# 复变函数及其应用

特編

Б. А. 福克斯, В. И. 列 文著

高等教育出版社

# 复变函数及其应用

## 特编

Б. А. 福克斯
В. И. 列文 著
赵根榕 譯
赵进义 校

高等教育出版社

本書系根据苏联国家技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的福克斯（Б. А. Фукс）和列文（В. И. Левин）合著的“复变函数及其应用 特編”（Функции комплексного переменного и некоторые их приложения специальные главы）1951年版譯出。原書系苏联工程师物理数学从書之一。

本書由西北大学赵根榕翻譯，并經北京工業学院赵进义校訂。

# 复变函数及其应用

## 特編

Б. А. 福克斯 В. И 列文 著

赵根榕 譯

高等教育出版社出版 北京琉璃厰170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷 新华書店总經售

統一書号13010•420 開本 850×1168 1/32 印張 8 5/32 字数 209,000 印数 0001—4,000

1958年1月第1版 1958年1月北京第1次印刷 定價（10）¥1.30

# 序

这本書，就它的目的与內容来說，是1949年出版的 福克斯与沙巴特所著"复变函数及其应用"一書的繼續。

这本書是为这样的工程师以及高等工業学校的学生与研究生而編写的，他們想更深入地熟悉复变函数論的某些專門問題，及其在数学分析的某些篇章(例如，微分方程、运算微积、特殊函数、稳定性問題）上的应用。在解工程与物理問題时，它們起着重要作用。

把这本書跟上面提到的福克斯与沙巴特的那本書合在一起应当能使讀者知道复变函数論的基础，熟悉(当然不能完全地熟悉)这个理論的，由实用观点来看，是最重要的几个特别部分，并明确用函数論的方法解决应用問題的途徑。

这样，假定这本書的讀者，已具有福克斯与沙巴特所著書中的复解析基础的知識，因为以后常常要引用那本書，所以把它簡称为Φ.К.П.(該書有赵根榕的中譯本，商务印書館，1955年。以下我們把这个譯本簡称为Φ.К.П.(榕)——譯者注)。

同时，为了要讀本書第一、二与五章，对 Φ.К.П. 的第一个方案中所列的，即复变函数論基础知識，予以簡短的鑽研就够了，如Φ.К.П.的序[Φ.К.П.(榕)第ii頁]中所說的，这个方案給出函数的初等理論；为了要讀本書的第三、四兩章，对Φ.К.П.的第二个方案所列的內容予以簡短的鑽研就够了，这个方案［見Φ.К.П.(榕)第ii頁]給出研究运算微积的必要知識。当然，閱讀本書所必要的知識，也可以从别的，內容有复变函数的一般理論的基础的書中得到。

本書的材料系圍繞下列問題而編組的：微分方程的解析理論

(第一与二章)，拉普拉斯变换及其应用(第三与四章)及多項式的胡尔維茨問題(第五章)。

第一章具有預备性質，講的是代数函数。注意的中心是这种函数在其正則点与奇点的鄰域中的研究，因而講到代数函数的按自变量的(正与負，整与分的)冪的展开。

第二章，先以篇幅不大的一节，講兩个复变量的解析函数 $f(w,z)$，然后考察形如 $\frac{dw}{dz}=f(w,z)$ 的微分方程，其中函数 $f(w,z)$ 在变量 $w,z$ 的初值 $w_0,z_0$ 的鄰域內，是正則的，或当 $w=w_0$, $z=z_0$ 时，有極点或不定点。然后研究綫性二阶微分方程；并將这里所得到的結論，用于尤拉-白塞尔方程及其积分(柱面函数)。

在第三章中，講述拉普拉斯变换的基本性質，及其在特殊函数的研究与微分方程的求积方面的应用的原則。应当强調，所說的材料在这里是当作复变函数論的一章来处理的。作者所抱的目的是，想用易懂的叙述方式，說明与这里有关的最重要的事实，但同时力求比平常供工程师用的手册或指南書中所講的为精密而严格。运算微积的工具本身的叙述（它在許多書中可以找到)，不在作者的任务之內。

第四章講閉路积分与漸近展开。大家都知道，它們有很大的实用价值，但在文献中一般講解得不够。这里不仅叙述漸近展开理論的基本事实，而且还詳細研究这些展开法的实例。应当注意，要研究这些問題，必須知道多値函数，特別是代数函数的理論的一些知識，这些知識已包含于本書第一章中。

第五章講多項式的胡尔維茨問題。它与以前的材料沒有关联。但我們認为：由于这个題目在許多应用中是重要的，在这本关于复变函数論特殊問題的書中，必須講述它。

在各章中都有大量已解出的例題，它們不仅能作为理論結論的說明，而且还可作为独立解决在实踐中所遇到的同类問題的方案。

工程师，在自己的問題經过数学处理后，常常会遇到本書中所涉及的問題。所以作者認为，在这里沒有必要来考察具有明显物理內容的問題。但是，所叙述的数学理論与对应的技术科目之間的关系，在許多地方都特別加以强調。

第一、二章是福克斯写的，第三、四章是列文写的，第五章是二人合写的。但是，在編写这本書时，他們之間所經常保持的密切联系，使他們每个人都对它的全部內容，負有責任。

# 目　录


序 …………………………………………………………………… v

第一章　代数函数 ………………………………………………… 1

1. 两个变量的多項式 ……………………………………… 1
2 两个多項式的結式 ……………………………………… 2
3 多項式的判别式。代数函数的定义 …………………… 6
4. 代数函数正則分支的存在 ……………………………… 9
5 代数函数正則分支的解析延拓 ………………………… 14
6. 代数函数的奇点 ………………………………………… 21
7 代数函数的分支用在它的奇点鄰域的級数的表示法 … 31
8 牛頓圖解 ………………………………………………… 36
9 代数函数的进一步研究 ………………………………… 48

第二章　微分方程 ………………………………………………… 54

10 两个复变量的正則函数 ………………………………… 54
11. 右端在初值正則的微分方程的解 ……………………… 64
12. 对于初值右端有極点的微分方程的解 ………………… 76
13. 对于初值右端有不定点的微分方程的解 ……………… 81
14. 二阶綫性微分方程 ……………………………………… 92
15 綫性微分方程的正規积分 ……………………………… 104
16 尤拉-白塞尔方程 ………………………………………… 114

第三章　拉普拉斯变換及其反演 ………………………………… 120

17. 初始函数及其拉普拉斯变换。惟一性定理 …………… 120
18. 初始函数的积分与导函数的拉普拉斯变换 …………… 130
19 極限关系。綫性微分方程解的拉普拉斯变换及几个特殊函数的拉普拉斯变换 ……… 135
20 拉普拉斯变换的反演公式 ……………………………… 148
21. 展开定理及其应用 ……………………………………… 156

第四章　閉路积分及漸近展开式 ………………………………… 168

22. 初始函数按自变量的負冪的收斂展开式 ……………… 168
23. 漸近展开及其与閉路积分法的关系 …………………… 178
24 初始函数的漸近展开的一般情形。柱面函数的漸近展开式 … 201
25 过渡方法。加馬函数的漸近展开式 …………………… 216

第五章　关于多項式的胡尔維茨問題 …………………………… 227

26. 問題的提出。例子 ……………………………………………………227
27. 問題提法的其他形式。最簡單的判別法 ………………………………232
28. 胡尔維茨判别法 …………………………………………………………237
29. 其他方法 …………………………………………………………………248
30. 依賴于参量的多項式。魏什涅格拉德斯基-乃克微斯特的方法……………253

# 第一章　代数函数

本章研究代数函数。代数函数定义为形如

$$\Phi(w, z)=0 \tag{1.1}$$

的方程的解，其中 $\Phi(w, z)$ 是变量 $w$ 及 $z$ 的多項式。根据方程(1.1)，用变量 $w$ 与 $z$ 中之一，来表示其他一个，我們就得到代数函数。

1. **两个变量的多項式**　我們現在来研究两个复变量 $w$ 及 $z$ 的多項式 $\Phi(w, z)$，即形如

$$\Phi(w, z)=\varphi_0(z)w^n+\varphi_1(z)w^{n-1}+\cdots+\varphi_n(z) \tag{1.2}$$

的式子。这里 $\varphi_j(z), j=0, 1, \cdots, n$，是 $z$ 的多項式，其次数不大于某一个数 $m$，而且多項式 $\varphi_j(z)$ 中至少有一个的次数，实际上等于 $m$。此外，还假設 $\varphi_0(z)\not\equiv 0$。这样，$\Phi(w, z)$ 就关于 $w$ 是 $n$ 次的，而关于 $z$ 是 $m$ 次的多項式。它也可以按 $z$ 的冪来展开；还可以表示为按降冪排列的齐次多項式的和。

最后的这个表示式可以这样来求：多項式 $\Phi(w, z)$ 是形如 $a_{pq}w^pz^q$ 的單項式的有限和，这里系数 $a_{pq}$ 是复常量。和 $p+q=k$ 叫做單項式 $a_{pq}w^qz^q$ 的次数。將我們的多項式 $\Phi(w, z)$ 中所有的同次單項式集合在一起，成为齐次多項式 $\Phi^{(k)}(w, z)$（$k$ 是这个多項式中諸單項式的次数），因而我們就把它表示为形式

$$\Phi(w, z)=\Phi^{(0)}(w, z)+\Phi^{(1)}(w, z)+\cdots+\Phi^{(l)}(w, z). \tag{1.3}$$

数 $l$——量 $p+q$ 的最大值，系就多項式 $\Phi(w, z)$ 中所有單項式而說的——叫做它的次数。我們假設：每一个齐次多項式 $\Phi^{(k)}(w, z)$ 都是按照变量 $w$ 的降冪排列的，因而有形式

$$\Phi^{(k)}(w, z)=a_{k0}w^k+a_{k1}w^{k-1}z+\cdots+a_{0k}z^k. \tag{1.4}$$

多項式 $\Phi(w, z)$ 叫做可約的，还是叫做不可約的，要看它能够，

还是不能够化为积 $\Phi_1(w,z)\cdot\Phi_2(w,z)$ 而定，其中 $\Phi_1(w,z)$与$\Phi_2(w,z)$ 是变量$w$及$z$的不等于常量的多項式。如果 $\Phi(w,z)=$ $=\Phi_1(w,z)\cdot\Phi_2(w,z)$，而且 $l$, $l_1$, $l_2$ 是对应多項式的次数，则 $l=l_1+l_2$。

注意，对于不可約多項式 $\Phi(w,z)$，系数 $\varphi_0(z),\cdots,\varphi_n(z)$ 的最大公因子为常数。否則多項式 $\Phi(w,z)$ 就真能化为 $\Phi_1(z)\cdot$ $\cdot\Phi_2(w,z)$，其中 $\Phi_1(z)$关于$z$是 $p>0$ 次的，而关于$w$是零次的多項式。

以后我們平常只研究不可約多項式，理由要在§5中說明。

例 1. 多項式

$$F_1=w^2-z^2,$$
$$F_2=zw^3+z^2$$

是可約的，因为

$$w^2-z^2=(w-z)(w+z),$$
$$zw^3+z^2=z(w^3+z).$$

例 2. 多項式

$$\Phi=w^2-z+1$$

是不可約的。事实上，能除尽它，而所得的商为异于常数的多項式的那个多項式，应当具有形式 $aw+bz+c$（其中$a$与$b$不同时等于零）。但是容易看出：用多項式 $aw+bz+c$ 除多項式 $w^2-z+1$，所得到的余式，当满足所提出的条件时，永远异于零。

**2. 兩个多項式的結式** 考察兩个方程的組

$$\begin{aligned}\Phi(w,z)&=\varphi_0(z)w^n+\varphi_1(z)w^{n-1}+\cdots+\varphi_n(z)=0;\\ \Psi(w,z)&=\psi_0(z)w^p+\psi_1(z)w^{p-1}+\cdots+\psi_p(z)=0.\end{aligned}\qquad(1.5)$$

我們現在来求那些值 $z=\beta$，对于这些值，(1.5)的兩个方程为同一值 $w=\alpha$ 所滿足。換句話說，我們想使得等式

$$w=\alpha,\ z=\beta$$

确定方程組(1.5)的解。

为了这个目的，我們作輔助方程組

$$
\left.\begin{array}{ll}
w^{p-1}\Phi=\varphi_0 w^{n+p-1}+\varphi_1 w^{n+p-2}+\cdots+\varphi_n w^{p-1} & =0,\\
w^{p-2}\Phi=\qquad\qquad \varphi_0 w^{n+p-2}+\cdots+\varphi_{n-1}w^{p-1}+\varphi_n w^{p-2} & =0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\Phi=\qquad\qquad \varphi_0 w^n+\cdots\cdots+\varphi_n & =0,\\
w^{n-1}\Psi=\psi_0 w^{n+p-1}+\psi_1 w^{n+p-2}+\cdots+\psi_p w^{n-1} & =0,\\
w^{n-2}\Psi=\qquad\qquad \psi_0 w^{n+p-2}+\cdots+\psi_{p-1}w^{n-1}+\psi_p w^{n-2} & =0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\Psi=\qquad\qquad \psi_0 w^p+\cdots\cdots+\psi_p & =0.
\end{array}\right\}
\tag{1.6}
$$

如果值 $w=\alpha$, $z=\beta$ 满足方程 $\Phi=0$ 与 $\Psi=0$，那么它們显然必会滿足組(1.6)中的所有方程。

进一步的来考察由具有 $n+p$ 个未知量 $x_0,\cdots,x_{n+p-1}$ 的 $n+p$ 齐次綫性方程所成的一个輔助組

$$
\left.\begin{array}{r}
\varphi_0(\beta)x_{n+p-1}+\varphi_1(\beta)x_{n+p-2}+\cdots+\varphi_n(\beta)x_{p-1}\qquad\qquad\qquad =0,\\
\varphi_0(\beta)x_{n+p-2}+\cdots+\varphi_{n-1}(\beta)x_{p-1}+\varphi_n(\beta)x_{p-2}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_0(\beta)x_n+\cdots\cdots+\varphi_n(\beta)x_0=0,\\
\psi_0(\beta)x_{n+p-1}+\psi_1(\beta)x_{n+p-2}+\cdots+\psi_p(\beta)x_{n-1}\qquad\qquad\qquad =0,\\
\psi_0(\beta)x_{n+p-2}+\cdots+\psi_{p-1}(\beta)x_{n-1}+\psi_p(\beta)x_{n-2}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\psi_0(\beta)x_p+\cdots\cdots+\psi_p(\beta)x_0=0.
\end{array}\right\}
\tag{1.7}
$$

因为方程組(1.6)为值 $w=\alpha, z=\beta$ 所滿足，故齐次綫性方程組(1.7)有一組解：

$$x_{n+p-1}=\alpha^{n+p-1},\ x_{n+p-2}=\alpha^{n+p-2},\ \cdots,\ x_0=1. \tag{1.8}$$

于是具有 $n+p$ 个未知量的 $n+p$ 个齐次綫性方程(1.7)，当將(1.8)的值(这些值之中有一个显然不等于零，因为 $x_0=1$)代入时，就变为恒等式。这只在这个方程組的系数所組成的行列式等于零时，才有可能。換句話說，值 $z=\beta$，使下列行列式变成零：

$$R(\Phi,\Psi)=\begin{vmatrix}\varphi_0(z) & \varphi_1(z) & \cdots & \varphi_n(z) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \varphi_0(z) & \cdots & \varphi_{n-1}(z) & \varphi_n(z) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_0(z) & \cdots & \cdots & \varphi_n(z)\\ \psi_0(z) & \psi_1(z) & \cdots & \psi_p(z) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \psi_0(z) & \cdots & \psi_{p-1}(z) & \psi_p(z) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \psi_0(z) & \cdots & \cdots & \psi_p(z)\end{vmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}p\text{行}\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}n\text{行}\end{matrix} \tag{1.9}$$

式子 $R(\Phi,\Psi)$是 $z$ 的多項式。我們已經說过：只当 $z=\beta$ 滿足方程

$$R(\Phi,\Psi)=0 \tag{1.10}$$

时，才可能有值 $w$ 存在，同时滿足方程

$$\Phi(w,\beta)=0,\ \Psi(w,\beta)=0. \tag{1.11}$$

同时，由我們的討論决不能推得，对于方程(1.10)的根 $z=\beta$，实际上，有同时滿足兩个方程(1.11)的值 $w$ 存在着①。

在高等代数教程中已建立：在使 $R(\Phi,\Psi)=0$，而最高次項系数 $\varphi_0(z)$及 $\psi_0(z)$ 不等于零的点 $z$ 处，方程(1.5)至少有一个公根 $w=\alpha$②。方程(1.10)叫做方程(1.5)在消去未知量 $w$ 的結式③。

我們把結論統一总括于下面的命題中。

**定理 1.** 当方程

$$\Phi(w,\beta)=0,\ \Psi(w,\beta)=0$$

有公根 $w=\alpha$，或者

$$\varphi_0(\beta)=\psi_0(\beta)=0.$$

---

① 由我們的討論可以推得：与滿足方程(1.10)的值 $z=\beta$ 对应的，是未知量 $x_0,\dots,x_{n+p-1}$ 的，使得方程(1.7)变成恒等式的值（非所有的都等于零）。但未知量 $x_0,\dots,x_{n+p-1}$ 的这些值可能不是某一个数 $\alpha$ 的依次的冪。

② 例如，見柯召譯庫洛什著的“高等代数教程”(高等教育出版社，1956) § 40。

③ 有时也把 $R(\Phi,\Psi)$ 叫做多項式 $\Phi$ 与 $\Psi$ 的結式。本書以下的叙述中有时兼取这个观点——譯者。

时，而且也只有在这种情况下，值 $z=\beta$ 才是(1.5)的两个多項式的結式(1.9)的根。

**注** 在高等代数教程中証明了：如 $l_1$ 是多項式 $\Phi(w,z)$ 的次数，$l_2$ 是多項式 $\Psi(w,z)$的次数，那末，多項式 $R(\Phi,\Psi)$的次数不高于积 $l_1l_2$。

**例 1.** 試解方程組

$$\Phi=w^3z+z-3=0,$$
$$\Psi=\sqrt[3]{2}w^2+z-3=0.$$

**解** 作多項式 $\Phi$ 与 $\Psi$ 的結式。按照公式(1.9)，

$$R(\Phi,\Psi)=\begin{vmatrix} z & 0 & 0 & z-3 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & z-3 \\ \sqrt[3]{2} & 0 & z-3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{2} & 0 & z-3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} & 0 & z-3 \end{vmatrix}=$$
$$=(z-1)(z-3)^2(z-1+\sqrt{3})(z-1-\sqrt{3}).$$

由方程 $R(\Phi,\Psi)=0$ 求出 $z$，并对 $z$ 的这些值，研究所給的方程組，我們就求得：当 $z=1$ 时，方程 $\Phi=0$，与 $\Psi=0$，有公解 $w=\sqrt[3]{2}$；当 $z=3$ 时，有公解 $w=0$；当 $z=1-\sqrt{3}$ 时，有公解 $w=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{1-\sqrt{3}}$；当 $z=1+\sqrt{3}$ 时有公解 $w=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}$。这样，我們就得到了所給方程組的解。

**例 2.** 試解方程組

$$\Phi=w^2z-w=0,$$
$$\Psi=2w^2z+z-3=0.$$

**解** 作多項式 $\Phi$ 与 $\Psi$ 的結式。依照公式(1.9)，

$$R(\Phi,\Psi)=\begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 \\ 2z & 0 & z-3 & 0 \\ 0 & 2z & 0 & z-3 \end{vmatrix}=$$
$$=z(z-1)(z-2)(z-3).$$

由方程 $R(\Phi, \Psi)=0$ 求出 $z$，然后再对 $z$ 的这些值，考察所給方程組，我們就得到：当 $z=3$ 时，我們的方程有公解 $w=0$；当 $z=2$ 时，有公解 $w=\frac{1}{2}$；当 $z=1$ 时，有公解 $w=1$。当 $z=0$ 时，方程 $\Phi=0$ 与 $\Psi=0$ 的最高次項系数变为零。对于 $z$ 的这个値，所給的方程沒有公根 $w$。

3. 多項式的判別式。代数函数的定义 考察方程

$$\Phi(w,z)=\varphi_0(z)w^n+\varphi_1(z)w^{n-1}+\cdots+\varphi_n(z)=0. \quad (1.12)$$

我們假設：$\varphi_0(z)\not\equiv 0$，而且整数 $m$ 是多項式 $\varphi_0(z), \cdots, \varphi_n(z)$ 的最高次数。

使变量 $z$ 固定，我們就把(1.12)变成常系数的方程，一般来說，对于 $w$ 是 $n$ 次的。对于使多項式 $\varphi_0(z)$ 变成零的値 $z=\beta_s$，这个次数低于 $n$①。先假設我們所取的那个固定値 $z$ 不等于所說的数 $\beta_s$ 中的任何一个，因而对于它，方程(1.12)的次数恰好等于 $n$。按代数的基本定理，这个方程必定有根存在②。它們可能都是單根，也就是說，它們的重数等于 1，于是根的总数是 $n$。但如它們之中遇有重根，那么在这个点 $z$ 处，(不同的)根 $w_s$ 的总数少于 $n$。

正如所知道的，如果 $\omega$ 是某一个解析函数[在特別情形是多項式 $f(w)$]的 $q$ $(q\geqslant 1)$ 重根，那末

$$f(\omega)=f'(\omega)=\cdots=f^{(q-1)}(\omega)=0, f^{(q)}(\omega)\neq 0. \quad (1.13)$$

所以如回到方程(1.12)的情形，我們便可以断言：所有它的重根(重数 $q\geqslant 2$)除滿足方程(1.12)本身而外，至少还应当滿足方程

$$\Phi'_w(w,z)=$$
$$=n\varphi_0(z)w^{n-1}+(n-1)\varphi_1(z)w^{n-2}+\cdots+\varphi_{n-1}(z)=0. \quad (1.14)$$

---

① 甚至还可能有下列情形發生：在某些点 $z=\beta_s$ 处，方程(1.12)的次数(关于 $w$ 的)等于零。如在某一个点 $z=\beta_s$ 处

$$\varphi_0(\beta_s)=\cdots=\varphi_{n-1}(\beta_s)=0,$$

就产生这种可能性；这时如 $\varphi_n(\beta_s)\neq 0$，則方程 $\Phi(w,\beta_s)=0$ 沒有有限根；如 $\varphi_n(\beta_s)=0$，則方程 $\Phi(w,\beta_s)=0$ 变成为 $w$ 的任何値所滿足的恒等式。在最后的这种情形，所有的 $\varphi_j(z)$ 都能用 $z-\beta_s$ 除尽[如果多項式 $\Phi(w,z)$ 是不可約的，这不可能成立。]

② 見Φ. K. П.(榕)第259頁。

这样，如果对于某一个 $z=\beta$，方程(1.12)有重根 $w=\omega$，那末值

$$w=\omega,\ z=\beta$$

就作成方程組(1.12)与(1.14)的解。因而，按照定理 1，值 $z=\beta$ 应当满足方程

$$D(z)=R(\Phi,\ \Phi_w')=0. \tag{1.15}$$

由定理 1，使多項式 $\Phi(w,z)$ 与 $\Phi_w'(w,z)$ 的最高次項系数变成零的值 $z$，就是多項式 $\varphi_0(z)$ 的所有根，也能同样的满足这个方程。

多項式 $D(z)$ 叫做多項式 $\Phi(w,z)$ 的判别式①。我們用記号 $\beta_s$ 表示它的根[与 $s$ 的前面的数字呼应的是多項式 $\varphi_0(z)$ 的根 $\beta_s$，它們都是多項式 $D(z)$ 的根；現在与 $s$ 的后面的数字对应的是多項式 $D(z)$ 的其余的根]。由以前的分析可知：对于值 $z=\beta_s$，也只对于它們(如果只論 $z$ 的有限值)，方程 $\Phi(w,z)=0$ 才可能有少于 $n$ 个不同的根。

我們要扩充方程(1.12)的討論范圍，給它加上点 $z=\infty$。为了这个目的，我們在(1.12)中，命 $z=z_1^{-1}$。那末

$$\Phi(w,z)=\Phi(w,z_1^{-1})=z_1^{-m}\Psi(w,z_1). \tag{1.16}$$

所以在值 $z_1=0$ 的任何鄰域（由其除去点 $z_1=0$ 本身），方程 $\Phi(w,z)=0$ 等价于方程 $\Psi(w,z_1)=0$。我們約定將方程

$$\Psi(w,0)=0 \tag{1.17}$$

看成方程(1.12)到点 $z=\infty$ 的延拓。方程(1.17)的根 $w_1, w_2, \cdots$ 看成方程(1.12)的与值 $z=\infty$ 对应的根。

方程(1.17)的不同根的个数与以前一样地来确定。由于这个緣故，我們指出：多項式 $\Psi(w,z_1)$ 的判别式 $D_1(z_1)$ 显然可以由多項式 $\Phi(w,z)$ 的判别式 $D(z)$ 同样地借助于代換式 $z=z_1^{-1}$，然后再乘上 $z_1$ 的某次冪[在 $D(z)$ 的式子的分母中所得的]而得到。

$m(2n-1)\cdot$

① 我們不考察判别式 $D(z)$ 恒等于零这种可能性。如果多項式 $\Phi(w,z)$ 含有因子 $[\varphi(w,z)]^k$，其中 $\varphi(w,z)$ 是某一个多項式，而 $k$ 是大于 1 的整数，那末就發生这种情形。在特别情形，不可約多項式的判别式不可能恒等于零。

全 $z$ 平面上使方程（1.12）的不同有限根的个数小于 $n$ 的点[这时，对于点 $z=\infty$，方程(1.12)换为方程（1.17）]組成方程的判别集合。如我們已看出的，使 $D(z)=0$ 的那些有限点，都屬于其中，如 $D_1(0)=0$，則平面上的無限远点也屬于其中。

我們把結論归結于以下的命題中。

**定理 2.** 已知方程

$$\Phi(w,z)=\varphi_0(z)w^n+\cdots+\varphi_n(z)=0,$$

其中 $\varphi_0(z),\cdots,\varphi_n(z)$ 是 $z$ 的多項式，而且 $\varphi_0(z)\not\equiv 0$。命 $\mathscr{G}$ 是由全平面除去已知方程的判别集合所得到的域。那末在每个点 $z\in\mathscr{G}$①，这个方程有 $n$ 个不同的有限根 $w_1,\cdots,w_n$。

这样，在域 $\mathscr{G}$ 中就确定了一个 $n$ 值函数 $w=u(z)$。我們把它叫做方程 $\Phi(w,z)=0$ 所确定的代数函数。全 $z$ 平面上不屬于域 $\mathscr{G}$ 的点叫做这个代数函数的奇点。

**例**　求方程

$$\Phi(w,z)=w^3z^2-wz+1=0$$

所确定的代数函数的域 $\mathscr{G}$。

**解**　取方程

$$\Phi'_w(w,z)=3w^2z^2-z=0,$$

并按公式(1.9)作判别式 $D(z)=R(\Phi,\Phi'_w)$。我們求得

$$D(z)=-z^6(4z-27).$$

这样，$z$ 平面上的所有有限点，除点

$$\beta_1=0,\quad \beta_2=\frac{27}{4}$$

以外，都屬于域 $\mathscr{G}$。

在点 $z=0$ 上，多項式 $\Phi(w,z)$ 中，$w^3$ 的系数(等于 $z^2$)变为零。在点 $z=\frac{27}{4}$ 上，方程 $\Phi(w,z)=0$ 只有兩个不同的根：$w=-\frac{4}{9}$ 与 $w=\frac{2}{9}$。

① 記号 $\in$ 在这里与以后都表示所謂"屬于"。写法 $z\in\mathscr{G}$ 表示：点 $z$ 屬于域 $\mathscr{G}$。

要解决点 $z=\infty$ 是否屬于域 $\mathscr{G}$ 的这个問題，我們必須考察由已知方程用代换 $z=z_1^{-1}$ 所得到的方程

$$\Psi(w, z_1)=w^3-wz_1+z_1^3=0$$

在点 $z_1=0$ 的情形。显然，这个方程在点 $z_1=0$ 只有一个根 $w=0$。于是，对于已知方程的域 $\mathscr{G}$ 的求得，$z=\beta_3=\infty$ 应当是从全 $z$ 平面中除去的第三点。考察后面那个方程 $\Psi(w, z_1)=0$ 的判別式在点 $z_1=0$ 的情况，也可以达到同样的結論。

**4. 代数函数正則分支的存在** 本节中我們將証明以下的重要命題。

**定理 3.** 命 $\Phi(w, z)$ 是兩个变量 $w$ 与 $z$ 的多項式。如果对于值 $w=w_0, z=z_0$,

$$\Phi(w_0, z_0)=0,\ \Phi'_w(w_0, z_0)\neq 0\ (\text{当 } z_0\neq\infty \text{ 时}), \tag{1.13}$$

或

$$\Psi(w_0, 0)=0,\ \Psi'_w(w_0, 0)\neq 0\ (\text{当 } z_0=\infty \text{ 时}), \tag{1.19}$$

(而且在这兩种情形都有 $w_0\neq\infty$)，那末在点 $z=z_0$ 的鄰域就有一个，而且只有一个正則函数 $w=w(z)$ 存在着，使得

$$w(z_0)=w_0, \qquad \text{当 } z_0\neq\infty \text{ 时} \tag{1.20}$$

或

$$\lim_{z_1\to 0} w(z_1^{-1})=w_0 \quad \text{当 } z_0=\infty \text{ 时}, \tag{1.21}$$

而且

$$\Phi(w(z), z)\equiv 0. \tag{1.22}$$

**注** 如果点 $z_0\in\mathscr{G}$，条件 $\Phi'_w(w_0, z_0)\neq 0$ [或当 $z_0=\infty$ 时的 $\Psi'_w(w_0, 0)\neq 0$]就滿足了。我們所表述的定理，在这种情形下，是永可适用的。

**証明** 先来研究 $z_0\neq\infty$ 的情形。为簡化以后的計算，我們取量

$$w-w_0,\ z-z_0 \tag{1.23}$$

为新变量。这样，証明就归結为 $w_0=0, z_0=0$ 的情形了。对于新变量，我們仍用旧的記号。于是，我們假設 $\Phi(0,0)=0$, $\Phi'_w(0,0)\neq 0$。我們必須証明：存在一个，而且只有一个在点 $z=0$ 是正則的函数 $w(z)$，它滿足条件

$$w(0)=0,\ \Phi(w(z), z)\equiv 0. \tag{1.24}$$