )
二、数学抽象的特点.....	( 10 )
§ 2 归纳.....	( 12 )
一、归纳的特点与类型.....	( 12 )
二、确定因果关系的归纳方法.....	( 15 )
§ 3 类比.....	( 18 )
一、类比的特点与类型.....	( 18 )
二、比喻和形式上的对比.....	( 25 )
§ 4 假说.....	( 27 )
一、假说及其作用.....	( 27 )



二、假说的构成	( 31 )
三、假说的演变	( 35 )
四、多疑多思、追根寻底	( 35 )
§ 5 演绎	( 39 )
一、演绎推理及其作用	( 39 )
二、演绎推理的局限性	( 42 )
三、演绎与归纳、类比的比较	( 42 )
<b>第三章 非逻辑思维</b>	( 44 )
§ 1 想象	( 44 )
一、想象的特征	( 45 )
二、想象的作用	( 45 )
§ 2 直觉	( 46 )
一、直觉思维及其表现	( 46 )
二、直觉思维的特征	( 47 )
§ 3 灵感 (顿悟)	( 49 )
一、灵感及其表现	( 49 )
二、灵感的特征	( 49 )
§ 4 想象、直觉与灵感的共性	( 51 )
§ 5 逻辑思维与非逻辑思维的关系	( 51 )
§ 6 培养学生的非逻辑思维能力也是数学教学的重要任务	( 52 )
一、培养学生的非逻辑思维能力的重要性	( 52 )
二、怎样培养学生的非逻辑思维能力	( 54 )
<b>第四章 数学思维及其特征</b>	( 56 )
§ 1 数学科学与数学思维	( 56 )
一、数学思维及其性质	( 56 )
二、数学思维结构	( 58 )
§ 2 从数学的发现看数学思维特征	( 60 )
一、数学发现的思维过程	( 60 )
二、数学直觉思维的基本形式	( 61 )
三、创造性数学思维	( 64 )

§ 3 数学美与数学思维	( 65 )
一、数学美的表现	( 65 )
二、数学美感的要素	( 65 )
三、数学美与数学发现	( 69 )
§ 4 数学思维品质及其培养	( 71 )
一、思维的灵活性	( 71 )
二、思维的批判性	( 73 )
三、思维的严谨性	( 74 )
四、思维的广阔性	( 77 )
<b>第五章 系统方法概要</b>	<b>( 80 )</b>
§ 1 系统方法的产生	( 80 )
§ 2 系统方法论的基本原理	( 81 )
一、整体原理	( 82 )
二、反馈原理	( 83 )
三、有序原理	( 84 )
四、功能优化原理	( 85 )
五、动态发展原理	( 85 )
§ 3 系统方法论的基本方法	( 86 )
一、功能模拟法	( 86 )
二、黑箱方法	( 87 )
三、最优化方法	( 88 )
§ 4 系统方法的认识论意义	( 88 )
<b>第六章 数学模型方法</b>	<b>( 90 )</b>
§ 1 模型概述	( 90 )
一、模型及其模型方法	( 90 )
二、模型的特征	( 91 )
三、模型的分类	( 91 )
§ 2 数学模型	( 91 )
一、数学模型的特征及其分类	( 91 )
二、数学模型举例	( 92 )
三、建立数学模型的方法和步骤	( 99 )

四、如何培养建立数学模型的能力·····	(100)
<b>第七章 数学中的变换方法</b> ·····	(101)
§ 1 数学变换方法概述·····	(101)
一、数学变换方法的哲学思想基础·····	(101)
二、数学变换方法的逻辑结构框图·····	(101)
§ 2 数学变换方法的几种类型及其典型例题	
选讲·····	(102)
一、恒等变换·····	(102)
二、分割变换·····	(104)
三、映射变换·····	(106)
四、幂级数变换·····	(109)
五、拉普拉斯变换·····	(113)
六、傅里叶变换·····	(117)
七、参数变换法·····	(118)
八、变换在几何中的应用概述·····	(120)
§ 3 数学变换方法评述·····	(123)
<b>第八章 数学中的对称方法</b> ·····	(124)
§ 1 对称方法概述·····	(124)
一、对称方法的客观背景·····	(124)
二、对称方法的基本形态·····	(124)
§ 2 利用数学对称法解有关数学问题·····	(126)
一、运用数学对称法解题举例·····	(126)
二、数学中的对偶方法及其应用·····	(131)
§ 3 对称方法评析·····	(132)
<b>第九章 数学中的无穷小方法</b> ·····	(135)
§ 1 无穷小方法形成和发展的历史演变·····	(135)
一、无穷小思想的渊源·····	(135)
二、微积分的诞生——无穷小量方法的伟大功绩·····	(137)
三、微积分的神秘性被彻底清除——潜无限的胜利·····	(140)
四、非标准分析的诞生——无穷小量方法“东山再起”·····	(141)
五、用两种无穷小方法研究分析学的同步发展局面已形成·····	(143)

§ 2	两种无穷小方法的本质差异及其根源	(144)
一、	哲学观点上的差异及根源	(144)
二、	认识论上的差异及根源	(145)
三、	数学方法论上的差异及根源	(146)
§ 3	无穷小方法戏剧性的演变对数学教育的启示	(146)
一、	加深数学理论与实践关系的认识	(146)
二、	对数学课程设置及其内容结构的再认识	(147)
<b>第十章</b>	<b>数学中的公理化方法</b>	(148)
§ 1	公理化方法的历史概述	(148)
§ 2	公理化方法的几种不同类型及其特征	(151)
一、	实质性公理化方法与形式公理化方法	(151)
二、	形式公理化方法发展的两个阶段	(153)
三、	理论系统(现代形式公理系统) 与其相应的具体模型	(153)
§ 3	公理化方法的逻辑特征及其证明方法	(155)
一、	公理化方法的逻辑特征	(155)
二、	相容性、独立性及完备性的证明	(157)
§ 4	几个典型公理系统简介	(159)
一、	希尔伯特《几何基础》的公理系统	(159)
二、	集合论公理系统——ZFC公理系统	(161)
三、	自然数公理化方法	(164)
§ 5	公理化方法评述	(166)
一、	公理化方法的作用和意义	(166)
二、	公理化方法的局限性	(168)
<b>第十一章</b>	<b>数学结构方法</b>	(169)
§ 1	数学结构方法概述	(169)
一、	数学结构方法的形成与发展	(169)
二、	数学结构方法的特征	(170)
三、	数学结构方法的分类	(171)

§ 2 同构、同态在数学结构方法中的 作用 和 意义·····	(178)
一、同构、同态概念概述·····	(178)
二、同构、同态的特征·····	(180)
三、同构在研究数学结构中的作用和意义·····	(181)
§ 3 数学结构方法述评·····	(182)
一、结构思想方法的历史地位·····	(182)
二、布尔巴基学派成功的主要原因·····	(183)
三、布尔巴基学派与当代数学·····	(183)
四、对数学教育的启示·····	(184)
<b>第十二章 悖论及其意义</b> ·····	(186)
§ 1 悖论的举例及其注释·····	(186)
一、说谎者悖论·····	(186)
二、康托悖论·····	(187)
三、罗素悖论·····	(187)
四、理发师悖论·····	(188)
五、理查德悖论·····	(188)
六、抛球悖论·····	(189)
§ 2 悖论的特征及其根源综述·····	(190)
一、悖论的逻辑结构分析·····	(190)
二、悖论的严格定义·····	(190)
三、悖论的根源·····	(191)
§ 3 解决悖论的方法·····	(192)
§ 4 悖论的意义·····	(194)
一、悖论在数学方法论方面的意义·····	(194)
二、悖论与数学基础·····	(198)
<b>第十三章 数学方法论中的几种哲学观</b> ·····	(199)
§ 1 逻辑主义观点、方法及其评述·····	(199)
一、逻辑主义观点与方法概述·····	(199)
二、逻辑斯谛简介·····	(199)
三、逻辑类型论与悖论的消除·····	(203)

四、逻辑主义观点述评.....	(204)
§ 2 直觉主义的观点、方法及其述评.....	(205)
一、直觉主义的观点与方法的形成和发展.....	(205)
二、直觉主义的观点与方法.....	(207)
三、直觉主义述评.....	(210)
§ 3 形式主义的观点、方法及其述评.....	(211)
一、希尔伯特形式主义观点和方法.....	(211)
二、希尔伯特形式主义述评.....	(213)
<b>第十四章 数学思维与数学方法的培养.....</b>	<b>(215)</b>
§ 1 数学教学中强调思维与方法的意义.....	(215)
§ 2 数学方法的培养.....	(216)
§ 3 数学思维的培养.....	(221)
<b>主要参考资料.....</b>	<b>(225)</b>

# 第一章 思维方法概述

思维科学与数学的关系极为密切.数学教育的主要任务之一,就是培养学生的逻辑思维能力和直觉思维能力.所以,作为本书的开头,本章首先对思维与科学思维方法作简要介绍.

## § 1. 思维概念及其结构与功能

### 一、思维概念

科学的发展史,也是一部思维的发展史.特别是近年来随着各种科学知识爆炸现象的出现,涌入人类的符号信息大量增加,空间距离逐步缩小,人们的思想文化交流日趋频繁,人的头脑也愈来愈复杂,所以人脑认识客观世界的能力不断提高.于是,思维科学便应运而生.当今,思维已渗透到心理学、哲学、逻辑学、控制论、信息论等学科.然而,究竟思维是什么?目前还没有一个人们公认的确切定义.因此,下面我们仅从心理学的角度对如何认识和理解思维作一简要说明.

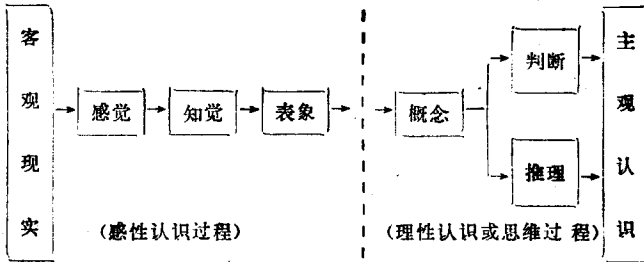
所谓思维,就是人脑对客观事物的本质、相互关系及其内在规律性的概括与间接反映.

### 二、思维结构

心理学对思维的研究包含两个层次:其一、是从大脑反映现实的本质和内在联系的过程方面揭示认识的高级形式.这属于人脑内交换信息的微观过程,亦称它为理性认识过程;其二、是研究外界的变化和发展何以成为意识事实.这可看作人脑与外界环境交换信息的宏观过程,亦称它为感性认识向理性认识的转化过程.其中感性认识包括感觉、知觉、表象,它们都是思维的基础.而表象是感性认识向理性认识过渡的中介或桥梁;理性认识

包括概念、判断、推理。而概念是思维的细胞和主要形式。

据此并依系统方法论的整体性原理，思维的物质性结构（区别于功能性结构）就是由感觉、知觉、表象、概念、判断、推理、思维基本规律和方法等要素及其相互联系所构成的整体框架。它的框图如下：



以上框架是人脑有目的地对客观事物运动规律性反映而来的，亦即由物质运动规律性转化为思维活动的过程。但是，一般来说人脑对客观事物运动变化规律的反映，不可能做到“镜面”反射，只能反映其重要的本质因素及其规律。用数学的观点来讲，由物质运动到思维活动一般来说不是一个同构映射而是一个同态映射。

思维结构是人们在现实客观世界中形成的，由最基本的要素构成的开放性系统，因而它在不断的演变、进化和发展。

### 三、思维功能

我们曾指出思维结构是指思维的物质性结构。然而诸要素各有其特定功能，于是产生了思维的功能性结构。所谓思维的功能是指思维结构的各个层次有目的的运动而形成。当然，此处的功能是指整体功能，并非各要素功能的简单相加。在对思维功能进行具体陈述时，一个明显的事实是：没有有关的信息就无法进行思维。可见依信息论的观点看，思维的主要功能应该是：接收信息、选择信息、过滤信息、加工信息、转化信息、储存信息、



输出信息等。

## § 2. 思维的特征

思维有哪些特征呢？从思维的特殊矛盾出发，我们认为它的特征主要有目的性和问题性、概括性、间接性，逻辑性等。

### 一、思维的目的性和问题性

有目的地认识、理解和解决问题是人类思维独特的本能。如果没有问题就不会导致思维的产生。因此，我们必须通过发现问题解决问题的过程，分析、研究思维的产生、发展过程和特点。

有意识地能动地改造自然、改造社会、自控自己，只有人类思维才具有这种目的性。正象马克思所说，蜜蜂建造蜂房，不管怎样粘巧，但它和人类建筑师最大不同的特点是，人类建筑师在建筑一座房子之前，这座房子已在他的观念中完成了。所以，目的性是人们思维的根本特征。

### 二、思维的概括性

思维之所以能揭示客观事物的本质及其内在联系的规律性，即不仅能认识个别事物的本质属性，而且能从这些个别事物的本质属性推广到同类事物的本质属性，主要靠思维的概括性本领。

### 三、思维的间接性

思维是凭借已有知识和经验对客观事物进行的间接反映。首先，思维借助已有知识和经验，能对没有直接眼见耳闻的事物及其属性，作出正确的判断。如人们早晨起来，发现大地是湿的，虽然晚间没有看见和听见下雨，但仍可作出昨晚下了雨的正确判断。其次，思维可以突破和超越已有知识和直感的界线。如在数学中将有限推广到无限以及所有科学假设的提出都是如此。

### 四、思维的逻辑性

思维的逻辑性是人的一种珍贵的品质。这种品质表现在考察问题遵循严格的逻辑顺序，在推理中有充足的逻辑依据。思维的