

高等学校试用教材

一元微积分

北京大学数学力学系
高等数学教材编写组

人民教育出版社



高等学校试用教材

一元微积分

北京大学数学力学系
高等数学教材编写组

人民教育出版社

1977·北京

高等学校试用教材

一元微积分

北京大学数学力学系
高等数学教材编写组

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

1977年7月第1版 1978年2月第1次印刷

书号 13012·046 定价 1.00 元

编者的话

本书是我校理科物理类各专业的试用教材，是在一九七五年本的基础上修订而成的。

在编写过程中，我们学习了马列和毛主席的有关著作，力图用辩证唯物主义为指导，贯彻理论与实际相结合的原则，内容的选取注意到少而精，文字力求通俗易懂。

全书共分六章，其中“*”号部分，属于选学内容，有关单位使用本教材时，可依据具体情况决定取舍。

在编写和修订过程中，我们得到了不少兄弟院校的帮助，并参考了他们的教材。由于学习不够和时间仓促，书中定有不少缺点和错误，希望读者批评指出。

北京大学数学力学系

高等数学教材编写组

一九七七年四月

目 录

对话.....	1
第一章 函数.....	9
第一节 变量与常量.....	9
第二节 函数.....	10
函数概念.....	10
函数图形.....	15
函数的定义域.....	16
列函数式.....	18
均匀变化与非均匀变化.....	21
第三节 基本初等函数及其图形.....	27
第四节 初等函数及其作图法.....	31
第五节 双曲函数及其图形.....	42
第二章 极限.....	47
第一节 极限概念.....	48
自变量趋于无穷的过程.....	48
自变量趋于有限数的过程.....	53
序列的极限.....	55
第二节 极限的性质.....	57
无穷小量与极限.....	57
无穷小量的性质.....	58
极限的两个性质.....	60
第三节 极限的四则运算.....	61
第四节 两个重要极限.....	65
第五节 函数的连续性.....	68
*第六节 极限(续).....	73
极限的精确的数量描述.....	74
几个定理的证明.....	82

极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 存在的证明	86
---	----

第三章 微商91

第一节 实例	91
--------	----

第二节 微商定义	99
----------	----

第三节 微商的算法	107
-----------	-----

基本初等函数的微商(一)	107
--------------	-----

微商的四则运算法则	115
-----------	-----

复合函数的微商	121
---------	-----

隐函数的微商	126
--------	-----

基本初等函数的微商(二)	129
--------------	-----

高阶微商	134
------	-----

应用问题举例	140
--------	-----

第四节 微商中值定理	149
------------	-----

第五节 函数的升降、极值和作图	153
-----------------	-----

函数的升降	153
-------	-----

函数的极值	155
-------	-----

函数作图	158
------	-----

*凹凸性和转折点	162
----------	-----

*斜渐近线	166
-------	-----

第六节 最大、最小值问题	169
--------------	-----

第七节 无穷的比较	178
-----------	-----

无穷小的比较	178
--------	-----

无穷大的比较	183
--------	-----

第四章 微分190

第一节 微分概念	190
----------	-----

第二节 微分的计算	192
-----------	-----

一阶微分形式的不变性和基本公式	192
-----------------	-----

参数方程所表示的函数的微分法	197
----------------	-----

第三节 微分的应用	201
-----------	-----

微分的几何意义	201
---------	-----

函数的线性化	202
--------	-----

*误差的估计	206
--------	-----

*曲率·····	210
第五章 不定积分 ·····	218
第一节 基本概念·····	218
原函数·····	218
不定积分·····	220
不定积分的几何意义·····	222
第二节 基本积分表和简单运算法则·····	223
基本初等函数的不定积分公式·····	223
不定积分的简单运算法则·····	224
第三节 第一换元积分法·····	227
第四节 第二换元积分法·····	238
第五节 分部积分法·····	241
第六章 定积分 ·····	247
第一节 定积分的概念·····	247
两个实例·····	247
定积分的定义·····	253
定积分的几何意义·····	255
第二节 微积分基本定理·····	258
第三节 定积分的基本性质·····	265
第四节 定积分的换元积分法与分部积分法·····	270
换元积分法·····	270
分部积分法·····	273
第五节 定积分的应用·····	278
引力问题·····	279
转动惯量问题·····	285
交流电路的平均值问题·····	288
面积问题·····	291
平面曲线的弧长问题·····	294
*旋转体的体积和侧面积·····	296
第六节 广义积分·····	303
无穷限积分·····	303
瑕积分·····	306

第七节 近似积分法	309
数方格法	309
矩形法	310
梯形法	312
抛物线法	315
*逐次分半加速近似公式	320
简单积分表	326
习题答案	338

对 话

王：老张，我们就要学微积分了。请你谈谈学习的体会吧！

张：微积分学的内容在生产斗争和科学实验中有着广泛的应用，它是我们理工科大学的一门重要基础课。为了社会主义革命和社会主义建设的需要，我们应该学好它。

王：对。那末，微积分主要研究一些什么问题呢？

张：从历史上看，在微积分发展的初期，它所研究的典型问题主要有以下四类：

1. 已知物体运动的路程与时间的函数关系，求速度和加速度；反过来，已知物体运动的速度和加速度与时间的函数关系，求路程。

2. 求曲线的切线。

3. 求函数的极大、极小值问题。

4. 求曲线的弧长，求曲线所围成的面积、曲面所围成的体积等求积问题。

即使在现在，生产实践和科学技术中所遇到的许多问题也还可归结到上述几类问题。

王：你能接着谈谈微积分的基本思想吗？

张：好。我们就从人造卫星的发射过程谈起吧。

从卫星离开地面，直到它抛弃第三级火箭，进入椭圆形轨道绕地球运行，它的飞行速度始终都在急剧增加着。我们对它每时每刻的飞行速度都必须非常准确地把握住，以确保卫星准时进入预定轨道，并在进入轨道时，达到预定的速度（8公里/秒左右）。

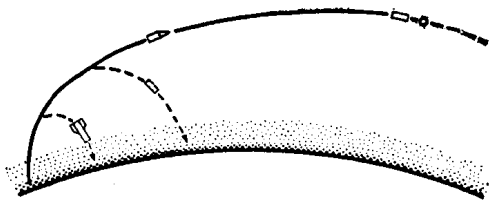


图 0-1

可见,研究运动物体在每一时刻的速度是很重要的。运动物体在每一时刻的速度称为瞬时速度。

王: 我们在物理课和初等数学中, 学过平均速度。譬如说, 某物体在 t 到 t_1 这一段时间 $\Delta t = t_1 - t$ 内, 走过了一段路程 $\Delta s = s_1 - s$, 则比值 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 就是该物体在这段时间内的平均速度。——

现在看来, 单有平均速度的概念是不够的。

张: 是的, 平均速度的概念只能使我们对运动物体在一段时间内的运动大致情况有个了解, 这不但对于掌握卫星的发射过程不够, 即使对于了解比卫星发射速度变化慢得多的火车运行情况同样也是不够的。铁路管理部门对火车在上、下坡时, 进、出站时, 过桥时, 转弯时, 穿隧道时的行车速度都有一定的要求, 司机必须注意他的速度表, 如果司机对火车运行速度没有准确的掌握, 就不能做到安全行车, 正点到站。至于在人造卫星的发射过程中, 那就不但要掌握火箭在运行过程中的速度, 而且更要掌握火箭运行速度的变化规律。掌握速度的变化规律, 这是科学技术中的一个重要课题。

不过, 瞬时速度的概念也并不神秘, 它可以通过平均速度的概念来把握。你知道, 一个作变速运动的物体, 不管它的速度变化多大, 在一段很短的时间内, 它的速度变化总是不大的。可以近似地看成匀速运动, 对吧?

王: 对。

张：可见，速度的“匀”与“不匀”这一对矛盾在一定条件下可以相互转化。当 Δt 比较小时，平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 近似地反映了 t 时刻的瞬时速度。 Δt 越小，这种近似程度就越高。当 Δt 无限变小并趋于零时，发生了一个质的飞跃，平均速度就转化为瞬时速度。简单说来就是，以平均速度作桥梁，可以求出变速运动的瞬时速度，实现速度由“匀”到“不匀”的转化。

王：很有道理。

张：我们的目的是求物体在 t 时刻的瞬时速度。为了达到这个目的，先让 t 变到 t_1 ，使时间有一个差 $\Delta t = t_1 - t$ ，路程随着也有一个差 $\Delta s = s_1 - s$ ，从而得出这段时间的平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ；然后再让 t_1 变回到 t ，即让差逐渐减小并趋于 0，这时比值 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 就转化为瞬时速度了。

王：这个思想倒是通俗易懂的。

张：这里所体现的正是微积分的基本方法。对此，马克思在他的《数学手稿》中，用“首先取差(Differentiation)，然后再把它扬弃”这样精辟的语言作了极为深刻的概括。

王：你讲的这一点很重要，我学习时一定要注意领会这一指导思想。请你再接着谈下去。

张：瞬时速度的概念，在数量上是用微商的概念来描述的。微商是微积分的一个很基本的概念。趋近的过程，在数学上称为极限过程，“匀”向“不匀”的转化正是在极限过程中实现的。

在生产斗争和科学实验中，我们必须研究各种运动着的物质，而它们都依照一定的速度规律在运动着，如人造卫星的运行，自由落体的运动，铀的放射，化学反应，以及电流的变化等等，都要用微商来研究。

王：嗯，很有启发。那末，能不能说，微积分就是研究微商的呢？

张：不能。微商只属于微积分的一部分，即微分学部分。下面我们来谈谈微积分的另一部分，即积分学的问题。你想想，在初等数学里都会算哪些图形的面积呢？

王：三角形、正方形、矩形、梯形、多边形。

张：会算抛物线下的面积吗(图 0-2)？

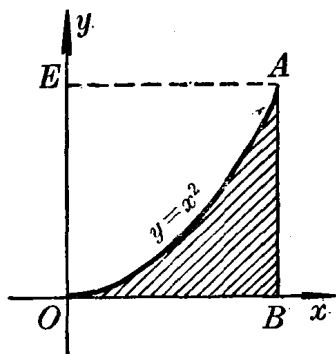


图 0-2

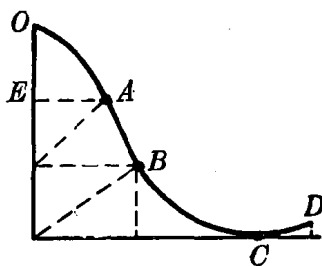


图 0-3

王：不会。这有什么用？

张：你不是参观过水电站吗，那你一定见过溢流坝了(见下页照片)？它的断面形状是根据水流情况设计出来的，其断面形状如图 0-3 所示。其中 OA 是抛物线， AB 是直线， BCD 是圆弧。建造溢流坝要根据溢流坝的体积备料，不会算这个断面面积能行吗？

王：噢，我懂了。看来要算断面面积关键在于会算最上面的 OAE 那块面积。

张：对。可这块面积和图 0-2 的 OAE 那块形状相同，而 OAE 和 OAB 正好凑成一个矩形，所以会算 OAB 的面积，自然也就学会算这块面积了。要算抛物线下的面积，又要用到微积分了。

王：这样说来，微积分真有用。



你就接着谈谈求曲边三角形 OAB 的面积问题吧(图 0-2)。这个问题看来不太好解决,三角形的边都是直的,可这里有一条边是曲线 $y=x^2$, 不好算。

张: 很好,你一下子就看出了矛盾的焦点。现在问题的困难正象你所说的,是“曲”与“直”的矛盾。

王: 这个矛盾怎么解决呢?

张: 毛主席教导我们说:“事物内部矛盾着的两方面,因为一定的条件而各向着和自己相反的方面转化了去,向着它的对立面所处的地位转化了去。”

王: 怎样实现“曲”与“直”的相互转化呢?

张: 其实这个方法你是会的。

王: 我会?!

张: 是的!你不是当过钳工吗?要你锉一个圆形的工件,你会不会?

王: 会。

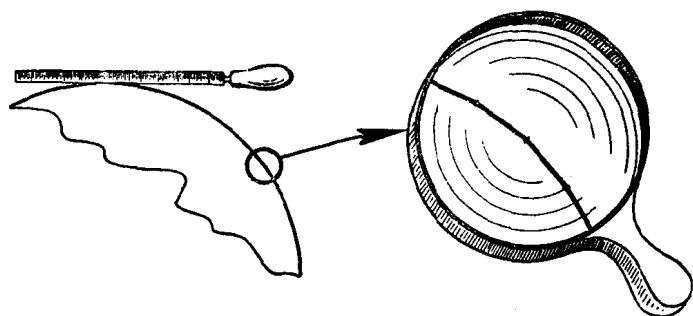


图 0-4

张：那我问你，平锉怎么能锉出圆形工件呢？

王：用平锉来锉，虽然每一下锉出来的都是平的，但我可以不断改变平锉的方向，使锉出来的工件在总体上看就是圆的了。

张：对！我们再举一个实际例子。你见过大烟囱吧？

王：见过。哎！对了！大烟囱也有类似的地方，整个来看烟囱是圆的，但烟囱是由砖头砌成的，砖可都是直的。

张：很好！可见你已经获得了“曲”与“直”相互转化的想法，这种想法劳动人民在生产实践中是经常用到的。

你可把刚才的两个实际问题中的想法总结一下。

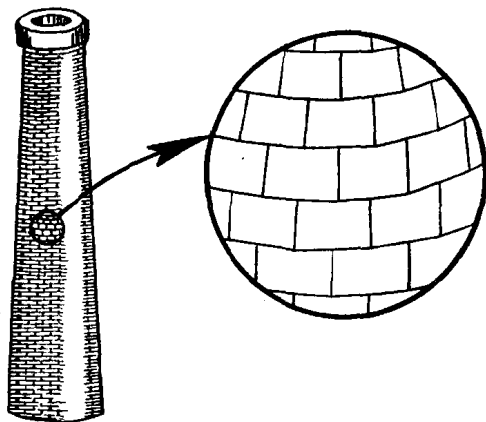


图 0-5

王：这两个问题的共同点就是：虽然整体上看是圆的，但在局部一小段上却是直的；如果直的一小段越短，整体看起来就越圆。

张：对！这就是微积分的基本思想。在很小的一段上，可以以“直”代“曲”，“直”与“曲”的矛盾可以互相转化。正如恩格斯所深刻指出的：“高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事。”这句话高度概括了微积分的基本思想。

王：那末，前面讲的曲边三角形的面积也可以按照上面的想法算出来吧？

张：对！先取极小的一段，促使“曲”与“直”的矛盾转化。从整体来看，就要作分割，把曲边三角形分成很多小条，每一小条的面积可以用一个小矩形面积代替(图 0-6)。

王：嗯，这条面积是和小矩形面积差不多。

张：这样把所有的小矩形面积加起来就得到阶梯形的面积，它可作为曲边三角形面积的近似值。

王：不过你这样计算的结果只是个近似值，我要计算精确值怎么办？

张：这不要紧，我们可以进一步研究。在图 0-6 中，我们是把

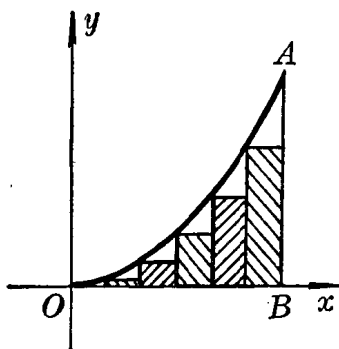


图 0-6

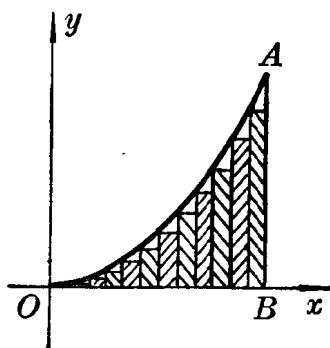


图 0-7

OB 分成六等份,如果分得更细一些,例如分成十二等份,就可以从图形上看出阶梯形的面积更接近于曲边三角形的面积,这样得到的近似值就更精确一些(图 0-7)。

王: 是的,这就比刚才的精确一些。

张: 分得越细,近似值就越接近准确值。如果把 OB 无限分细,这时每个小矩形的面积就转化为“微分”,近似值就转化为准确值,这个值就是 $y=x^2$ 这个函数在区间 $[0,1]$ 上的定积分。可见,定积分是微分的无限积累。

具体计算我们就不作了,你很快就会学到。

总之,贯穿于微积分的基本矛盾是“匀”与“不匀”、“直”与“曲”的矛盾,处理这对矛盾的基本方法都是借助于细分,即创造条件使得“匀”与“不匀”、“直”与“曲”相互转化,从而达到认识“不匀”或“曲”的目的。

王: 你今天讲的对我很有启发。看来微积分并不神秘难懂,同时,微积分中有许多观点是体现了唯物辩证法的思想。我一定牢记毛主席关于“你们学自然科学的,要学会用辩证法”的教导,用唯物辩证法的思想作指导,学好微积分。

第一章 函 数

“科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。”十六、十七世纪,在生产实践和科学实验的推动下,数学从研究常数进展到研究变数,从而产生了一门崭新的学科——微积分。

恩格斯指出:“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分学和积分学也就立刻成为必要的了”。微积分是研究变数的一门学科,是辩证法在数学中的应用。因而,当着我们开始学习微积分的时候,应当首先弄清楚它的研究对象,这就是变数以及反映变数之间相互依赖关系的函数。

第一节 变量与常量

在任何一个生产过程或科学实验过程中,总会涉及到这样或那样的量,象体积、重量、温度、时间、距离、速度、电流等等,其中有些量在过程中是变化的,而有些量在过程中保持不变。例如在交流电路中,电流与电压不断地改变,而电阻是不变的;在火车运行过程中,火车离开车站的距离在不断地变化,而火车所载物资的重量却保持不变。我们把在某一过程中变化的量称为变量,而把在过程中始终保持某一数值的量称为常量。例如上面的火车一例中,火车运行的距离是变量,火车所载物资的重量是常量。

一个量究竟是常量还是变量,不是绝对的,要根据具体过程与具体条件来分析。例如火车行驶的速度,在开始阶段或刹车阶段,