

彈性薄殼靜力學

А. И. 魯利叶 著

高等教育出版社

彈性薄壳靜力学

A. И. 魯利叶 著

范 摺 生 合 譯
包 世 华

高等数学

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的魯利叶(А. И. Лурье)所著“彈性薄壳靜力学”(Статика толстостенных упругих оболочек) 1947 年版譯出。

本書講述彈性薄壳小变形理論,是著者長期研究的成果,內容偏重于工程上最常用的旋轉薄壳及柱形薄壳。書中所述,深入淺出。在建立薄壳基本理論時,从一般彈性理論出發,詳盡地分析薄壳中各种因素的主次影响,从而忽略次要因素,建立合理的近似理論;因此,本書在薄壳基本方程式的建立及求解方面,有其独到之处。

本書可供土建类院校的高年級學生、科学工作者及有关工程技術人員作为研究薄壳理論的参考書。

彈性薄壳靜力学

А. И. 魯利叶著

范播生 包世华譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第 054 号)

京华印書局印刷 新华書店發行

統一書号 15010·721 開本 850×1168 $1/32$ 印張 8 $6/16$

字數 213,000 印數 0001—2,500 定價(10) 洋 1.30

1958 年 10 月第 1 版 1958 年 10 月北京第 1 次印刷

序

壳体理論是应用彈性理論中很現實的一部分。帶頂鍋爐、潛水艇外壳、渦輪鼓風機輪叶、大廈穹頂、炸彈外壳、蒸汽透平機的汽缸等等都是薄壳。所以我們并不奇怪，为什么在現代建筑与机械制造工程中，要把壳体視作結構的重要部分，并把主要任务歸結为壳体的計算問題。我們覺得，壳体所处的这种地位，就說明了需要有專門討論彈性薄壳靜力学的文献。壳体理論方面的文献非常丰富，書末所附的文献索引簡目并不完备，只不过是作者对之或多或少了解一些的而已。

作者并不企圖在本書中包羅一切有關的問題，比如我們就根本沒涉及到壳体的穩定性問題，但却保留了一章討論壳体一般理論的建立。最近一時期有許多苏联文献都是关于这一方面的。在所有大量壳体理論的素材中，我們決定只研究最簡單而实际上却是最重要的問題，即对称加载的旋轉壳体和任意加载的柱形壳体。我們將尽可能严格与完整地來講述这些素材。这里所謂“严格”，絕不是形式的精确，而是指結果所达到的精度与假設相适应。在这方面，我們的作法与習慣上常用的有很大区别，后者往往忽略了对建立基本微分方程式的原始情形进行討論，而过多地注意了寻求这些方程式的准确积分。我們所据的理由是，解的精度不应超过原始假設的精度。所以本書中广泛地应用了漸近积分法，并只取漸近展开式的第一項，这就使我們有可能得到一系列不太复杂的計算結果。

所以本書很大程度上是在爭取實現这一方向，力求在各种情況下避免使用不必要的超几何級数及其他的級数。

本書不管在壳体理論的理論問題方面还是实际計算方面，都

是作者長期艰苦劳动的結果，后者更是由于某些科学研究所和設計院的倡議，作者近年来所进行的工作，目的是使我們的設計工程师和科学工作者們得到的不是方案的彙編，而是各种方法的綜合，以帮助深入了解許多重要結構物主要部件計算問題的本質。

对本書有过帮助的同志，特别是工程师 A. К. 包杜諾夫(Бодунов)花費了許多精力来校核大部分計算，技术科学副博士 Г. Д. 阿南諾夫(Ананов)为本書作插圖，作者認為应对他們表示愉快而深刻的謝意。

作 者 1946 年 3 月

目 录

序	v
第一章 彈性旋轉壳体对称加载时的平衡方程式	1
§ 1. 旋轉面的几何要素	1
§ 2. 旋轉面的对称变形	6
§ 3. 旋轉壳体的几何关系与变形	9
§ 4. 旋轉壳体对称加载时的应力状态	13
§ 5. 壳体体素的静力学方程式	17
§ 6. 壳体体素的静力学方程式	19
§ 7. 变形与应力的关系	24
§ 8. 旋轉壳体对称加载时的基本微分方程式	29
§ 9. 薄壳理論基本微分方程式的积分·边界条件与联結条件	34
§ 10. 壳体理論齐次微分方程式的解的性質·壳体应力状态的特点	39
§ 11. 旋轉壳体中的温度应力	44
第二章 簡單几何形狀的壳体及其基本微分方程式的解	49
§ 1. 柱形薄壳对称加载时的平衡微分方程式	49
§ 2. 長圓柱形壳体的解	54
§ 3. 短圓柱形壳体的解	63
§ 4. 圓錐形壳体·非齐次微分方程組的特解	75
§ 5. 圓錐形壳体齐次方程式的解	79
§ 6. 圓錐形壳体的計算例題	91
§ 7. 圓球形壳体·非齐次微分方程組的特解	106
§ 8. 球形壳体齐次方程式的解	110
§ 9. 閉球形壳体問題的解	118
§ 10. 圓球形屋頂頂上加集中力	129
§ 11. 小初曲率的圓板	133
第三章 对称加载旋轉壳体基本微分方程式的近似解	143
§ 1. 經緯截面的三种形式	143
§ 2. 圓柱类壳体	147
§ 3. 圓錐类壳体	164
§ 4. 圓球类壳体	166

第四章 任意加载的柱形壳体.....179

§1. 柱面的几何要素及柱面的变形	179
§2. 壳体的变形	185
§3. 应力与变形的联系·壳体体素的平衡方程式	190
§4. 位移函数	197
§5. 双三角级数解法·柱形薄拱及柱形管	202
§6. 单三角级数解法·柱形管	209
§7. 柱形薄拱	224
§8. 复变数应力函数	233
§9. 圆柱面上孔边应力的集中	241

附录:

关于第一章	251
关于第二章	255
关于第三章	258
关于第四章	259

第一章 彈性旋轉壳体对称 加载时的平衡方程式

§ 1. 旋轉面的几何要素 为了說明以后应用的符号, 避免重复, 并使讀者不必查閱專門文献, 本节中將尽可能簡要地推証曲面理論的基本公式, 这些公式只适用于旋轉面的特殊情形。

將曲面的旋轉軸作为 z 軸, 并用單位向量 $\mathbf{k}$ 表示它的方向。曲面上任意一点 M 的位置(圖 1)可用以下三种方法来确定: 1) 用右手不动坐标系 $Oxyz$ 中的笛卡尔坐标 x, y, z , 坐标軸的正方向分别相应于單位向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; 2) 用圆柱坐标 ν, φ, z , 其中用 $\nu = \sqrt{x^2 + y^2}$ 表示由 M 点到旋轉軸的距离 $\overline{M_1M}$, 用 φ 表示通过 M 点及旋轉軸的平面(經綫平面)的方位角, φ 由 zx 平面向 zy 平面計量; 3) 用曲面上点的高斯坐标, 以同样的方位角 φ 及以沿經綫(由某一初始点 M_0 起算)的弧長 s 作为坐标: $s = \overline{M_0M}$ 。

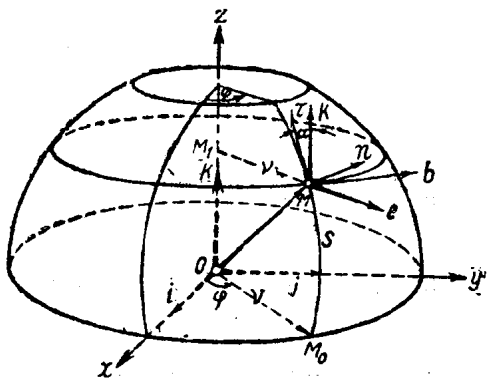


圖 1. 旋轉面上的坐标方向。

在这一坐标系中, 曲綫 $\varphi = \text{const.}$ 是曲面的經綫, $s = \text{const.}$ 是緯綫。

用 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ 表示曲面上 M 点的向徑:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (1.1.1)$$

注意到 $x = \nu \cos \varphi$, $y = \nu \sin \varphi$, 并引入 $\overrightarrow{M_1M}$ 方向的單位向

量:

$$\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \quad (1.1.2)$$

也可以写成: $\mathbf{r} = \mathbf{e}v + \mathbf{k}z, \quad (1.1.3)$

經綫方程可以写成参数式:

$$v = v(s), \quad z = z(s); \quad (1.1.4)$$

或直接关系式: $v = v(z). \quad (1.1.5)$

再引入互相正交的 $\mathbf{b}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$ 三軸所組成的三面体, 其頂点在 M ; 用 $\mathbf{b}$ 表示指向 φ 增加方向緯綫切綫單位向量, 用 $\boldsymbol{\tau}$ 表示指向 s 增加方向的經綫切綫單位向量, 用 $\mathbf{n}$ 表示曲面的法綫單位向量; 則有:

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}. \quad (1.1.6)$$

由于曲綫的切綫單位向量等于向徑 $\mathbf{r}$ 对弧長的导数, 而經綫的綫素为 ds , 緯綫的綫素为 $v d\varphi$, 故可得

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}.$$

以后我們約定: 用点 $(\cdot)$ 表示对 s 求导数, 用撇 $(')$ 表示对 φ 求导数, 則:

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{v} \mathbf{r}'. \quad (1.1.7)$$

由(1.1.3)得到:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e} \dot{v} + \mathbf{k} \dot{z}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}'. \quad (1.1.8)$$

用 α 表示向量 $\boldsymbol{\tau}$ 与 z 軸間的夾角, 則:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{e} \sin \alpha + \mathbf{k} \cos \alpha; \quad (1.1.9)$$

以之与(1.1.8)的第一式比較, 得到:

$$\dot{v} = -\sin \alpha, \quad \dot{z} = \cos \alpha. \quad (1.1.10)$$

这些公式确定了角度 α ; 若 M 点沿經綫往弧長 s (或坐标 z) 增加的方向移动, 則当 v 减少时 $\alpha > 0$, v 增大时 $\alpha < 0$, 并且 $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

設 $\tilde{\mathbf{n}}$ 是經綫主法綫的單位向量, $\frac{1}{\rho}$ 表示經綫的曲率, 按照

著名的富列耐公式,有:

$$\dot{\tau} = \frac{1}{\rho} \tilde{n}. \quad (1.1.11)$$

另一方面, $\tilde{n} = \varepsilon n$, 若經綫凹向 z 軸取 $\varepsilon = -1$, 若凸向 z 軸取 $\varepsilon = +1$ (圖 2, a 及 b); 由 (1.1.6) 及 (1.1.9) 得:

$$n = -(b \times e) \sin \alpha + (b \times k) \cos \alpha = k \sin \alpha + e \cos \alpha. \quad (1.1.12)$$

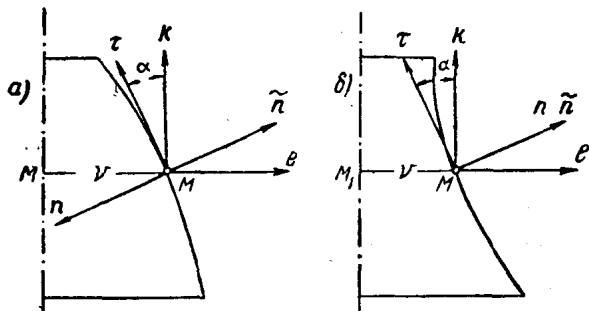


圖 2. 旋轉曲面的經綫截面:

a) 經綫凹向旋轉軸; b) 經綫凸向旋轉軸。

而由 (1.1.9) 及 (1.1.11):

$$\frac{\varepsilon}{\rho} n = -(e \cos \alpha + k \sin \alpha) \dot{\alpha}; \quad (1.1.13)$$

所以:
$$\dot{\alpha} = -\frac{\varepsilon}{\rho}, \quad \dot{\tau} = -\dot{\alpha} n. \quad (1.1.14)$$

現在對可動三面體施用機動法: 先假設, b, τ, n 三面體的頂點 M 以速度 $v = \tau$ 運動, 即以沿經綫的單位速度 ($ds = dt$) 運動; 此時三面體將以角速度 $\omega_1 = \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| = |\dot{\alpha}|$ 旋轉, ω_1 當上述第一種情形時 ($\varepsilon = -1$ 時) 與 b 反向, 第二種情形時 ($\varepsilon = 1$ 時) 指向 b ; 即:

$$\omega_1 = -b \dot{\alpha}. \quad (1.1.15)$$

如果再令 b, τ, n 三面體的頂點 M 以速度 $v = b$ 運動, 即以沿緯綫的單位速度 ($dt = v d\varphi$) 運動, 則三面體將以角速度 $\omega_2 = \frac{d\varphi}{dt} =$

$=\frac{1}{\nu}$ 旋轉, ω_2 指向 z 軸:

$$\omega_2 = \frac{1}{\nu} \mathbf{k}. \quad (1.1.16)$$

設 $\mathbf{a}$ 是一个与 $\mathbf{b}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$ 三面体保持不变关系的常向量; 当三面体作前述的运动时, 此向量对弧長的导数可視作向量端点相对于三面体頂点的速度; 按剛体运动学中著名的公式, 得到:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \omega_1 \times \mathbf{a}, \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\nu \partial \varphi} = \omega_2 \times \mathbf{a}$$

或 $\dot{\mathbf{a}} = -\dot{\alpha}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}), \quad \mathbf{a}' = \mathbf{k} \times \mathbf{a}. \quad (1.1.17)$

应用于向量 $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, 就得到旋轉曲面的基本偏导数公式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\tau}} &= -\dot{\alpha}(\mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}) = -\dot{\alpha} \mathbf{n}, & \boldsymbol{\tau}' &= \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{b} \sin \alpha, \\ \dot{\mathbf{n}} &= -\dot{\alpha}(\mathbf{b} \times \mathbf{n}) = \dot{\alpha} \boldsymbol{\tau}, & \mathbf{n}' &= \mathbf{k} \times \mathbf{n} = \mathbf{b} \cos \alpha, \\ \dot{\mathbf{b}} &= -\dot{\alpha}(\mathbf{b} \times \mathbf{b}) = 0, & \mathbf{b}' &= \mathbf{k} \times \mathbf{b} = -\mathbf{e} \\ & & &= \boldsymbol{\tau} \sin \alpha - \mathbf{n} \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.18)$$

現在来研究旋轉面上曲綫的曲率。在曲面上取一方向, 用与 $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}$ 兩軸成夾角分別为 λ 及 $\frac{\pi}{2} - \lambda$ 的單位向量 $\mathbf{l}$ 表示(圖 3):

$$\mathbf{l} = \boldsymbol{\tau} \cos \lambda + \mathbf{b} \sin \lambda. \quad (1.1.19)$$

曲面上与 $\mathbf{l}$ 正交的方向确定于單位向量:

$$\mathbf{m} = -\boldsymbol{\tau} \sin \lambda + \mathbf{b} \cos \lambda. \quad (1.1.20)$$

用 $d\sigma$ 表示 $\mathbf{l}$ 方向的綫素; 有

$$\cos \lambda = \frac{ds}{d\sigma}, \quad \sin \lambda = \nu \frac{d\varphi}{d\sigma}. \quad (1.1.21)$$

計算导数 $\frac{d\mathbf{l}}{d\sigma}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{l}}{d\sigma} &= \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} \cos \lambda + \frac{d\mathbf{b}}{d\sigma} \sin \lambda + (-\boldsymbol{\tau} \sin \lambda + \\ &\quad + \mathbf{b} \cos \lambda) \frac{d\lambda}{d\sigma} = \cos \lambda \left(\dot{\boldsymbol{\tau}} \cos \lambda + \boldsymbol{\tau}' \frac{\sin \lambda}{\nu} \right) + \\ &\quad + \sin \lambda \left(\dot{\mathbf{b}} \cos \lambda + \mathbf{b}' \frac{\sin \lambda}{\nu} \right) + \frac{d\lambda}{d\sigma} \mathbf{m}, \end{aligned}$$

利用偏导数公式(1.1.18), 得:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\sigma} = & -\left(\alpha \cos^2 \lambda + \frac{\cos \alpha}{\nu} \sin^2 \lambda\right) \mathbf{n} + \\ & + \left(\frac{d\lambda}{d\sigma} - \frac{\sin \alpha}{\nu} \sin \lambda\right) \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

我們来研究曲面的法截面, 也就是通过 l 及曲面的法綫 $\mathbf{n}$ 所引平面在曲面上截得的平面曲綫。交綫的主法綫向量 $\mathbf{n}^*$ 与曲面的法綫 $\mathbf{n}$ 共綫:

$\mathbf{n}^* = \varepsilon' \mathbf{n}$, 式中 $\varepsilon' = +1$ 或 -1 ; 若用 $\frac{1}{\rho_l}$ 表示法截綫的曲率, 那么按著名的富列耐公式:

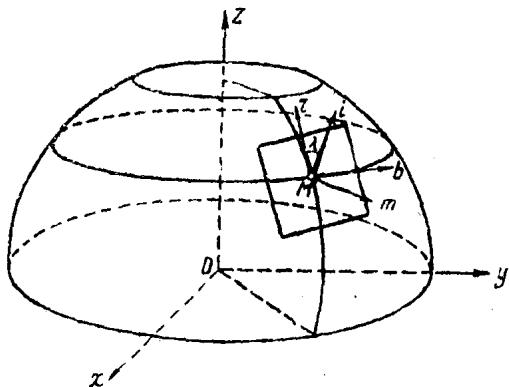


圖 3. 旋轉曲面的切平面及其上的方向。

$$\frac{dl}{d\sigma} = \frac{1}{\rho_l} \mathbf{n}^* = \frac{\varepsilon'}{\rho_l} \mathbf{n}. \quad (1.1.23)$$

同(1.1.22)比較, 求得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon'}{\rho_l} &= -\alpha \cos^2 \lambda - \frac{\cos \alpha}{\nu} \sin^2 \lambda; \\ \frac{d\lambda}{d\sigma} - \frac{\sin \alpha}{\nu} \sin \lambda &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.24)$$

这是曲面理論中著名的定則, 由其中第一式求得相应于 $\lambda=0$ (經綫) 及 $\lambda=\frac{\pi}{2}$ (緯綫) 的主法截面的曲率为:

$$\frac{1}{\rho_1} = -\varepsilon' \alpha, \quad \frac{1}{\rho_2} = -\varepsilon' \frac{\cos \alpha}{\nu}. \quad (1.1.25)$$

在第一式中, 当圖 2a 情形时取 $\varepsilon' = -1$, 而当圖 2b 情形时取 $\varepsilon' = +1$; 对于通过緯綫的法截面, 任何情形都取 $\varepsilon' = -1$ 。

量值:

$$\frac{1}{R_1} = \dot{\alpha}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \alpha}{\nu} \quad (1.1.26)$$

叫做曲面的主曲率, 显然当圖 2a 的情形时 ($\varepsilon' = -1$):

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\rho_1}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \alpha}{\nu},$$

当圖 2b 的情形时:

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{\rho_1}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \alpha}{\nu}.$$

最后, 順便提一下以后常用的公式:

$$\left(\frac{1}{R_2}\right)' = \left(\frac{\cos \alpha}{\nu}\right)' = -\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \frac{\sin \alpha}{\nu}, \quad (1.1.27)$$

此式由 (1.1.10) 及 (1.1.26) 推出。

§ 2. 旋轉面的对称变形

我們研究曲面保持为旋轉面时的变形。变形时, 曲面上的点仍然在原来的經綫平面內移动; 点的位移也都在各經綫平面內。

用 u, w 表示位移向量 $\mathbf{u}$ 在 $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$ 軸上的分量 (圖 4), 用 ξ, ζ 表示在 $\mathbf{e}, \mathbf{k}$ 軸上的分量; 按照所述, u 及 w 与 φ 无关, 并且 $\mathbf{u}$ 在 $\mathbf{b}$ 方向的分量等于零:

$$\mathbf{u} = u\boldsymbol{\tau} + w\mathbf{n} = \xi\mathbf{e} + \zeta\mathbf{k}, \quad (1.2.1)$$

变形后 M 点移到了 M' 位置, M' 确定于矢量半径

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + \mathbf{u}.$$

研究 $\mathbf{r}_*$ 沿变形后的曲面所作的無限小的移动:

$$d\mathbf{r}_* = d\mathbf{r} + d\mathbf{u} = (\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{u}})ds + (\mathbf{r}' + \mathbf{u}')d\varphi.$$

利用 (1.1.7) 和偏导数公式 (1.1.18), 以及 (1.1.26) 得:

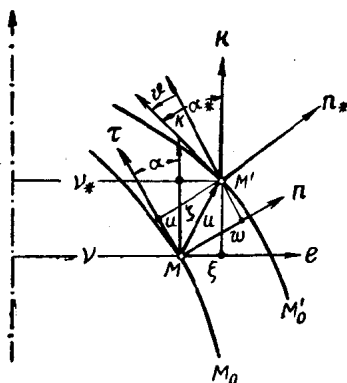


圖 4. 变形前后旋轉曲面的經綫截面:

M_0 — 变形前經綫;

M'_0 — 变形后經綫。

$$d\mathbf{r}_* = \boldsymbol{\tau} ds(1 + \varepsilon_1) + \vartheta \mathbf{n} ds + b\nu(1 + \varepsilon_2)d\varphi. \quad (1.2.2)$$

式中引用了符号:

$$\varepsilon_1 = \dot{u} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\nu}(-u \sin \alpha + w \cos \alpha), \quad \vartheta = \dot{w} - \frac{u}{R_1}. \quad (1.2.3)$$

特别是沿經綫移动时($d\varphi=0$), 得到:

$$d\mathbf{r}_* = \boldsymbol{\tau} ds(1 + \varepsilon_1) + \vartheta \mathbf{n} ds. \quad (1.2.4)$$

由此求得变形后經綫的弧長:

$$ds_* = |d\mathbf{r}_*| = \sqrt{(1 + \varepsilon_1)^2 + \vartheta^2} ds.$$

我們只研究微小的变形, 亦即假設 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vartheta$ 很小, 因而:

$$ds_* = (1 + \varepsilon_1)ds, \quad (1.2.5)$$

由此可見, ε_1 是变形时經綫綫素的伸長率; 当对 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vartheta$ 有相同的假設时, 我們就求得 $\boldsymbol{\tau}_*$ (变形后曲面經綫的切綫單位向量) 为:

$$\boldsymbol{\tau}_* = \frac{d\mathbf{r}_*}{ds_*} = \boldsymbol{\tau} + \vartheta \mathbf{n}. \quad (1.2.6)$$

当沿着緯綫移动时, $ds=0$ 并由 (1.2.2) 求得:

$$d\mathbf{r}_* = b\nu d\varphi(1 + \varepsilon_2); \quad (1.2.7)$$

由此可和上面同样地求得变形后緯綫的弧長:

$$\nu_* d\varphi = \nu d\varphi(1 + \varepsilon_2). \quad (1.2.8)$$

所以, ε_2 是緯綫綫素的伸長率, 变形后表面上的向量 $\mathbf{b}_*$ 为:

$$\mathbf{b}_* = \frac{\partial \mathbf{r}_*}{\nu_* \partial \varphi} = \mathbf{b}, \quad (1.2.9)$$

当然这是必然的結果。再求变形后曲面的法綫單位向量:

$$\mathbf{n}_* = \mathbf{b}_* \times \boldsymbol{\tau}_* = \mathbf{b} \times (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{n}\vartheta) = \mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}\vartheta. \quad (1.2.10)$$

公式 (1.2.10) 及 (1.2.6) 表明: 变形后經綫的切綫与曲面旋轉軸 z 間的夾角为:

$$\alpha_* = \alpha - \vartheta. \quad (1.2.11)$$

設以 $\left(\frac{1}{R_1}\right)^*$, $\left(\frac{1}{R_2}\right)^*$ 表示变形后曲面的主曲率; 由公式 (1.1.26) 有:

$$\left(\frac{1}{R_1}\right)^* = \frac{d\alpha_*}{ds_*}, \quad \left(\frac{1}{R_2}\right)^* = \frac{\cos \alpha_*}{\nu_*}. \quad (1.2.12)$$

由(1.2.11)及(1.2.5), 略去高阶微量, 得到,

$$\left(\frac{1}{R_1}\right)^* = \frac{d(\alpha - \vartheta)}{ds} \frac{ds}{ds_*} = \frac{1}{1 + \varepsilon_1} \left(\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\vartheta}{ds} \right) = \frac{1 - \varepsilon_1}{R_1} - \frac{d\vartheta}{ds}. \quad (1.2.13)$$

再由(1.2.11)及(1.2.8)求得:

$$\left(\frac{1}{R_2}\right)^* = \frac{\cos(\alpha - \vartheta)}{\nu(1 + \varepsilon_2)} = \frac{1 - \varepsilon_2}{R_2} + \frac{\vartheta \sin \alpha}{\nu}. \quad (1.2.14)$$

$$\text{量值:} \quad \kappa_1 = -\dot{\vartheta}, \quad \kappa_2 = \vartheta \frac{\sin \alpha}{\nu} \quad (1.2.15)$$

表示变形时曲面主曲率的改变量, 称之为曲率增量。

回到(1.2.1)式, 利用(1.1.12)求得

$$\xi = -u \sin \alpha + w \cos \alpha, \quad \zeta = u \cos \alpha + w \sin \alpha. \quad (1.2.16)$$

并由(1.2.3)的第二式, 最后求得简明的关系式:

$$\xi = \nu \varepsilon_2. \quad (1.2.17)$$

再将(1.2.1)对 s 求导数, 得:

$$\dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{e}\xi)' + (\mathbf{k}\zeta)' = (\boldsymbol{\tau}u + \mathbf{n}w)'.$$

利用偏导数公式(1.1.18), 以及(1.2.4), (1.1.9)和(1.1.12), 得到:

$$\dot{\xi} = -\varepsilon_1 \sin \alpha + \vartheta \cos \alpha, \quad \dot{\zeta} = \varepsilon_1 \cos \alpha + \vartheta \sin \alpha. \quad (1.2.18)$$

由此式的第一式和(1.2.17), 可得出对以后非常重要的, 三个(表明曲面变形的)量值 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vartheta$ 之间的关系为:

$$\begin{aligned} (\nu \varepsilon_2)' &= -\varepsilon_1 \sin \alpha + \vartheta \cos \alpha \quad \text{或} \quad \nu \dot{\varepsilon}_2 = \\ &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \alpha + \vartheta \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

按照给定的变形, 由公式(1.2.17)及(1.2.18)求得位移 ξ 及 ζ 为:

$$\zeta = \zeta_0 + \int_{s_0}^s (\varepsilon_1 \cos \alpha + \vartheta \sin \alpha) ds. \quad (1.2.20)$$

式中 ζ_0 是确定曲面位移的常数, 此位移不引起沿旋轉軸方向的变形。

§ 3. 旋轉壳体的几何关系与变形 前面我們用高斯坐标 s, φ 确定曲面上任意一点的位置 (§ 1), 現在由基本曲面鄰近空間的任意一点 N 向基本曲面作法綫綫段 $\overline{MN}$, 則 N 点的位置就能够由三个数值 s, φ, x 来确定, 此处 $x = \overline{MN}$ 或 $x = -\overline{MN}$, 完全决定于 N 点在基本曲面的那一面 (与法綫同向或是相反), s, φ, x 可看作 N 点的曲綫坐标。任一 $x = x_0 = \text{const.}$ 点的軌迹是一与基本曲面等距离的旋轉面 (平行曲面); 平面 $\varphi = \varphi_0 = \text{const.}$ 是所研究物体的一个經綫截面; 曲面 $s = s_0 = \text{const.}$ 是一个开角为 $2\alpha(s_0)$ (見 § 1) 的圓錐面, 圓錐頂点在旋轉軸上, 錐面与曲面 $x = \text{const.}$ 正交。界于两个曲面 $x = f_1(s), x = f_2(s)$ 及两个圓錐面 $s = s_0, s = s_1$ 間的物体称为壳体。当 $f_1 = -\frac{h}{2}, f_2 = \frac{h}{2} = \text{const.}$ 时是等厚度 (h) 壳体; 当 $f_1 = \frac{1}{2}h(s), f_2 = -\frac{1}{2}h(s)$ 时壳体厚度沿經綫截面变化; 这两种情形, 基本曲面都通过壳体内外界面的中央, 因之称为中間面。以后我們將研究具有中間面的壳体, 并將認為厚度 h 比起壳体的其他尺寸来是十分小的。

用 $\mathbf{R}$ 表示 N 点的向徑, 用 $\mathbf{r}$ 表示 M 点的向徑 (与 § 1 相同); 則有:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + n\mathbf{x}. \quad (1.3.1)$$

写出在曲綫坐标 s, φ, x 中表示綫性綫素長度平方的式子: $d\sigma^2 = |d\mathbf{R}|^2$ 。由公式 (1.1.7), (1.1.8) 得到:

$$d\mathbf{R} = \tau \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) ds + \nu b \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) d\varphi + n dx, \quad (1.3.2)$$

$$\text{所以} \quad d\sigma^2 = \left(1 + \frac{x}{R_1} \right)^2 ds^2 + \left(1 + \frac{x}{R_2} \right)^2 \nu^2 d\varphi^2 + dx^2. \quad (1.3.3)$$

特别是曲面 $x = \text{const.}$ 的經綫和緯綫的綫素分別为:

$$d\sigma_1 = \left(1 + \frac{x}{R_1} \right) ds, \quad d\sigma_2 = \left(1 + \frac{x}{R_2} \right) \nu d\varphi. \quad (1.3.4)$$

还要注意到, 若用 $\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}$ 分别表示曲面 $x = \text{const.}$ 的經綫、緯綫的切綫方向和法綫方向的單位向量, 那么:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma_1} = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma_2} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{n}, \quad (1.3.5)$$

这是很显然的几何关系。

进而研究旋轉壳体的对称变形; 变形时壳体上任一点的位移可写成:

$$\mathbf{U} = U\boldsymbol{\tau} + W\mathbf{n}, \quad (1.3.6)$$

式中 U, W (为 s 及 x 的函数, 与 φ 无关) 是位移 $\mathbf{U}$ 在 $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$ (或 $\mathbf{T}, \mathbf{N}$) 方向的分量。 $\mathbf{U}$ 在 $\mathbf{b}$ (或 $\mathbf{B}$) 方向的分量为零。

为了求得表明壳体变形情况的数值, 同从前一样, 必须先建立变形后壳体上的綫素 $d\sigma_*$ 的表达式。变形后 N 点的向徑为:

$$\mathbf{R}_* = \mathbf{R} + \mathbf{U}, \quad (1.3.7)$$

因之, 利用(1.3.2)及偏导数公式(1.1.18), 求得:

$$\begin{aligned} d\mathbf{R}_* = d\mathbf{R} + d\mathbf{U} = & \boldsymbol{\tau} \left(1 + \frac{x}{R_1}\right) ds + \nu \mathbf{b} \left(1 + \frac{x}{R_2}\right) d\varphi + \\ & + \mathbf{n} dx + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{n}\right) dx + \left[\left(\dot{U} + \frac{W}{R_1}\right) \boldsymbol{\tau} + \right. \\ & \left. + \left(\dot{W} - \frac{U}{R_1}\right) \mathbf{n}\right] ds + (-U \sin \alpha + W \cos \alpha) \mathbf{b} d\varphi. \end{aligned}$$

引入符号:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{1 + \frac{x}{R_1}} \left(\dot{U} + \frac{W}{R_1}\right), & e_2 &= \frac{-U \sin \alpha + W \cos \alpha}{\nu \left(1 + \frac{x}{R_2}\right)}, \\ e_3 &= \frac{\partial W}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.8)$$

利用(1.3.4), 得到:

$$\begin{aligned} d\mathbf{R}_* = & (1 + e_1) \boldsymbol{\tau} d\sigma_1 + (1 + e_2) \mathbf{b} d\sigma_2 + (1 + e_3) \mathbf{n} dx + \\ & + \frac{\partial U}{\partial x} \boldsymbol{\tau} dx + \frac{1}{1 + \frac{x}{R_1}} \left(\dot{W} - \frac{U}{R_1}\right) \mathbf{n} d\sigma_1. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$