计算数学丛书

样条与插值

李岳生　上海科学技术出版社

计算数学丛书

样 条 与 插 值

李 岳 生

上海科学技术出版社

ZN92/30

计算数学丛书
样条与插值
李岳生
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　上海市印十二厂印刷
开本787×1092 1/32　印张8　字数174,000
1983年7月第1版　1983年7月第1次印刷
印数：1—7,700
统一书号：13119·1087　定价：（科四）0.76元

出 版 说 明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《有限条形法》、《广义逆矩阵及其计算方法》、《非线性方程迭代解法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《坏条件常微分方程数值解》、《误差分析》、《最小二乘问题的数值解法》、《板壳问题非协调方法》、《外推法及其应用》、《Monte Carlo 方法》、《差分格式理论》、《高维偏微分方程数值解》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版。

《计算数学丛书》编辑委员会

序　言

1979年2月到1980年1月期间，著者曾给中山大学计算机科学系侧重于研究样条函数的研究生，讲授了一门《样条与逼近》课程. 这本小书就是当时的讲稿整理而成的. 样条逼近论的一些重要内容，如样条函数最佳一致逼近、有理逼近、多元逼近等，书中都没有反映，否则篇幅就过大了.

本书，首先是想为研究生研究样条函数打下一个较为坚实的基础，能给他们提供一些新近发展的线索；同时也考虑到样条函数是一个应用非常广泛的数学工具，今天对它感兴趣的不仅是从事计算方法和数值逼近的研究者，统计计算、最佳控制和计算物理等领域的研究工作者也在应用样条函数的成果并推动它的发展. 因此本书在取材上，是侧重于那些有可能在上述诸方面应用得上的样条函数理论. 从哪里入手呢？我们选择了格林函数. 全书围绕样条函数与格林函数、δ 函数的内在联系这一线索展开，其中包括 B 样条的构造和表示，样条插值及其余项，线性泛函的最佳逼近，微分算子样条及希氏空间中的样条等理论；也还联系著者近几年来的研究工作，介绍了样条的共轭插值，微分方程广义多点边值问题等内容.

样条理论中的某些方面，如我国学者关于几何样条的研究以及样条逼近论的研究，由于和我们所选择的格林函数这个线索离得较远，这里只好割爱. 我们的取材自然受到著者片面知识和兴趣的局限，加之所掌握的文献资料也很不完全，因此不妥之处一定难免，我诚恳地欢迎读者批评指正.

书中配有一定数量的习题，其中少数是比较难的，它们主要是为了帮助读者掌握基本理论和方法.

这本书的草稿的大部分，曾请研究生同志们分头阅读过，并征求了他们及听课的进修教师和本系老师们的意见，特别是计算数学教研室黄友谦副教授仔细地审阅了全稿，提出了宝贵意见. 对以上同志们给予的支持和帮助，谨此致以衷心的感谢.

作　者

1980年4月6日于广州

目　录

第 1 章

引　论

样条函数插值及其余项表示和常微分方程的多点边值问题有着密切的联系，后者又和格林(Green)函数紧紧联系着．因此，在引论中我们先通过简单的例子，交待两者的联系；然后按参考文献[1]简单介绍两点边值问题的格林函数；进而初步讨论多点边值问题，重点是推广拉格朗日(Lagrange)恒等式，阐明多点共轭边值条件的形式和格林函数的构造，这样便于以后用格林函数作工具，统一研究样条函数．

联系样条函数，对多点边值问题作进一步的讨论，将放在本书的最后一章．下面我们假定读者了解线性空间，线性算子，线性泛函等基本概念．

§1　分段光滑函数插值与多点边值问题的联系

我们先考虑简单的分段线性函数的插值问题：给定了一组点(x_i, y_i)，$i=0, 1, \cdots, k+1$，其中x_i满足

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_k<x_{k+1}=b.$$

要求一函数$S(x)$，它具有下列性质：

(i) $S(x)$是$[x_i, x_{i+1}]$上的线性函数，$i=0, 1, \cdots, k$，且在$[a, b]$上连续；

(ii) $S(x_i)=\beta_i$，$i=0, 1, \cdots, k+1$．

显然，这一问题的解存在、唯一，且可分段表示成

$$S(x)=\frac{x_{i+1}-x}{h_i}\beta_i+\frac{x-x_i}{h_i}\beta_{i+1},\ x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1},$$

$h_i=x_{i+1}-x_i$, $i=0, 1, \cdots, k$. 它也可以整体表示成

$$S(x)=\sum_{i=0}^{k+1}\beta_i\varphi_i(x),\ a\leqslant x\leqslant b, \tag{1.1}$$

其中 $\varphi_i(x)$ 为 $[a, b]$ 上的折线函数，即分段线性的连续函数，且满足

$$\varphi_i(x_j)=\delta_{ij},\ i、j=0, 1, \cdots, k+1. \tag{1.2}$$

其图形如图 1.1.

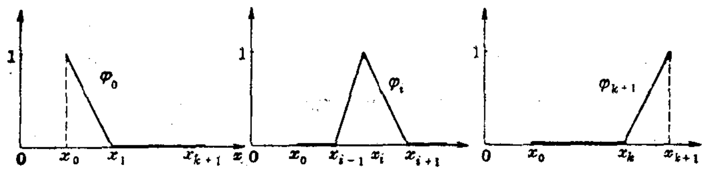

图1.1-a　　图 1.1-b　　图 1.1-c

如果 $f(x)\in C^2\,[a, b]$ 是被插函数，$S(x)=S(f;x)$ 为其上述折线插值函数，用 $R(x)=f(x)-S(x)$ 表示插值余项. 余项的估计本质上归结为每一子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的线性插值的余项估计，因此不难作出. 我们现在感兴趣的是 $R(x)$ 在 $[a, b]$ 上的整体表示问题.

我们注意到 $R(x)$ 满足下列条件:

(i) $R(x)$ 除了在分点 $\pi=\{x_i\}_1^k$ 处外，是 $[a, b]$ 上的分段二次连续可微函数，且在 π 上连续，这一性质可表示为 $R(x)\in C^2(I-\pi)\cap C(\pi)$, $I\equiv[a, b]$;

(ii) $R''(x)=f''(x)$, $x\in I-\pi$;

(iii) $R(x_i)=0$, $i=0, \cdots, k+1$.

这里的条件(i)～(iii)，构成了 $R(x)$ 所满足的特殊多点边值问题. "特殊"表现在 $R(x)$ 在一些孤立点上的光滑性要

求降低了，相应地在这些点上不要求满足微分方程，但所加的边值条件(iii)的个数 $k+2$ 可以高于方程的阶数 2.

现在来分析一般的多点边值问题．求 $y(x)$ 使满足下列条件：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & y(x)\in C^2(I-\pi)\cap C(\pi);\\ \text{(ii)} & y''=g(x),\ x\in I-\pi;\\ \text{(iii)} & y(x_i)=\beta_i,\ i=0,\ \cdots,\ k+1.\end{array}\right\} \tag{1.3}$$

其中 $g(x)\in C[a,\ b]$，$\{\beta_i\}_0^{k+1}$为任意给定.

不难看出，满足问题(1.3)之条件(i)～(ii)的通解是

$$y(x)=\sum_{j=0}^{k+1}c_j\varphi_j(x)+\int_a^b G(x,\ t)g(t)dt,\ a\leqslant x\leqslant b. \tag{1.4}$$

其中 $\varphi_j(x)$ 按 (1.2) 定义，$\{c_i\}$ 为任意常数，$G(x,\ t)=(x-t)_+$，记号 $u_+=\max(u,\ 0)$.

(1.4)中的求积部分是 $g\neq0$ 时的相应齐方程 (1.3) (i)、(ii)的一特解，此特解有超过要求的光滑性.

利用(1.4)，要求它满足多点边值条件(1.3)之(iii)，容易求得

$$c_i=\beta_i-\int_a^b G(x_i,\ t)g(t)dt. \tag{1.5}$$

将(1.5)代入(1.4)便得到问题(1.3)的唯一解

$$y(x)=\sum_{j=0}^{k+1}\beta_j\varphi_j(x)+\int_a^b K(x,\ t)g(t)dt. \tag{1.6}$$

其中

$$K(x,\ t)=G(x,\ t)-\sum_{i=0}^{k+1}\varphi_i(x)G(x_i,\ t). \tag{1.7}$$

将(1.6)应用到求余项 $R(x)$ 上，由于相应 $\beta_i=0$，$g=f''$，故得

$$R(x)=\int_a^b K(x,\ t)f''(t)dt.$$

$K(x,\ t)$有值得注意的特征性质：

1° 对任一固定 $t\ (a\leqslant t\leqslant b)$ 是 x 的分段线性函数即折线函数，折点为 $x_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ k+1)$ 和 t，作为 $x,\ t$ 的二元函数在 $a\leqslant x\leqslant b$、$a\leqslant t\leqslant b$ 上是连续的；

2° 对任一固定 $t\ (a\leqslant t\leqslant b)$ 作为 x 的函数，分段满足齐方程

$$K^{(2,0)}(x,\ t)=0,\ x\in I-\pi-\{t\};$$

且满足多点齐边值条件

$$K(x_i,\ t)=0,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ k+1;$$

3° 对 $a<t<b$，满足单位跳跃条件

$$K^{(1,0)}(t_+,\ t)-K^{(1,0)}(t_-,\ t)=1;$$

以上 $K^{(\alpha,\beta)}(x,\ t)$表示对 x 和 t 分别求 α 阶和 β 阶导数.

不难证明：性质 1°～3° 足以将 $K(x,\ t)$唯一确定下来，留作练习.

特别对 $k=0$ 的情形，$K(x,\ t)$变成

$$K(x,t)=(x-t)_+-(b-t)\frac{x-a}{b-a}=\begin{cases}\dfrac{(x-a)\ (t-b)}{b-a}, & x\leqslant t,\\[2ex] \dfrac{(x-b)\ (t-a)}{b-a}, & x\geqslant t.\end{cases}$$

这就是熟知的两点边值问题：

$$y''=g(x),\ y(a)=y(b)=0$$

的格林函数.

对于 $k>0$ 的一般情形，我们也称具有性质 1°～3° 的 $K(x,\ t)$为多点边值问题(1.3)（相应于 $\beta_i=0$ 的齐边值条件）的格林函数.

当边值问题 (1.3) 中 $g=0$ 时，它变成求 $y(x)$ 使满足下

列条件:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}\ y(x)\in C^2(I-\pi)\cap C(\pi);\\ \text{(ii)}\ y''=0,\ x\in I-\pi;\\ \text{(iii)}\ y(x_i)=\beta_i,\ i=0,\ \cdots,\ k+1.\end{array}\right\} \qquad (1.8)$$

(1.8)实际是相应于多点边值问题(1.3)的折线插值问题. 因为(1.8)的 (i)～(ii)条件表明 $y(x)$是折线, 而(iii)则是插值条件. (1.8)的唯一解是

$$y(x)=\sum_{j=0}^{k+1}\beta_j\varphi_j(x). \qquad (1.9)$$

比较(1.7)和(1.9)看出, 可赋予格林函数 $K(x, t)$以插值余项的意义. 实际上它是 $G(x, t)$ 对任意固定 t 作为 x 的函数作如上折线插值的余项. 因为(1.7)中的 $\sum\limits_{i=0}^{k+1}\varphi_i(x)G(x_i, t)=I_xG(x, t)$, 即是 $G(x, t)$ 关于 x 的折线插值函数. 从而

$$K(x, t)=G(x, t)-I_xG(x, t)=R_xG(x, t), \qquad (1.10)$$

其中 R 或 R_x (当需要强调作为 x 的函数作插值的时候) 表示相应插值余项算子. 这样便实现了多点边值问题的格林函数与相应插值余项核函数的联系. 通过这个简单例子所揭示的这种联系具有典型的意义, 将在本书以后各章反复地出现.

格林函数 $K(x, t)$ 作为 t 的函数, 也有如下的特征性质:

1° 对任一固定 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 是 t 的分段一次函数即折线函数, 折点为 $x_i(i=0, \cdots, k+1)$和 x;

2° 对固定 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 关于 t 满足

$$K^{(0,2)}(x, t)=0,\ t\in I-\pi-\{x\},$$

且

$$K(x, x_i)=0,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ k+1;$$

3° $K^{(0,1)}(x, x_+)-K^{(0,1)}(x, x_-)=1$,

而且还可以证明 $K(x, t)$是对称核, 即

$$K(x, t) = K(t, x).$$

以上均留作练习.

§2 两点边值问题

为了研究多点边值问题,我们先按文献[1]简单回顾有关两点边值问题格林函数的基本事实.

2-1 两点边值问题及其共轭边值问题

按照文献[1],研究如下两点边值问题:

$$\left.\begin{array}{l} l(D)y \equiv \sum_{j=0}^{n} p_j(x) D^{n-j} y = f(x), \\ U_\nu(y) = 0,\ \nu = 1,\ 2,\ \cdots,\ m. \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

其中 $D \equiv \frac{d}{dx}$, $l(D)y$ 为给定的微分算式, 假定系数 $p_j(x) \in C^{n-j}[a, b]$, $p_0(x) \neq 0$ 于 $[a, b]$, $f(x) \in C[a, b]$ 为给定, 均为实函数, $U_\nu(y)$ 为 y 的给定线性泛函其形式为

$$U_\nu(y) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu,j} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu,j} y^{(j)}(b) \tag{2.2}$$

其中的系数作成 $2n$ 维向量,即

$$(\alpha_{\nu,0}, \cdots, \alpha_{\nu,n-1}, \beta_{\nu,0}, \cdots, \beta_{\nu,n-1}) \in R^{2n}$$

且假定对 $\nu = 1, \cdots, m$, 它们是线性无关的, 否则可从(2.1)中去掉.

由分部积分法, 可以得到如下拉格朗日(Lagrange)恒等式

$$\int_a^b zly\,dx = \int_a^b yl^*z dx + \sum_{j=0}^{n-1} y^{(j)} z^{\langle n-j-1\rangle}\Big|_a^b \tag{2.3}$$

其中

$$l^*z = l^*(D)z \equiv \sum_{j=0}^{n} (-1)^j D^j (p_{n-j} z) \tag{2.4}$$

为 $ly\equiv l(D)y$ 的共轭微分算式，又

$$z^{(\nu)}\equiv l_\nu^* z,\ \nu=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1, \tag{2.5}$$

而

$$l_\nu^*=-Dl_{\nu-1}^*+p_\nu,\ \nu=1,\ \cdots,\ n-1, \tag{2.6}$$
$$l_0^*=p_0(x)$$

为 l_ν 的共轭微分算子，

$$l_\nu=l_{\nu-1}D+p_\nu,\ \nu=1,\ \cdots,\ n-1, \tag{2.7}$$
$$l_0=p_0(x).$$

如果在给定的线性泛函 $\{U_\nu\}_1^m$ 之外再任意补充 $2n-m$ 个两点线性泛函，使 $\{U_\nu\}_1^{2n}$ 成为 $2n$ 个线性独立的线性泛函，则 $y^{(\nu)}(a)$, $y^{(\nu)}(b)$, $\nu=0,\ 1,\ \cdots,n-1$ 均可通过 $U_1,\ \cdots,\ U_{2n}$ 线性表示，从而(2.3)中的非积分部分，可以改写成

$$\sum_{j=0}^{n-1} y^{(j)}z^{\langle n-j-1\rangle}\Big|_a^b=\sum_{\nu=1}^{2n}U_\nu V_{2n-\nu+1}, \tag{2.8}$$

其中 V_ν 乃是关于 $z^{(j)}(a)$, $z^{(j)}(b)$, $j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ 的线性形式，即为 $z(x)$ 的两点线性泛函，而且 $V_1,\ \cdots,\ V_{2n}$ 也是线性独立的形式。这样一来，拉氏恒等式(2.3)变成

$$\int_a^b zly\,dx=\int_a^b yl^*z dx+\sum_{\nu=1}^{2n}U_\nu V_{2n-\nu+1}, \tag{2.9}$$

据此恒等式引出边值问题(2.1)的共轭边值问题：

$$\left.\begin{aligned} &l^*(D)z=f(x),\\ &V_\nu(z)=0,\ \nu=1,\ \cdots,\ 2n-m. \end{aligned}\right\} \tag{2.1)*$$

其中的边值条件

$$V_\nu(z)=0,\ \nu=1,\ \cdots,\ 2n-m$$

称为边值条件

$$U_\nu(y)=0,\ \nu=1,\ \cdots,\ m$$

的共轭边值条件。

若令