

结构动力学

理论与计算

[美] M.帕兹 著

李裕澈 刘勇生 等译
孙福梁 徐宗和 等校

地震出版社

7030.5

P05

结 构 动 力 学

——理论与计算

[美] M. 帕兹 著

李裕激 刘勇生 等 译

孙福梁 徐宗和 等 校

地 震 出 版 社

(京)新登字 095 号

内 容 提 要

本书较全面地论述了单自由度体系模型、剪切结构模型、离散多自由度体系框架模型及具有分布特征结构模型及随机振动基本理论，并用实例讲解这些理论问题的算法。书中介绍了美国最新的建筑规范 UBC-85 和 UBC-88。全书共 6 篇 25 章，具有实例多、资料丰富、论证翔实、涉及面广、实用性强等特点，是一本结构动力学研究极有价值的参考书。

本书适于从事结构抗震、抗震设计研究、建筑施工、地震工程学等科研人员以及大专院校有关专业师生阅读和参考。

Structural Dynamics
Theory and Computation
MARIO PAZ
Van Nostrand Reinhold 1991

2706

结 构 动 力 学

理论与计算

[美] M.帕兹 著

李福海 谢贻德 等

孙福梁 徐宗和 等

责任编辑：魏乃芳

责任校对：李 珺

*

地 震 出 版 社 出 版

北京民族学院南路 9 号

中国地质大学轻印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

*

787×1092 1/16 22.25 印张 569 千字
1993 年 9 月第一版 1993 年 9 月第一次印刷

印数 0001-2500

ISBN 7-5028-1101-X/TU·99

(1494) 定价：18.00 元

译者的话

为向从事结构抗震设计、振动理论研究和地震工程研究的广大科技人员、大专院校师生提供丰富的参考资料，我们翻译了这本书。本书深入浅出，从基本理论到实际应用均加以论述。

本书第一、二章由李裕澈翻译；第三、四、五、六、七章由刘勇生翻译；第八、十九、二十章由李大华翻译；第九、十章由卢寿德翻译；第十一、十二、十三、十五章由底青云翻译；第十四、十六章由孙福梁翻译；第十七、十八章由章文波翻译；第二十一章由杜玮翻译；第二十二、二十三、二十四、二十五章由黄凤芝翻译。第一、二、三、四、五、八、九、十、十九、二十、二十二章由孙福梁审校；第六、七、十一、十二、十三、十四、十五、十六、十七、十八、二十一、二十三、二十四、二十五章由徐宗和、李茹云审校。最后全书由孙福梁统一审校。为避免在单位换算时出现数值差错，翻译时采用原书的单位符号，而在书后给出其与法定单位的换算关系。

由于译者水平有限，错误之处在所难免，恳请有关专家和读者提出批评和指正。

译者

目 录

第一篇 单自由度体系结构模型

第一章 无阻尼单自由度体系	(1)
1.1 自由度	(1)
1.2 无阻尼体系	(2)
1.3 弹簧的并联或串联	(2)
1.4 牛顿运动定律	(3)
1.5 隔离体简图	(4)
1.6 达朗贝尔原理	(5)
1.7 运动微分方程的解	(6)
1.8 频率与周期	(6)
1.9 运动的振幅	(7)
1.10 小结	(9)
习题	(10)
第二章 有阻尼单自由度体系	(12)
2.1 粘滞阻尼	(12)
2.2 运动方程	(12)
2.3 临界阻尼体系	(13)
2.4 过阻尼体系	(13)
2.5 小阻尼体系	(13)
2.6 对数衰减率	(15)
2.7 小结	(17)
习题	(17)
第三章 简谐荷载作用下单自由度体系的反应	(19)
3.1 无阻尼简谐激励	(19)
3.2 有阻尼简谐激励	(20)
3.3 共振时阻尼的计算	(25)
3.4 带宽法(半功率)计算阻尼	(25)
3.5 对支承运动的反应	(26)
3.6 传给基础的力	(29)
3.7 地震仪	(31)
3.8 小结	(32)
习题	(33)
第四章 一般动力荷载作用下的反应	(35)
4.1 冲击荷载和杜哈梅积分	(35)
4.2 杜哈梅积分的数值计算——无阻尼体系	(39)
4.3 杜哈梅积分的数值计算——有阻尼体系	(41)
4.4 由直接积分求反应	(42)

4.5	由直接积分求反应——程序 2	(46)
4.6	对冲击激励的反应——程序 3	(48)
4.7	小结	(51)
	习题	(52)
第五章	付里叶分析和频域反应	(55)
5.1	付里叶分析	(55)
5.2	用付里叶级数表示的荷载作用下的反应	(55)
5.3	分段线性函数的付里叶系数	(57)
5.4	付里叶级数的指数形式	(58)
5.5	离散付里叶分析	(58)
5.6	快速付里叶变换	(60)
5.7	频域反应——程序 4	(62)
5.8	小结	(66)
	习题	(66)
第六章	广义坐标和瑞利法	(68)
6.1	虚功原理	(68)
6.2	广义单自由度体系——刚体	(68)
6.3	广义单自由度体系——分布弹性体	(70)
6.4	瑞利法	(76)
6.5	改进的瑞利法	(80)
6.6	剪力墙	(82)
6.7	小结	(84)
	习题	(84)
第七章	结构的非线性反应	(87)
7.1	非线性单自由度模型	(87)
7.2	非线性运动方程的积分	(88)
7.3	线性加速度逐步积分法	(89)
7.4	弹塑性特性	(91)
7.5	弹塑性单自由度体系的逐步求解法	(92)
7.6	弹塑性特性的反应——程序 5	(94)
7.7	小结	(96)
	习题	(97)
第八章	反应谱	(99)
8.1	反应谱绘制	(99)
8.2	支座受激振的反应谱	(100)
8.3	三联反应谱	(102)
8.4	弹性设计反应谱	(103)
8.5	非弹性体系的反应谱	(106)
8.6	非弹性设计反应谱	(108)
8.7	地震反应谱——程序 6	(112)
8.8	小结	(114)
	习题	(114)

第二篇 结构剪切模型

第九章 多层剪切结构	(116)
9.1 剪切结构的刚度方程	(116)
9.2 剪切结构的柔度方程	(118)
9.3 刚度矩阵和柔度矩阵的关系	(118)
9.4 剪切结构模型——程序 7	(119)
9.5 小结	(120)
习题	(120)
第十章 剪切结构的自由振动	(122)
10.1 固有频率和标准振型	(122)
10.2 标准振型的正交性	(125)
10.3 自振频率和标准振型——程序 8	(127)
10.4 小结	(128)
习题	(129)
第十一章 剪切结构的强迫运动	(131)
11.1 振型叠加法	(131)
11.2 剪切结构对基底运动的反应	(135)
11.3 由振型叠加求反应——程序 9	(139)
11.4 简谐力的激振	(140)
11.5 简谐反应——程序 10	(143)
11.6 组合最大振型反应	(145)
11.7 小结	(145)
习题	(146)
第十二章 剪切结构的有阻尼运动	(148)
12.1 有阻尼剪切结构的方程	(148)
12.2 有阻尼非耦合方程	(149)
12.3 有阻尼非耦合的条件	(149)
12.4 由振型阻尼比求绝对阻尼——程序 11	(154)
12.5 小结	(155)
习题	(155)
第十三章 动力矩阵的简化	(156)
13.1 静力凝聚	(156)
13.2 用于动力问题的静力凝聚	(158)
13.3 动力凝聚	(164)
13.4 改进的动力凝聚法	(169)
13.5 动力问题的简化——程序 12	(170)
13.6 小结	(172)
习题	(172)

第三篇 离散多自由度体系结构框架模型

第十四章 梁的动力分析	(174)
14.1 梁段的静力特性	(174)
14.2 体系的刚度矩阵	(177)

14.3	集中质量的惯性特征	(179)
14.4	一致质量的惯性特征	(180)
14.5	阻尼特性	(183)
14.6	外部荷载	(183)
14.7	几何刚度	(184)
14.8	运动方程	(186)
14.9	单元节点力	(191)
14.10	梁结构模型——程序 13	(192)
14.11	小结	(193)
	习题	(194)
第十五章	平面框架的动力分析	(196)
15.1	轴向效应的单元刚度矩阵	(196)
15.2	轴向效应的单元质量矩阵	(197)
15.3	坐标变换	(200)
15.4	平面框架结构模型——程序 14	(205)
15.5	小结	(207)
	习题	(207)
第十六章	网格结构动力分析	(209)
16.1	局部坐标系和整体坐标系	(209)
16.2	扭转效应	(209)
16.3	网格单元的刚度矩阵	(210)
16.4	网格单元的一致质量矩阵	(211)
16.5	网格单元的集中质量矩阵	(211)
16.6	坐标变换	(211)
16.7	网格框架结构模型——程序 15	(215)
16.8	小结	(217)
	习题	(217)
第十七章	三维框架结构	(219)
17.1	单元刚度矩阵	(219)
17.2	单元质量矩阵	(220)
17.3	单元阻尼矩阵	(221)
17.4	坐标变换	(221)
17.5	运动微分方程	(225)
17.6	动力反应	(225)
17.7	结构的三维框架模型——程序 16	(226)
17.8	小结	(227)
	习题	(227)
第十八章	桁架的动力分析	(229)
18.1	平面桁架的刚度矩阵和质量矩阵	(229)
18.2	坐标变换	(230)
18.3	平面桁架结构模型——程序 17	(233)
18.4	空间桁架的刚度矩阵和质量矩阵	(235)
18.5	空间桁架运动方程	(237)
18.6	空间桁架结构模型——程序 18	(237)

18.7 小结	(239)
习题	(239)
第十九章 多自由度体系的时程反应	(240)
19.1 增量的运动方程	(240)
19.2 Wilson- θ 法	(240)
19.3 用 Wilson- θ 法求解线性系统的逐步求解算法	(242)
19.4 用逐步积分求反应——程序 19	(245)
19.5 Newmark- β 法	(246)
19.6 框架结构的弹塑性特性	(247)
19.7 构件的刚度矩阵	(247)
19.8 构件的质量矩阵	(249)
19.9 塑性铰的转动	(250)
19.10 杆件延性比的计算	(250)
19.11 小结	(251)
习题	(251)

第四篇 具有分布特性的结构模型

第二十章 具有分布特性系统的动力分析	(253)
20.1 均匀梁的弯曲振动	(253)
20.2 自由振动运动方程的解	(254)
20.3 均匀梁的自振频率和振型	(255)
20.4 标准振型的正交条件	(261)
20.5 梁的受迫振动	(262)
20.6 梁的动应力	(265)
20.7 小结	(266)
习题	(267)
第二十一章 连续体系的离散化	(269)
21.1 有弯曲效应的动力矩阵	(269)
21.2 有轴向效应的动力矩阵	(270)
21.3 有扭转效应的动力矩阵	(272)
21.4 有轴向力效应的梁的弯曲	(273)
21.5 有弯曲效应的动力矩阵的幂级数展开	(275)
21.6 有轴向和扭转效应的动力矩阵的幂级数展开	(276)
21.7 有轴向力效应的动力矩阵的幂级数展开	(277)
21.8 小结	(277)

第五篇 随机振动

第二十二章 随机振动	(278)
22.1 随机函数的统计描述	(278)
22.2 正态分布	(280)
22.3 瑞利分布	(281)
22.4 相关性	(282)
22.5 付里叶变换	(283)
22.6 频谱分析	(284)

22.7 谱密度函数	(287)
22.8 窄带与宽带随机过程	(288)
22.9 随机激励反应	(290)
22.10 小结	(294)
习题	(295)

第六篇 地震工程

第二十三章 等效静侧向力法——《1985 统一建筑规范》介绍	(297)
23.1 地震地面运动	(297)
23.2 等效侧向地震力	(298)
23.3 侧向地震力的分布	(303)
23.4 水平扭矩	(303)
23.5 倾覆力矩和层间剪力	(304)
23.6 层间侧移	(304)
23.7 隔板力	(304)
23.8 UBC-85 规范——程序 22	(307)
23.9 设计过程	(312)
23.10 小结	(314)
习题	(314)
第二十四章 等效静侧向力法——《1988 统一建筑规范》介绍之一	(317)
24.1 抗震设计方法	(317)
24.2 静侧向力法	(317)
24.3 侧向力分布	(320)
24.4 层间剪力	(320)
24.5 水平扭矩	(320)
24.6 倾覆力矩	(321)
24.7 层间侧移限制	(321)
24.8 $P-\Delta$ 效应	(321)
24.9 隔板设计力	(322)
24.10 等效静侧向力法——UBC-88 程序 23	(325)
24.11 小结	(329)
习题	(329)
第二十五章 动力法——《1988 统一建筑规范》介绍之二	(330)
25.1 建筑物的地震振型反应	(330)
25.2 总设计值	(334)
25.3 动力法——UBC-88 条例	(335)
25.4 结果标定	(336)
25.5 动侧向力法——UBC-88 程序 24	(339)
25.6 小结	(343)

附 录

I. 习题答案	(344)
II. 计量单位换算	(346)

第一篇 单自由度体系结构模型

第一章 无阻尼单自由度体系

工程问题通常不可能得到精确的数学解。事实上，只有在某些简单的情况下，才能得到解析解。对涉及复杂材料特性、荷载和边界条件的一些问题，工程师将引入认为需要的各种假设和理想化条件，以使其既能进行数学处理，又能从安全和经济的观点提供足够的近似解和满意的结果。这种实际结构体系与数学上的合理解之间的联系和结合就是靠数学模型来体现的。所以，数学模型可以理解为是对实际问题做了各种假设而得到的理想化体系的一种形象表达。

1.1 自由度

在结构动力学中，确定一结构体系在某时刻的方位或位置所需的独立坐标数称为自由度。通常，一个连续的结构具有无限自由度。但是，理想化或选择一恰当的数学模型，允许将自由度数简化为某一离散数，在某些情况下，则恰好简化为单自由度。图 1.1 给出了结构动力分析中可以表示成单自由度体系的几种结构，即把这几种结构都模拟为只具有一个位移坐标的体系，这些单自由度体系，可很方便地用图 1.2 所示的数学模型来描述，它包括下列单元：

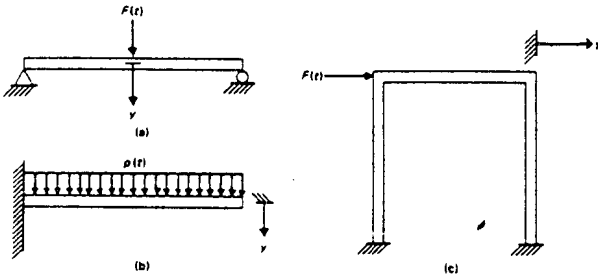


图 1.1 简化为单自由度体系的结构

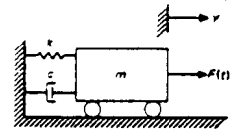


图 1.2 单自由度体系的数学模型

- (1) 质量块 m ，用来表示结构的质量和惯性特性；
- (2) 弹簧系数 k ，用来表示结构的弹性回复力和势能；
- (3) 阻尼器 c ，用来表示结构的摩擦特性和能量损耗；
- (4) 激励荷载 $F(t)$ ，用来表示作用于结构体系上的外力，力 $F(t)$ 通常可写成时间函数的形式。

在采用如图 1.2 所示的数学模型时，我们假设该体系的每一单元只表示一个特性，即质量 m 仅表示惯性特性，而不表示弹性或能量耗散；弹簧系数 k 只表示弹性，而不表示

惯性或能量耗散；阻尼器 c 只表示能量耗散。读者一定意识到，在自然界，这种“纯”单元是根本不存在的，数学模型只是把实际结构概略地理想化。因此，数学模型可以提供模型自身的全面而精确的描述，但仅是实际结构体系特性有限的或近似的表达。尽管如此，从实用的观点出发，通过数学模型分析所得到的信息，对充分了解实际结构体系的动力特性，包括设计和安全要求，还是足够的。

1.2 无阻尼体系

我们先从最基本的简单体系——单自由度体系着手进行结构动力研究。在这个体系中，可不计或“忽略”摩擦力或阻尼。此外，体系运动或振动时，不受外部运动或力的作用。在这些条件下，体系运动时只受所谓初始条件的控制。初始条件即所研究的体系在时间 $t=0$ 时所给定的位移和速度。这种无阻尼的单自由度体系通常称为简单无阻尼振子。通常以图 1.3a,b 或一些类似的形式来表达。这两个图所表示的数学模型在动力特性上是等价的。只是在使用时根据具体情况选择这个或那个。在这些模型中，质量 m 受弹簧 k 的约束，且只能沿一个坐标轴的方向做直线运动。

弹簧的力学特性由作用其自由端的力 F_s 的大小与所产生的位移 y 之间的关系来描述。如图 1.4 表示的三种不同弹簧的力与位移关系，曲线(a)表示的是一种“硬弹簧”特性。当弹簧变形时，要想使其产生给定的位移，就需施加更大的力。第二种弹簧(b)为线性弹簧，其变形与外力成正比，其特性曲线为直线。线性弹簧的力与位移之间的比例常数[直线(b)的斜率]，称为弹簧常数，通常用字母 k 表示。这样可把线性弹簧的力与位移之间的关系写为下式：

$$F_s = ky \quad (1.1)$$

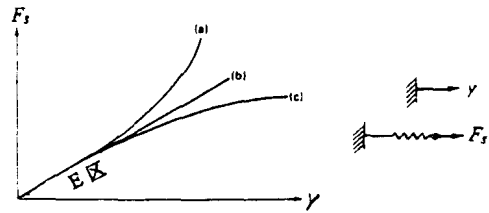
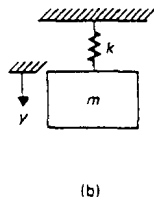
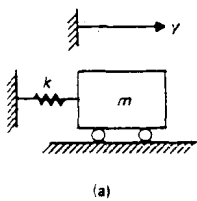


图 1.3 单自由度体系数学模型的两表示

图 1.4 力与位移的关系曲线
(a) 硬弹簧；(b) 线性弹簧；(c) 软弹簧

图 1.4 中曲线(c)所示的那种弹簧称为“软弹簧”。对这种弹簧，随着弹簧变形的增加，所需的力的增量越来越小。毋庸置疑，从前面揭示的实际结构体系的数学模型可知，线性弹簧是一种最简单的分析处理问题的模型。因此，大多数结构动力学文献中用线性弹簧来模拟，也就不会感到奇怪了。换句话说，或者是因为结构体系的弹性特性实际上基本是线性的，或者是由于分析研究的方便，通常假设结构体系的力-位移特征是线性的。应注意到，在许多情况下，由外力或扰动作用在结构上所产生的位移是较小的(图 1.4 中的 E 区)。所以线性近似是接近于实际结构的。

1.3 弹簧的并联或串联

有时，对二个或更多的弹簧并联如图 1.5a 或串联如图 1.5b 的体系，需确定其等效的弹簧常数。

两个并联的弹簧，在其一端产生单位相对位移所需的总力，等于它们弹簧常数的和。

这个总力可定义为等效弹簧常数 k_e 并表示为

$$k_e = k_1 + k_2 \quad (1.2)$$

对 n 个弹簧并联通常表示为

$$k_e = \sum_{i=1}^n k_i \quad (1.3)$$

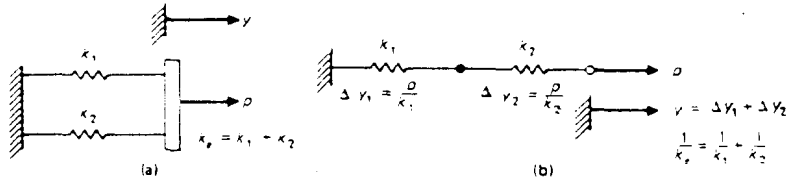


图 1.5 弹簧组合

(a) 弹簧并联; (b) 弹簧串联

如图 1.5.b 所示, 对两个串联弹簧, 外力 P 在弹簧中产生的相对位移分别是

$$\Delta y_1 = P/k_1, \quad \Delta y_2 = P/k_2$$

这样, 组合弹簧自由端的总位移 y 就等于 $y = \Delta y_1 + \Delta y_2$, 代入 Δy_1 和 Δy_2 则

$$y = P/k_1 + P/k_2 \quad (1.4)$$

从而, 产生一单位位移所需的力(等效弹簧常数)为

$$k_e = P/y$$

把上式中的 y 代入式(1.4), 可方便地将等效弹簧常数的倒数表示为

$$1/k_e = 1/k_1 + 1/k_2 \quad (1.5)$$

对 n 个弹簧串联, 通常等效弹簧常数可由下式得出:

$$1/k_e = \sum_{i=1}^n 1/k_i \quad (1.6)$$

1.4 牛顿运动定律

我们继续研究图 1.3 所示的简单振子, 目的是为了描述其运动即对于在 $t=0$ 时, 对于给定的初始条件, 计算质点 m 在任意时间 t 的位移和速度。位移 y 和时间 t 之间的解析关系式, 可以按牛顿运动第二定律给出, 其表达式如下:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1.7)$$

式中, \vec{F} 是作用于质点 m 上的合力; \vec{a} 是合加速度。应看到, 式(1.7)是一个矢量关系式。因此, 可将其沿 x , y 和 z 坐标轴方向的分量写成等价形式如下:

$$\Sigma F_x = ma_x, \quad \Sigma F_y = ma_y, \quad \Sigma F_z = ma_z \quad (1.8a, b, c)$$

加速度定义为位移矢量对时间的二阶导数。由此可见, 式(1.8)实际上就是微分方程式。我们应该记住, 牛顿规定的这些方程式, 只能直接应用于理想化为质点的物体上, 即有质量但无体积的那些物体上。然而, 正如初等力学证明的那样, 牛顿运动定律也可直接应用到作平动的具有有限尺寸的物体上。

对刚体的平面运动, 如该刚体相对于运动参考平面(x - y 平面)是对称的, 则牛顿运动

定律可导出下式:

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x, \Sigma F_y = m(a_G)_y, \Sigma M_G = I_G \alpha \quad (1.9a, b, c)$$

在上述方程式中, $(a_G)_x$ 和 $(a_G)_y$ 是通过物体质量中心 G 沿 x 轴和 y 轴的加速度分量; α 是角加速度; I_G 是对于通过质量中心 G 点的轴线的质量惯性矩; ΣM_G 是所有作用于物体上的力相对于垂直 $x-y$ 平面且通过 G 点的轴线的力矩和。当然, 式 (1.9) 也可应用于绕固定轴作纯转动的刚体运动上。对于这种平面运动的特殊形式, 式 (1.9c) 可以用下式代替:

$$\Sigma M_0 = I_0 \alpha \quad (1.9d)$$

式中, 质量惯性矩 I_0 和力矩 M_0 视通过的固定转动轴来确定。一个刚体的总运动要通过两个矢量方程来描述, 一个表示力与质量中心加速度之间的关系, 另一个表示力矩与物体转动关系。这后一个方程用它的标量分量来表示是相当复杂的, 但在结构动力学中很少用到。

1.5 隔离体简图

这里, 有可能探索一种有助于既有条理又系统分析求解结构动力学问题的分析方法。在任何动力学分析中, 首要的, 可能也是最重要的是在写出体系的数学表达式之前, 画出体系的隔离体简图。

大家或许还记得, 隔离体简图(FBD)是与所有其他物体分离的一个物体的简图, 图中表示了作用于该物体上的全部外力。举例来说, 图 1.6b 给出了质量 m 的振子的隔离体简图, 它位于坐标 y 的正方向, 其上作用弹簧力 $F_s = ky$ (假设为线性弹簧), 尽管沿竖向作用的物体重力 mg 和支承面上的反作用力 N 在 y 方向的运动方程中并不体现, 但仍标在图上。由牛顿运动定律给出

$$-ky = m\ddot{y} \quad (1.10)$$

式中, 作用于负方向的弹簧力用“-”表示; 加速度用 \ddot{y} 表示。这种双上点记号表示对时间的二阶导数。显然, 用一个上点记号, 则表示对时间的一阶导数, 即速度。

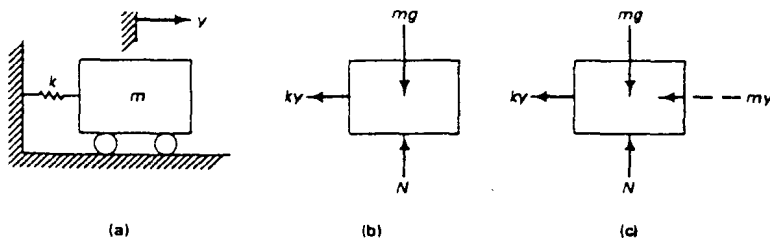


图 1.6 隔离体简图

(a) 单自由度体系; (b) 只表示外力; (c) 表示外力和惯性力

1.6 达朗贝尔原理

得到方程(1.10)的另一种方法, 是利用达朗贝尔原理。该原理表明, 把惯性力作为附加的虚拟力, 可使体系处于动力平衡状态。

图 1.6c 给出的该隔离体简图还包括惯性力 $m\ddot{y}$ 。该力等于质量乘以加速度, 方向总是

与相应的坐标轴方向相反。应用达朗贝尔原理，允许我们在求解运动方程时使用平衡方程。例如，图 1.6c 中， y 方向的合力直接由下式给出：

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (1.11)$$

显然该式等价于式(1.10)。

在此情况下应用达朗贝尔原理似乎意义不大。但是对于更复杂的问题，同时应用达朗贝尔原理和虚功原理，则会成为有效的分析手段。正如后面所述，虚功原理可直接应用到任何平衡体系中。只要应用达朗贝尔原理建立了体系的动力平衡方程，就可用虚功原理对动力问题求解。

[例 1.1] 如图 1.7a,b 所示，由弹簧支承的相同物体分别作竖向运动和沿水平方向的振动。证明它们的微分方程是相同的。

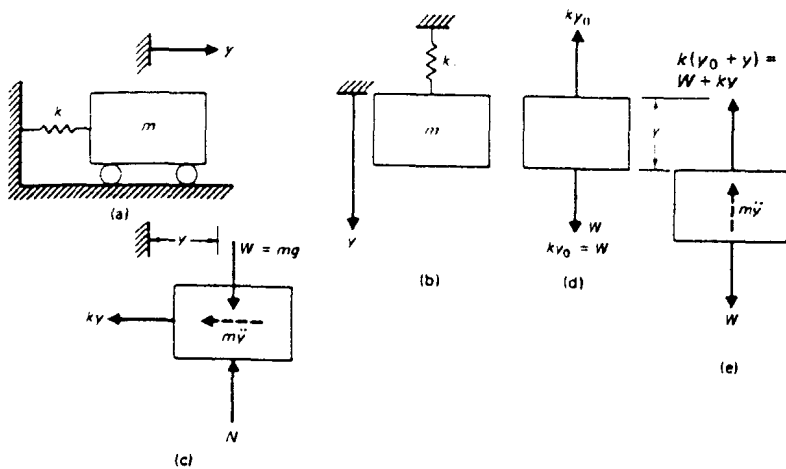


图 1.7 两种简单振子及其相应的隔离体简图

解：图 1.7c,d 给出了这两种简单振子的隔离体简图，图中都包括惯性力。在图 1.7c 中， y 方向的合力等于零，故

$$m\ddot{y} + ky = 0 \quad (a)$$

当图 1.7d 的物体处于静力平衡位置时，弹簧被拉长 y_0 ，物体受到一向上的力 $ky_0 = W$ 作用（式中 W 为物体的重量）。当该物体从平衡位置向下移动距离 y 时，弹簧力为 $F_s = k(y_0 + y)$ ，或者 $F_s = W + ky$ ， $ky_0 = W$ 。将此关系绘到图 1.7e 中应用牛顿第二运动定律，得

$$-(W + ky) + W = m\ddot{y} \quad (b)$$

即

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

此方程与方程(a)相同。

1.7 运动微分方程的解

下一步的目标是求微分方程式(1.11)的解。我们用通常的步骤，首先考查微分方程的类别。在方程(1.11)中，因变量 y 和它的二阶导数 \ddot{y} 都是一次的，故这个方程可划为二阶

线性方程。事实上，由于 y 和 \dot{y} 的系数(分别为 k 和 m)都是常数，方程右端为零，因此可将该方程进一步划为常系数齐次方程。我们也许都记得，任意次的线性微分方程(齐次的或非齐次的)都有通解。对于本例这种简单的二阶微分方程，我们可以直接用式(1.12)或式(1.13)假定的试凑解：

$$y = A \cos \omega t \quad (1.12)$$

$$y = B \sin \omega t \quad (1.13)$$

式中， A 和 B 是与运动初始条件有关的常数； ω 是表示该体系结构特性的参数（这些在以后再详述）。把式(1.12)代入方程(1.11)得

$$(-m\omega^2 + k)A \cos \omega t = 0 \quad (1.14)$$

如果该方程在任何时刻都成立，则括号中的系数一定等于零，或

$$\omega^2 = k / m \quad (1.15)$$

可以证明，在 ω 同样满足式(1.15)的情况下，方程(1.13)也是微分方程(1.11)的一个解。方程(1.15)的正根

$$\omega = \sqrt{k / m} \quad (1.16)$$

称作体系的固有频率，后面将清晰地给出其含义。

由于式(1.12)或式(1.13)是方程(1.11)的解，并且由于这个微分方程是线性的，因此，如式(1.17)所示，这两个解的叠加也是方程(1.11)的解，实际上含有两个积分常数 A 和 B 的式(1.17)就是这个二阶微分方程的通解：

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (1.17)$$

速度 \dot{y} 的表达式，可简单地将式(1.17)对时间微分得到

$$\dot{y} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \quad (1.18)$$

下面，我们确定积分常数 A 和 B 。这两个常数可由体系运动中的初始值，即在时间 $t = 0$ 时的初始运动的位移 y_0 和速度 v_0 来求得。这两个条件称为初始条件，这种用初始条件求解微分方程的问题又叫做初始值问题。

当 $t = 0$ 时，把 $y = y_0$ 和 $\dot{y} = v_0$ 代入式(1.17)和式(1.18)可得

$$y_0 = A, \quad v_0 = B\omega \quad (1.19a, b)$$

最后，将从式(1.19)中得到的 A 和 B 代入式(1.17)，即可得出

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (1.20)$$

上式就是简单振子的位移 y 随时间变量 t 的函数表达式。这样，我们就实现了用单自由度体系来模拟结构无阻尼简谐振动的目的。

1.8 频率与周期

从式(1.20)可以看出，由该式所描述的运动是简谐运动。因此也是周期性运动。这就是说，可以用同一频率 ω 的正弦或余弦函数来表达。因为正弦和余弦函数都具有同一周期 2π ，所以，可容易地得到这种简谐运动的周期。按下式即可求出运动周期 T

$$\omega T = 2\pi, \quad T = 2\pi / \omega \quad (1.21)$$

通常，周期用每一个振动往复所用的时间来表示，单位是秒(s)。周期的倒数是固有

频率 f 由式(1.21)得

$$f = 1/T = \omega / 2\pi \quad (1.22)$$

固有频率 f 通常用赫兹(Hz)或周/秒(cps)表示。因为 ω 与固有频率 f 的不同仅在于把 f 乘以常数 2π , 所以有时也把 ω 叫做固有频率。为了将固有频率的这两种表示区别开来, 可把 ω 称为圆频率或角频率。在大多数情况下, 应从上下文或从单位来区别。固有频率 f 用周/秒(cps)表示; 而圆频率 ω 用弧度/秒(rad/s)表示。

[例 1.2] 求图 1.8 所示体系的固有频率。图中水平悬臂梁的一端用螺旋弹簧 k_2 吊着一重量 $W = 50.7\text{lb}$ 的物体, 悬臂梁的厚度 $t = 1/4\text{in}$, 宽度 $b = 1\text{in}$, 弹性模量 $E = 30 \times 10^6\text{psi}$, 长度 $L = 12.5\text{in}$, 弹簧刚度 $k_2 = 10.69\text{lb/in}$ 。

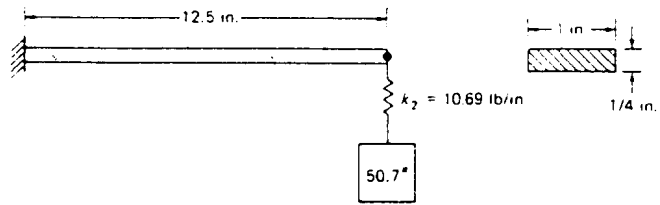


图 1.8 例 1.2 所示的体系

解: 当一静力 P 作用于悬臂梁的自由端时, 在该自由端处的挠度 Δ 可以用下式表示:

$$\Delta = PL^3 / 3EI$$

相应的弹簧常数 k_1 为

$$k_1 = P / \Delta = 3EI / L^3$$

式中, $I = (1/12)bt^3$ (对于矩形截面)。体系的悬臂梁和螺旋弹簧可看作弹簧串联, 这样, 等效弹簧常数可由方程(1.5)给出为

$$1/k_e = 1/k_1 + 1/k_2$$

代入相应的数值, 可得到

$$I = 1/12 \times 1 \times (1/4)^3 = 1/768\text{in}^4, \quad k_1 = \frac{3 \times 30 \times 10^6}{(12.5)^3 \times 768} = 60\text{ lb/in}$$

$$1/k_e = 1/60 + 1/10.69, \quad k_e = 9.07\text{ lb/in}$$

则该体系的固有频率可以由式(1.16)给出为

$$\omega = \sqrt{k_e / m} \quad (m = W / g, \quad g = 386(\text{in} / \text{s}^2))$$

$$\omega = \sqrt{9.07 \times 386 / 50.7} = 8.31\text{ (rad/s)}$$

或用式(1.22)得

$$f = 1.32\text{ cps}$$

1.9 运动的振幅

现在, 更详细地研究表示无阻尼振子的自由振动方程式(1.20)的解。用简单的三角变换, 可将该式以等价形式写出, 即

$$y = C \sin(\omega t + \alpha) \quad (1.23)$$

或
$$y = C \cos(\omega t - \beta) \quad (1.24)$$

式中