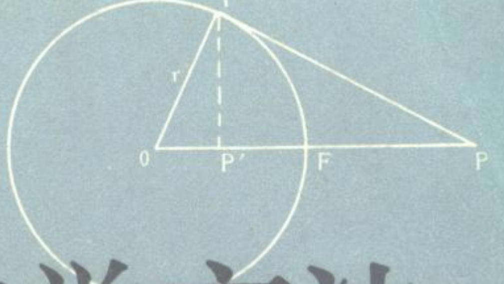
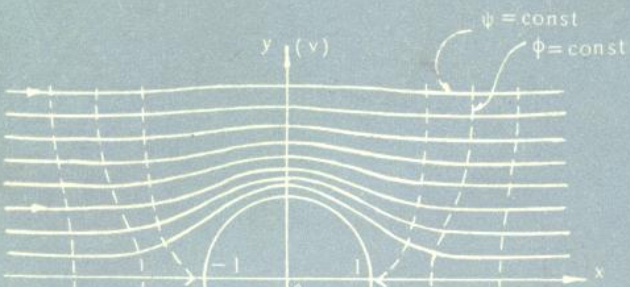
欧阳首承



应用数学方法



气象出版社

应 用 数 学 方 法

欧阳首承　李贤琅

内 容 简 介

本书共分两篇，第一篇为基础应用数学，内容包括应用微积分、级数、傅立叶级数、线性代数、场论及常微分方程。着重于数学概念及方法的应用，比较简明扼要，附有例题，易于自学，并为进一步学习第二篇提供基础知识。第二篇为数学物理方法，内容包括复变函数、拉普拉斯与傅立叶变换、数学物理方程（包括非线性方程解法简介）及特殊函数等。其中以数学物理方程的解法为中心并包括应用数学方法的主要内容。

本书可供气象台站技术人员学习，其中第二篇可试作有关院校气象及相应专业的教材或教学参考书；也可供其他专业高年级学生、研究生、教师或水文气象、水利、海洋等应用科学领域的技术人员参考。

应用数学方法
欧阳首承　李贤琅
*
气 象 出 版 社 出 版
（北京西郊白石桥路46号）
北京印刷一厂印刷　新华书店北京发行所发行
*
开本：850×1168 1/32　印张：20.75　字数：550 千字
1984年3月第一版　　1984年3月第一次印刷
印数：1—20,000　　统一书号：13194·0106
定价：4.55 元

前　言

随着现代科学技术的进展，数学在各个领域中得到愈来愈广泛地应用，并且出版了许多专门的著作。但对于从事应用科学或技术工作的人员来说，目前已经不可能有时间或精力在学习这些著作之后再从事实际应用问题的研究，更需要的往往是运用数学的概念和方法解决实际问题。这就导致“数学方法”作为一门课程而出现，并已成为自然科学及工程技术工作者的必不可少的基础知识。

在这种情况下，“数学方法”的内容，既是数学，而又不同于纯数学。不能使读者在数学理论上花更多的精力，但也不能省去必要的条件和理论上的证明，以致妨害基本概念的理解和运用。鉴于大气运动的复杂性，且有很多实质性问题尚待解决，气象业务工作者的日常工作也不得不与探索性的研究相结合。所以，一定程度的逻辑思维训练是必要的。

本书是根据六十年代初及一九七六年以来，先后给工业部门工程技术人员学习班与一九八〇年我院气象系有关人员的讨论班讲授《数学物理方法》的讲稿改写而成。一九七六年以前不包括“基础应用数学”部分，即本书的第一篇。在一九七六年以后讲授时遇到新的情况：一是不少工程技术人员对以前学过的数学概念及其应用已有不同程度的荒疏，而新参加工作的同志学过的内容又较少，对直接学习《数学物理方法》感到困难，要求对基础部分进行重点、扼要地补课，并照顾到初学者的实际水平，使他们能在较短时间内掌握必要的基本概念，于是补充了本书的第一篇内容。虽然也涉及一些方法的运用，但主要是为第二篇提供基础知识。我们的实践证明，既使是对于有一定程度的人员，按本书第一篇的内容进行系统地复习是必要的；初学者也能在此基础上进一步学习第二篇内容而不感到太大的困难。

另一方面是近十几年来各个学科均有新的进展，要求在教材内容上有所反映，尤其是针对气象科学的特点也要求教材有其相应的特色，所以对原来讲稿中的大部分章节都进行了调整，删去了一些涉及结构计算的例题，增加了一些新的内容，调整了讲述方法。例如，波动方程的推导一般都是从古典的泰勒(Taylor)弦振动方程讲起，这与大气运动联系是不直接的，因为对于宏观流体来说不存在切应力，所以本书的波动方程是按"小扰动法"推演的(为了照顾其他专业也附有古典的推导方法)。再如，积分变换方法是解微分方程的有力工具，应用较广泛，本书中较详细地介绍了这一方法。此外，在数理方程这一课程中，线性方程研究得比较透澈，但描述大气运动的方程式则是非线性(严格地讲是拟线性)的。尽管非线性方程的理论尚在探索中，但非线性方程某些解法的介绍是必要的。所以，我们单列为一章，其中简单地介绍了函数变换法、摄动法与孤立子等基本概念。当然，由于篇幅的关系，这部分内容显得单薄些，目的是使读者加深对流体运动特点的认识和对这一问题探索的兴趣。因为这对揭示不同尺度大气运动相互作用的实质是有价值的。

目前广大气象台站的工作人员为适应工作的需要，感到在数学上有继续进修的必要，需要一套简明扼要、针对性较强的书籍。所以，我们的目的之一是希望本书在这方面对读者有所帮助。

为使自学的读者能顺利地阅读本书并有所收获起见，提下述建议，以供参考：

在掌握第一篇主要内容的基础上，可通读第二篇各章节的主要内容，遇到疑难可不急于解决，在通读后结合本书的前后联系，再逐个钻研每个问题。其中带 * 号的各章节，初学者可以不读。

本书的第一篇主要是为在职的工作人员(或自学者)而写的，可试作业余学习的教材，并可在此基础上进一步学习第二篇的内容(如配合教师讲授，也会在较短时间内掌握第二篇的内容的)；若第二篇试作有关院校的教材，可视具体情况作适当的删减。作为一学期的课程，第一篇可作为教学参考书，不必讲授。

本书第一篇线性代数一章改用李贤琅的讲稿并由其本人改写，其余各章均取自欧阳首承的讲稿并进行了改写和整理。在讲稿形成过程中，曾参阅有关中外文献和教材。限于篇幅，恕不一一列出。

本书初稿完成后，由兰州大学数学系陈庆益教授审查全部书稿，并提出宝贵意见，对此表示衷心感谢。另外，对养繇慧敏同志协助绘制书中大部分附图及出版社编辑同志在本书叙述方面所作改进，一并致谢。

由于水平所限，本书无论是在章节的安排上、内容及其取舍方面可能存在不少缺点和错误，希望读者给予批评指正。

欧阳首承　李贤琅

1981年2月于成都气象学院

目　录

第一篇　基础应用数学

第二篇 数学物理方法

第　一　篇

基础应用数学

第一章 微 分 学

微积分是数学的一个分支，在科学技术领域中有着广泛的应用。它出现于十七世纪，主要由 S·I·牛顿（Newton）和 G·W·莱布尼兹(Leibniz)所创立。

微分学使确定变量瞬时变化率的方法得到发展。例如，计算瞬时速度，就不能象计算平均速度那样简单地用运动时间去除移动距离，而须把时间区间趋于零取极限。此外，求曲线的切线问题，求函数的极大、极小值等问题也都可借助微分学而得到解决。微分学已十分广泛地应用于科学技术的许多部门。

§1 函数的极限与函数的连续性

函数 函数是数学分析所研究的主要对象。我们在代数中已经接触过函数的概念，只不过那时不作为主要对象来提出。这里我们给出函数的定义，即

在某一变化过程中，设有一对变量 x 和 y，如果对于 x 在其定义域内所取的每一个值，y 按照确定的法则有一(多)个确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数。并且 x 称为自变量，y 称为函数或因变量，记为

$$y=f(x),\ y=F(x),\ y=\varphi(x),\ \cdots 等.$$

在函数定义中，很重要的一点是：自变量 x 在数轴的某一部分上取每一数值时，函数 y 都具有确定的值。

数轴上使函数有定义的一切点的全体，叫做函数的定义域。

函数的极限 我们先分析实变量 x 的函数 $f(x)$ 当 x 趋于一个特定实数 a 时的变化情况，其中 $f(x)$ 是任意函数，在 a 处 $f(x)$ 可以是连续的，也可以是不连续的，可以取任一给定的值，也可以根本没有定义。然而，在 x 趋于 a 时，$f(x)$ 却可能有一个确定的值，若这个确定的值满足下述定义，我们称其为 $f(x)$ 的极限：

当且仅当对任一正实数 ε，存在一正实数 δ，使得 $0<|x-a|$

$<\delta$ 时，$f(x)$有定义且$|f(x)-A|<\varepsilon$(A 为常数)，则 A 叫做当 x 趋近于 a 时 $f(x)$的极限。

其中，“x 趋近于 a”一般以“$x\to a$”表示，而极限则记为

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \quad 或 \quad \underset{x\to a}{f(x)}\to A \tag{1.1.1}$$

并读为“$f(x)$当 x 趋近于 a 时的极限等于 A”，而数 δ 则和 ε 有关，一般说来，是随 ε 的减小而减小。

例如　证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$

证　$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|$，为了使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，只须

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，可见当 x 适合不等式 $0<|x-1|<\delta$ 时，函数值就适合不等式

$$|f(x)-1|<\varepsilon$$

再如求 $x\to 1$ 时函数$\dfrac{1-x}{1-x^2}$的极限。当 $x=1$ 时，函数$\dfrac{1-x}{1-x^2}$没有定义，但它的极限存在与否却与之无关。我们可假定 $x\neq 1$，并约去分子分母的公因子$(x-1)$：

$$\frac{1-x}{1-x^2}=\frac{1-x}{(1-x)\cdot(1+x)}=\frac{1}{1+x}$$

令 x 与 1 只相差一个很小的量 δ，则$\dfrac{1}{1+x}$与$\dfrac{1}{2}$也只相差一个很小的量 ε，我们可以通过缩小 x 与 1 的差来缩小$\dfrac{1}{1+x}$与$\dfrac{1}{2}$的差，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}=\frac{1}{2}$$

必须指出，当 x 由左侧趋近于 a 时，若函数 $f(x)$的极限存在，该极限就叫做函数 $f(x)$当 $x\to a$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ 或 } f(a-0)$$

类似地，当 x 由右侧趋近于 a 时，若函数 $f(x)$ 的极限存在，则叫做函数 $f(x)$ 的右极限，记为：

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ 或 } f(a+0)$$

据后面的(1.1.2)、(1.1.3)式，容易证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时极限存在的必要且充分条件是左极限与右极限各自存在并且相等，即

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)$$

由此可知，即使 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 存在，若不相等，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 仍不存在。

某些函数当 $x\to\infty$ 时，也有确定的值，若其值满足下述定义，则也称之为 $f(x)$ 的极限。

当且仅当对任一正实数 ε，存在一正实数 N，使得当 $x>N$ 时 $f(x)$ 有定义且 $|f(x)-A|<\varepsilon$，就说 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 收敛于极限 A。

例如，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2}{2x^3-x+1}$，当 $x\to\infty$ 时，函数变为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的形式，但我们可将分子分母同除以 x^3，然后再来分析当 $x\to\infty$ 时函数的变化情况：

$$\frac{4x^3-x^2}{2x^3-x+1}=\frac{4-1/x}{2-1/x^2+1/x^3}$$

显然，当 x 值越大，$1/x$，$1/x^2$ 与 $1/x^3$ 越小。所以，当 x 是一个很大的数 N 时，函数 $f(x)$ 的值与 $\dfrac{4}{2}=2$ 只相差一个很小的量，若 x 大于 N，则其差会更小，于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2}{2x^3-x+1}=2$$

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $x\to a$ 时都有极限而 a 是有限的数或 ∞，则有下述定理成立：

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x) \tag{1.1.2}$$

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x) \tag{1.1.3a}$$

在(1.1.3 a)中取 $g(x)=k$（常数），则

$$\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x) \tag{1.1.3b}$$

若 $\lim g(x)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)} \tag{1.1.4}$$

上述各式可以用来求数列及函数的极限，

例如，计算 $e=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

解　利用二项式定理展开函数。

$$(1+x)^{1/x}=1+1+\frac{1}{2!}(1-x)+\frac{1}{3!}(1-x)(1-2x)+$$

$$+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots[1-$$

$$-(n-2)x]+\cdots$$

利用(1.1.2)，(1.1.3 b)式，有

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=2+\lim_{x\to 0}\frac{1}{2!}(1-x)+\lim_{x\to 0}\frac{1}{3!}(1-x)(1-2x)+$$

$$+\cdots=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=2.7183\cdots=e^{*}$$

定理　若对于含 $x=a$ 的某个区间内的所有 x 值（$x=a$ 本身可以除外），$f(x)\geqslant g(x)$ 与 $f(x)\leqslant h(x)$ 均成立，当 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$ 时，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$。

* e 为无理数，取其小数十五位为 $e=2.718281828459045\cdots$

运用这一定理，可证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

其中 x 为以弧度表示的角，在图(1.1.1)的单位圆内作弦 $\overline{AB}$，取 x 为 $\widehat{AB}$ 所对应的圆心角的一半，则直线 $\overline{AB}=2\sin x$，而弧 $\widehat{AB}=2x$，由 A，B 两点作圆的切线 $\overline{BC}$ 与 $\overline{AC}$ 交于圆外一点 C，由于

$$\overline{AC}+\overline{BC}=2\operatorname{tg}x$$

且 $\overline{AB}<\widehat{AB}<\overline{AC}+\overline{BC}$，于是

$$2\sin x<2x<2\operatorname{tg}x$$

将此不等式同除以 $2\sin x$，取倒数，得

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

当 $x\to 0$ 时，$\cos x$ 的极限是 1，于是得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

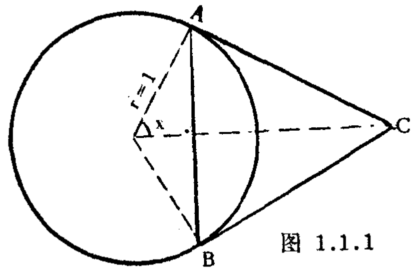


图 1.1.1

函数的连续性　在前面我们提到函数的极限时，并没有要求 $f(a)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}f(a)$ 一定相等，但对于连续函数而言，则要求 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $f(a)$ 相等。

函数在某一点连续的定义为：

若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内处处有定义，当且仅当对任一正实数 ε，存在一正实数 δ，使 $|x-a|<\delta$ 时 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续。类似地，对于多元函数，则相应的定义是：当且仅当多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的某个邻域内处处有定义，且 $x_1\to a_1$，$x_2\to a_2$，$\cdots$，$x_n\to a_n$ 时函数的极限等于 $f(a_1, a_2, \cdots a_n)$，则称函数 $f(x_1, x_2\cdots, x_n)$ 在点 $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ 连续。当且仅当函数在某点集*

* 集的概念可参看第二篇第一章。

的每一点连续，则称函数在该点集上连续。

连续函数（也称场函数）是微积分学的基本研究对象，物理学以及工程技术中的许多实际问题，都是以函数的连续性假定为基础的，在判断一个函数是否连续时，除了上述定义外，尚涉及下面一些定理：

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和，差、积均在 $x=a$ 处连续；当 $g(a)\neq 0$ 时，则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 也在 $x=a$ 处连续。

若函数 $f(x)$ 为多项式，即 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则 $f(x)$ 对 x 的所有值都是连续的。

若 $f(x)$ 是有理函数，即两个多项式的商 $\frac{g(x)}{h(x)}$，除了使 $h(x)=0$ 的点 x 之外，$f(x)$ 对 x 的其它所有值都是连续的。

若 $f(x)$、$g(x)$ 均为 x 的连续函数，则其复合函数也是连续的。如，

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

此外，连续函数的基本性质可概括为：

若函数 $f(x)$ 在闭区间（对开区间或有间断点情形，此性质不成立）上连续，则 $f(x)$ 必在此区间上有最大值和最小值，且对最大值与最小值之间的任一值 K，闭区间内至少存在一点 c，使 $f(c)=K$（图 1.1.2 中，有三点使 $f(c)=K$）。若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在区间中某处有 $f(\xi)=0$（图 1.1.3），即若一条连续曲线在区间的一部分位于 x 轴上方，在区间的另一部分位于 x 轴的下方，则在该区间内曲线必与 x 轴相交。

函数的不连续点　由函数 $f(x)$ 在点 a 为连续的定义，可知若函数 $f(x)$ 有下列情况之一：

1）在 $x=a$ 没有定义；

2）虽在 $x=a$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在；

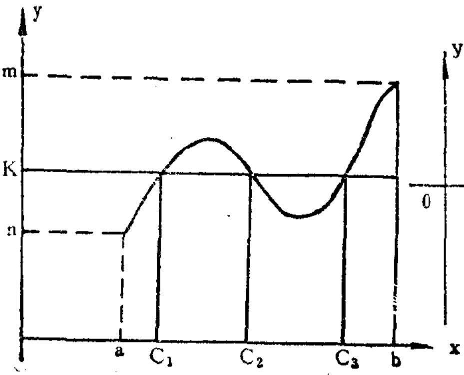


图 1.1.2

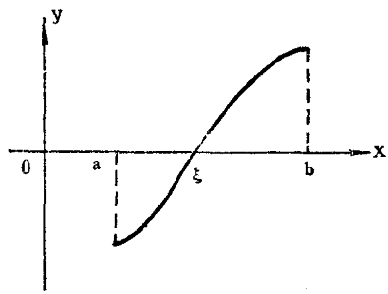


图 1.1.3

3) 尽管 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在，但不等于$f(a)$。

则函数在$x=a$不连续，而点a叫做函数$f(x)$的间断点或不连续点。

例如，函数$\frac{1}{x}$，在$x=0$没有定义，所以在$x=0$是不连续的；函数 $\sin\frac{1}{x^2-1}$，当$x=\pm1$时也是不连续的。而函数$(-1)^x$虽在$x=0$有定义，但在0的邻域内，却存在使$(-1)^x$无意义的点，这是由于函数$(-1)^x$一会取值1，一会又可取值-1。

顺便指出，不连续点又分第一类间断点和第二类间断点。所谓第一类间断点，是指下面三种情况的间断点：

函数的左极限$f(a-0)$与右极限$f(a+0)$均存在，但$f(a-0)\neq f(a+0)$；$f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$；$f(a-0)=f(a+0)$，而$f(a)$不确定。

上述情况以外的间断点均称第二类间断点；例如$f(x)=\frac{1}{x^2}$，在$x=0$无定义，是函数的无穷的不连续点，即$\lim\limits_{x\to0}1/x^2=+\infty$。

若函数$f(x)$当$x\to a$时极限存在，但在$x=a$处没有定义，