现代数学丛书

计算几何

苏步青 刘鼎元 著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

计 算 几 何

苏步青 刘鼎元 著

（复旦大学数学研究所）

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是现代数学丛书中的一种，系统地介绍了计算几何中几种主要的数学方法，大部分是作者几年来在这个领域中的研究成果。内容包括绪论，样条函数，三次参数样条曲线，Bézier 曲线和 B 样条曲线，样条曲面，非线性样条曲线，曲线和网格的光顺和高维仿射空间参数曲线的内在仿射不变量等八章。本书供高等学校数学系高年级学生、研究生及这方面的数学工作者、科技人员参考。

现代数学丛书

计　算　几　何

苏步青　刘鼎元　著

（复旦大学数学研究所）

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海海峰印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 9.5　字数 233,000

1981 年 1 月第 1 版　1981 年 1 月第 1 次印刷

印数 1—12,300

书号：13119·909　　定价：(科五) 1.40 元

目　录

第一章 绪　　论

§1 什么是"计算几何"?它是从哪里产生的?

在造船工业、航空工业和汽车制造工业中经常遇到几何外形设计问题.比方说,当设计者对于船体的肋骨线进行设计时,他必须根据平面上若干个点画出一条曲线进行贴近拟合;当制造汽车时,先做一个手塑粘土模型,然后把模型的各块曲面分成曲线网进行设计,如此等等."计算几何"这个术语最初是由 Minsky 和 Papert (1969) 作为模型识别的代用词被提出来的,到了 A.R. Forrest (1972) 才有了正式的定义:"对几何外形信息的计算机表示、分析和综合".几何外形信息是指那些确定某些几何外形如平面曲线或空间曲面的型值点或特征多角形,船体数学放样中所用的样条曲线在各端点的几阶函数导数值就是样条曲线的信息.我们按照这些信息作出数学模型(如曲线的方程),通过电子计算机进行计算,求得足够多的信息(如曲线上许许多多的点),就是所谓计算机表示,然后对它们进行分析和综合(如:研究曲线段上会不会出现二重点或尖点,有没有多余的拐点,等等).这个研究内容形成了计算几何.因此,它同所谓"CAGD"(Computer Aided Geometrical Design)即"计算机辅助几何设计"有密切关系.它是一门新

兴学科——由函数逼近论、微分几何、代数几何、计算数学特别是数控(NC)等形成的边缘学科.

§2 曲线和曲面的拟合和光顺问题

在计算几何中研究的对象是曲线(主要是平面曲线)和曲面.一般为了便于设计几何外形,我们通常把曲面分成若干小块,使块与块之间的边界都是平面曲线而且每块的四周边界在 xy 平面上形成一个矩形. 这样,除了曲面块在各条边界线和各角落的接触和光滑问题而外,我们研究的对象基本上集中到平面曲线的拟合和光顺问题. 因此,插值和逼近技巧经常被我们利用到曲线和曲面去. 举个例子来说:在 xy 正交坐标系下,给定若干个型值点时,通过这些点引一条曲线,使我们从这曲线的方程可以算出曲线上型值点以外的点,这就是插值. 另一个方法是,引一条曲线,它不一定要通过型值点,但是要使它上面对应于各型值点的纵标与型值点纵标的差方和变为极小. 这就是最小二乘方的逼近法. 当然,此外还有其他逼近法.

然而,几何外形的各种性质却不同于函数的性质,而且一些常用的函数插值和逼近技巧未必都是适用的. 比方说,外形是与坐标系的选取无关的东西,就是说,无论我们怎样选取坐标系的位置,几何外形(例如:曲线的形状包括弯曲、奇点、拐点等)总是不会改变的. 然而把曲线和曲面表示出来的函数——例如在 xy 坐标系下,用 $y=f(x)$ 这个函数来表示,恰恰要牵涉到坐标系的选取,就是说,不同的坐标系有不同的函数表示. 不但如此,即使在选好的坐标系下,能不能用计算机算出曲线上许许多多点的坐标 y 来,还是一个问题. 这里就产生了贴近拟合技巧,用简单的函数例如 x 的 n 次多项式代替一般函数 $f(x)$. 这样,我们才能通过计算机而按需要算出足够多的点来. 然后,用绘图机画出一条曲线 C_n 作

为所要的几何外形. 有时, 给定了一个特殊外形, 例如一条圆弧. 在这种场合, 我们当然可以利用方便的拟合技巧, 但是一般地说来, 我们要求的是一种在允许的范围内可以接受的贴近拟合, 它既保持着曲线或曲面的本性而又是光滑的或光顺的. "光滑", 就曲线说来, 是指切线方向的连续性, 或者更精密地指曲线曲率的连续性. "光顺"是指曲线的拐点不能太多, 拐来拐去, 就不顺眼了. 怎么办? 我们先就小挠度曲线的拟合和光顺问题进行分析和综合工作.

所谓"小挠度曲线"是指所论的曲线段在各点的斜率 (即切线和 x 轴的交角的正切) 的绝对值小于 1 的情况. 此时, 曲线 $y=y(x)$ 在点 (x, y) 的曲率半径 $R(x)$ 是由 $1/y''(x)$ 来代替——这件事成了样条曲线论的基础. 多年来, 设计者为了在特定的两点间放样一条光滑的曲线, 通常使用细长木条或塑料长薄条, 称样条, 它的作用相当于"万能"曲线板. 这些薄条或样条上各处加若干个"鸭铁"即铅压铁, 使样条通过那些特定点. 如果把设计者的样条看作薄梁, 那末 Bernoulli-Euler 法则

$$M(x)=EI[1/R(x)]$$

成立. 式中 $M(x)$ 是弯矩, E 是扬氏模数, I 是几何惯性矩, 而且 $R(x)$ 是弹性曲线 (即梁的变形轴形成的曲线) 的曲率半径. 在小挠度的场合, 我们有

$$y''(x)=(1/EI)M(x).$$

然而各鸭铁实质上是起着简单支点的作用, 所以 $M(x)$ 在两鸭铁位置之间的变化是线性的. 因此, 我们在每相邻两型值之间得到三次曲线段 C_3. 如果把这样 n 段 C_3 连接起来, 使两相邻曲线在连接处 (叫节点) 的斜率和曲率各各相等, 那末我们获得 n 段 C_3 合并成的整条曲线, 就是三次样条曲线 (Spline). 这方法同上述最小二乘方法不一样, 是所谓"点点通过"的方法.

§3 大挠度曲线的拟合和光顺问题

前节所述的方法不适用于大挠度曲线的场合，比如：船艏型线就是一例．这时，如果我们仍须沿用三次样条曲线进行拟合，那末势必对于每个分段采用各一个坐标系，从而必须把一个坐标系变换到邻接的坐标系去，这样做非常复杂费力．在这样的情况下，我们采用参数样条曲线来代替前节的所谓“简单”样条曲线．举例来说，把曲线段的参数方程写成参数 t 的三次多项式：

$$(E_3)\qquad \begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \frac{1}{2!}a_2 t^2 + \frac{1}{3!}a_3 t^3, \\ y &= b_0 + b_1 t + \frac{1}{2!}b_2 t^2 + \frac{1}{3!}b_3 t^3. \end{aligned}$$

式中，我们不妨假定 $0 \leqq t \leqq 1$，因为在两端点的参数值分别为 t_1 和 t_2 的一般情况下 $(t_1 < t_2)$ 只须作参数变换

$$t \to \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

就可达到目的．

容易看出：要确定各系数 a_i, b_i $(i=0, 1, 2, 3)$，我们仅须预先定下 $x(0)$, $x'(0)$; $x(1)$, $x'(1)$; 以及 y 的对应值就够了．此地顺便指出，当曲线 (E_3) 在两端点的切线方向被预先给定时，我们在选取 $x'(j)$, $y'(j)$ $(j=0, 1)$ 中还允许有下列的变换：

$$(T)\qquad \begin{aligned} &\left.\begin{aligned} x'(0) &\to \lambda x'(0), \\ y'(0) &\to \lambda y'(0); \end{aligned}\right\} \quad (\lambda > 0) \\ &\left.\begin{aligned} x'(1) &\to \mu x'(1), \\ y'(1) &\to \mu y'(1). \end{aligned}\right\} \quad (\mu > 0) \end{aligned}$$

参数方程 (E_3) 表示了一条三次代数曲线，因为它同直线 $ax + by + c = 0$ 相交于三点（包括虚点）．它具有一个奇点（二重点或尖点），就是特征．在拟合中必须注意奇点会不会在所论的一段曲线

上出现的问题. 如果奇点出现，我们就要适当采取变换 (T) 中的参数偶 (λ, μ)，以改变我们的拟合，使二重点或尖点不在 $0 \leqq t \leqq 1$ 区间里就可以. 这相当于调整曲线段在各端点的切线向量长度.

另一方面，我们还要检查这个曲线段有没有拐点. 为此，首先对 (E_3) 中的参数 t 的取值不加任何限制，因而所考察的不是曲线段而是整根曲线，然后再对各种插值曲线段进行拐点的检查. 实际上，曲线的拐点方程是

$$pt^2 - 2qt + 2r = 0,$$

式中 $(p, q, r) = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$.

显然，这个方程对于仿射变换是不变的，所以各系数之比都是仿射不变量. 但是，p, q 和 r 对于参数 t 的线性变换

$$t = c\bar{t} + f \qquad (c \neq 0)$$

都要改变. 从此导出：在 $p \neq 0$ 的假定下①，

$$I = \left(\frac{q}{p}\right)^2 - 2\frac{r}{p}$$

是权为 -2 的相对不变量，它的重要性在于：

1. 当 $I > 0$ 时，曲线有两个实拐点；
2. 当 $I = 0$ 时，曲线上出现一个尖点；
3. 当 $I < 0$ 时，曲线上出现一个二重点.

在第1种即 $I > 0$ 的情况下，整条曲线固然要有两个实拐点，但是这两拐点不一定在所论曲线段上出现. 这里分为两种场合. 首先假定曲线段在两端点的曲率是异符号. 那末，曲线上不可避免地要出现一个拐点. 例如船艏型线的上段就是这样. 其次，假定曲线段在两端点的曲率是同符号. 在 p, q, r 满足某些条件下，曲线段就有两个实拐点，我们称之为多余的拐点.

为了实现光顺的目的，我们必须找出一种消除多余拐点的插值法. 为此，在不改变曲线段在两端点的切线方向的条件下，把各

① 如果 $p=0$，曲线变为"简单"样条曲线.

切线向量模分别改为 λ 倍和 μ 倍 $(\lambda, \mu>0)$. 在 (λ, μ) 平面第一象限里，我们找到了一个矩形区域 R 即所谓正则区域，使对于 R 的点 (λ, μ) 所作的三次参数样条曲线段，既无多余的拐点，又无尖点和二重点.

§4 Bézier 曲线及其拓广

S. A. Coons、穗坂衛等作出的曲线和曲面的合成理论在实际中得到应用，但是要在连接合成中把全部连接条件规定下来，必然会引起错综复杂的情况. P. Bézier (1968) 因此设计出一种方法，使我们用一个式子表达全体的同时，还能容易进行外形控制.

Bézier 曲线是用了所谓特征多角形 $P_0P_1\cdots P_n$ 的折线 $\{P_i\}$，使曲线在两端同折线两端直线段相切，而中间的形状则是作为各折线向量加权的向量总和的轨迹被表达成的. 已经明确，Bézier 曲线 $X(s)=[x(s), y(s)]$ 是以多角形顶点为样板点 (sample point) 的 Bernstein 逼近:

$$B_n[X(s)]=\sum_{\nu=0}^{n} X\left(\frac{\nu}{n}\right)\phi_\nu(s),\ 0\leqq s\leqq 1,$$

其中权函数 ϕ_ν 对于固定的 s 是表示与一个固定概率有关的离散二项概率密度函数:

$$\phi_\nu(s)=\binom{n}{\nu}s^\nu(1-s)^{n-\nu},\ \nu=0,\ 1,\ \cdots,\ n.$$

多项式 $B_n[X(s)]$ 在 $[0, 1]$ 一致收敛于 $X(s)$. 这里样板点是指

$$\left(\frac{\nu}{n},\ X\left(\frac{\nu}{n}\right)\right)\quad(\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

Bézier 在法国雷诺汽车制造公司发展了他的方法，从一块小粘土模型或一根手绘的曲线取来的数据以原尺寸被设计到放样机上. 然后，设计者从图上估计一根逼近曲线的一些参数，而且把曲线用机器绘下来. 对于三维空间的曲线则是在两平面投影中逐步

加以逼近的. 一个可采用的逼近, 一般只需经过曲线参数的调整便可在很少次数重复中收到成效.

A. R. Forrest、W. J. Gordon 和 R. F. Riesenfeld (1972, 1974) 通过 Bézier 多项式互相作用的插值与逼近, 把 Bézier 曲线一般化. 穗坂衞、黑田满 (1976) 改进了 Bézier 曲线, 采用了分段逼近法, 并指出了 Bézier 曲线和 B–样条间的关系. 在英国剑桥大学专门成立了一个叫 CAD Group 的研究小组, 搞这门研究.

§5 双三次样条函数及其在曲面光顺中的应用

现今在计算机辅助设计中广泛应用于描述曲面的方法, 都是一种用四边曲面片的阵列来表示曲面的方式. 这些曲面片的界限曲线是由 u 或 w 的分段参数方程定义的, 而会合在曲面片各角落处的界限曲线的端点就是在参数取整数值的地方. 各片的形状是用适当的混合函数加以描述, 使得曲面片具有边界并和相邻的曲面片一起满足一定的连续条件. Coons (1964、1967) 和 Forrest (1968) 发展了混合函数的理论, 而且发现: 许多实际应用的曲面仅需要两个混合函数和一个三次基本向量就足够表示.

将三次样条函数从一元推广到二元的第一个真正成功的工作是由 Carl deBoor 作出的 (1962), 这就是所谓双三次样条函数, 它是在矩形区域的矩形网格上被定义的, 后来 J. G. Hayes 和 J. Halliday (1972) 把它用到任意数据集的拟合方面的工作中. 对双三次样条函数的一些基本性质, 现在虽已有了很多的认识, 但是从另一个角度考察这些函数有关间断量的某些性质, 这对于我们根据实际情况提出曲面拟合和光顺的一种算法是有益的.

利用双三次样条函数作曲面拟合, 需要给出边界条件, 而这往往是有困难的. 忻元龙 (1977) 针对这种情况, 提出用光顺性条件代替边界条件的一种算法, 并且证明解的存在唯一性. 他对于曲

面光顺还提出一种"曲线检查、曲面修改"的方案，修改点和修改量可由光顺条件确定．这种光顺方案已经在船体数学放样中获得了成功的应用．

§6 高维仿射空间参数曲线的内在仿射不变量

上述§3的三次参数曲线有一个重要的仿射不变量 I，用以判别曲线有没有实拐点和奇点．我们曾把这个结果推广到五次参数曲线去(苏步青, 1977)．一般地用方程

$$(E_n)\qquad \begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} a_i t^i, \\ y &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} b_i t^i \end{aligned}$$

表示平面 n 次参数曲线，它是有理整曲线．从它和一条直线 $\lambda x+\mu y+\nu=0$ 一般有 n 个交点(包括虚交点)的事实，我们便可断定：这种曲线一定是 n 次代数曲线 C_n，其亏格

$$p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-d-r$$

为0，其中 d 和 r 分别表示 C_n 的二重点和尖点个数．C_n 一般有 $2(n-2)$ 个拐点(虚拐点也算在内)．

令 $\qquad p_{i,j}=a_i b_j-a_j b_i \quad (i<j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$

当 $n=5$ 时，由方程 (E_5) 表示的五次代数曲线 C_5 一般有六个拐点和六个奇点，这对于曲线的光顺是不利的．要使拐点个数尽可能减少，又要使曲线不成为简单五次曲线，我们假定：

$$p_{35}=0,\ p_{45}=0,\ p_{25}\neq 0.$$

在这些条件下，我们找到了三个(关于线性参数变换的权分别为 -1, -2, -4 的)相对仿射不变量 a, b, g．因此，在 $a\neq 0$ 的假定下，我们得出两个内在的仿射不变量：$b/(a)^2$, $g/(a)^4$．按照 $g\gtreqless 0$ 和 $b\gtreqless 0$，以及 $g>0$, $b>2\sqrt{g}$ 或 $b<-2\sqrt{g}$ 等八种场合，

我们算出了实奇点的个数.

这个结果可以推广到平面上满足 h 个条件

$$p_{r,n}=0 \quad (r=n-h,\ n-h+1,\ \cdots,\ n-1),$$
$$p_{n-h-1,n}\neq 0$$

(其中 $0\leqq h\leqq n-3$) 的 n 次参数曲线去，从此得出 $2n-h-4$ 个(当 $n>3$, $h>0$)或 $2n-5$ 个(当 $n=3$ 或 $n>3$, $h=0$)相对仿射不变量.

在高维仿射空间，我们获得更一般的结果(苏步青、忻元龙，1980)：

m 维仿射空间 $n(>m>2)$ 次参数曲线一般有 $m(n-m)-2$ 个内在仿射不变量.

第二章　样条函数

§1　三次样条函数

样条函数的理论和应用是从三次样条函数开始发展起来的. 在计算几何中, 应用得最早、研究得最详细的也是三次样条函数. 这是因为: (1) 它是次数最低的 C^2 类样条, 这里二阶连续是大多数工程和数学物理问题所需要的, 次数低则带来计算的简便和稳定; (2) 它是放样工艺中绘制曲线用的木样条的数学模型的线性近似, 因此在小挠度情况下, 和木样条画的曲线很相近, 符合传统的光顺性要求. 此外, 三次样条函数在数学上具有很强的收敛性质, 使得它在数值微分和积分, 以及微分、积分方程的数值求解方面有着广泛的应用.

今天, 计算几何的兴起使得样条曲线向着几何化和非线性方向深入展开, 手段也日益丰富深刻. 尽管如此, 三次样条函数仍不失为一个基本的和入门的工具. 计算几何中相当一部分常用的曲线, 例如三次参数样条曲线, 三次 B 样条曲线, 张力样条曲线和几何样条曲线等, 都可以看成在三次样条函数基础上的某种改型.

工程中和数学上经常提出这样一种叫做**插值**的数据处理问题: 在平面上给定一组离散的有序点列, 要画一条光滑曲线把这些

点按次序连结起来. 长期以来，绘图员常常用一根富有弹性的均匀细木条或有机玻璃条，让它依次经过这列点，并在每一点处用"压铁"压住，最后沿着这根称为"样条"的细木条画出一根光滑曲线.

如果把木样条看成弹性细梁，压铁看成作用在梁上的集中载荷，那么按上述方法画出的光滑曲线，在力学上可以模拟为求弹性细梁在外加集中载荷作用下的弯曲变形曲线. 在建立平面直角坐标系后，由材料力学知道梁的变形曲线微分方程是

$$EIk(x)=M(x), \tag{1.1}$$

其中 EI 代表细梁的刚度系数，对于均匀木样条来说是一个常数. 由于梁在两个压铁之间再无外力作用，弯矩 $M(x)$ 是 x 的线性函数. 变形曲线 $y=y(x)$ 的曲率 $k(x)=\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$. (1.1)是非线性常微分方程，其解不能用初等函数表示①. 在细梁的弯曲不大，即 $|y'|\ll 1$，通常称为"小挠度"情况下，可以忽略 y' 的影响，得到(1.1) 的线性化近似方程式 $EIy''=M(x)$，即 $y^{(4)}=0$. 这时变形曲线 $y=y(x)$ 为分段三次多项式，且在压铁处的函数值(位移)、一阶导数(转角)和二阶导数(弯矩)都是连续的，而三阶导数(剪力)则有间断. 这些就是三次样条函数的力学背景. 现在着手从数学上来表示和研究它.

1.1 插值三次样条函数

定义 1 设在区间 $[a, b]$ 上给定一个分割 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, $[a, b]$ 上的一个函数 $s(x)$ 称为**三次样条函数**，如果它满足下列条件:

(1) 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 内 $s(x)$ 是三次多项式;

① 在几何样条曲线这一节，将讨论(1.1)的精确解.