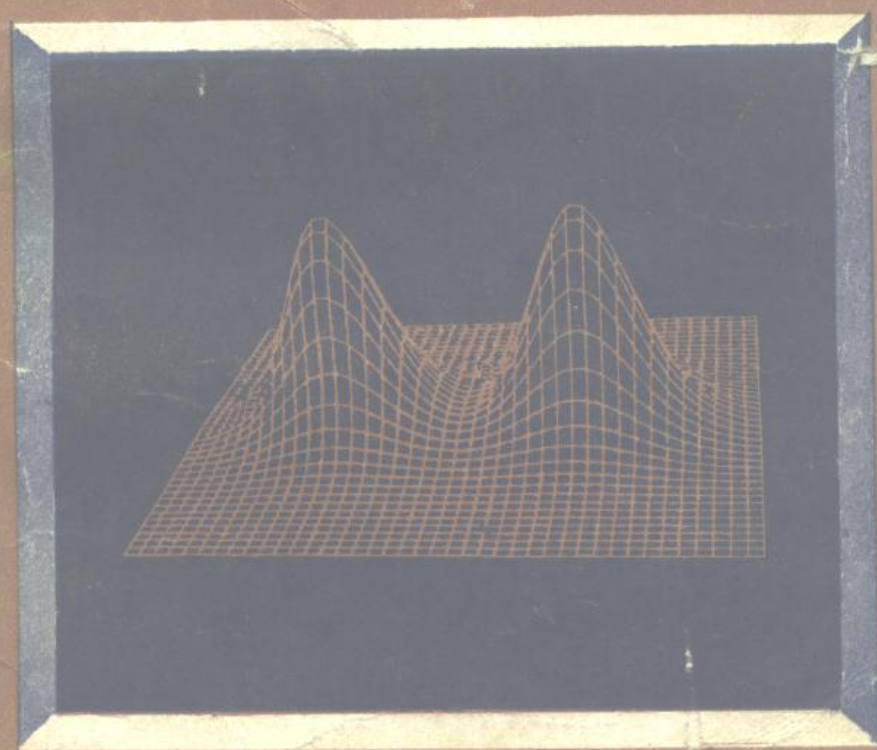


# 孤 立 子

郭柏灵 庞小峰 著



科学出版社

# 孤 立 子

郭柏灵 鹿小峰 著



研 究 生 系

1987

## 内 容 简 介

本书着重介绍了孤立子问题的由来、研究的目的、方法以及现状，并介绍了比较重要的最新研究成果，其中包括我国学者的许多成果，本书内容基本概念清晰，每章后都附有参考文献。

本书读者对象为大学数学、计算数学、物理和力学专业高年级学生，有关科研工作者和大专院校的教师。

21482/2610

## 孤 立 子

郭柏灵 庞小峰 著

责任编辑 苏芳霞

科学出版社出版

北京朝阳门内大街147号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1987年2月第一版 开本：787×1092 1/32  
1987年2月第一次印刷 印张：11 5/8  
印数：0001—3,000 字数：264,000

统一书号：13031·3395

本社书号：5001·13—1

定价：2.75 元

## 序 言

随着近代物理学和数学的发展,早在 1834 年由英国著名科学家 Russell 发现的“孤立波”现象,近十多年来引起了人们极大的关注和兴趣。现在从数值计算、理论分析和物理实验等方面都已经证实,一大批非线性进化方程都存在着孤立子解。这些孤立子间的相互作用具有非常奇特的现象,孤立子具有稳定的波形。这些新现象被利用来解释物理上出现的一些新问题。在数学上,也出现了散射反演、延拓结构、Bäcklund 变换等一些精确求解非线性进化方程特解的新方法,并已逐步形成了较为系统的有关孤立子问题的数学理论。

写这本书的主要目的是想对孤立子的基本问题和它的数学物理方法作一简要的介绍。除了有关孤立子问题的最基本的知识和概念外,也介绍了一些有关这一研究方向的最近发展概况和最新成果。我们希望这将有助于读者从浩瀚的著作和文献中,理出一些虽然比较粗但却足够明晰的线条,从而当读者对某一方面的问题发生兴趣时,就可在查阅有关参考文献的基础上开展研究工作。

下面简要介绍本书形成的始末。1978 年,作者之一编写了题为“KdV 方程和孤立子”的讲义。1979 年在全国有限元和孤立子会上,会议领导小组冯康、张学铭、屠规彰、李翊神等同志认为需要有一本介绍孤立子的书,并把编写此书的任务交给了作者。此事还得到了科学出版社同志的积极支持。于是作者便在“讲义”的基础之上开始了撰写工作,进一步查阅了有关资料,增加了原“讲义”的内容,补充了最新的一些文献,

并在数学方法和物理内容的结合上，作了一次新的尝试。但由于有关孤立子的理论问题涉及的知识十分广泛，且限于作者的水平，因此书中难免存在不妥或错误之处，敬请读者予以指正。

最后，我们要特别感谢屠规彰同志，他对编写本书给予了始终如一的关心和热情帮助，并提出了许多宝贵的意见。

作者

1984年2月于北京

# 目 录

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| 第一章 绪论 .....                                     | 1   |
| 第一节 孤立子的由来 .....                                 | 1   |
| 第二节 KdV 方程及其孤立子解 .....                           | 5   |
| 第三节 非线性 Schrödinger 方程及其他一些非线性进化方程的孤立子解 .....    | 8   |
| 第四节 孤立子的实验观察及应用 .....                            | 11  |
| 第五节 孤立子理论问题的研究 .....                             | 12  |
| 参考文献 .....                                       | 14  |
| 第二章 散射反演方法 .....                                 | 15  |
| 第一节 引言 .....                                     | 15  |
| 第二节 KdV 方程和散射反演法 .....                           | 15  |
| 第三节 Lax 算子和 Захаров, Ил'ин, AKNS 的推广 .....       | 25  |
| 第四节 更一般的进化方程 (AKNS 方程) .....                     | 33  |
| 第五节 AKNS 方程反散射问题的求解 .....                        | 41  |
| 第六节 进化方程的渐近解 ( $t \rightarrow \infty$ ) .....    | 53  |
| 第七节 散射反演法的数学理论基础 .....                           | 66  |
| 第八节 高阶和多维散射反演问题 .....                            | 86  |
| 参考文献 .....                                       | 96  |
| 第三章 孤立子的相互作用和它的渐近性质 .....                        | 98  |
| 第一节 孤立子的相互作用和 $t \rightarrow \infty$ 的渐近性质 ..... | 98  |
| 第二节 弱色散作用时 KdV 方程解的行态和 WKB 方法 .....              | 108 |
| 第三节 孤立子的稳定性问题 .....                              | 114 |
| 第四节 水波和弱非线性作用下的波动方程 .....                        | 116 |
| 参考文献 .....                                       | 124 |
| 第四章 Hirota 方法 .....                              | 125 |

|     |                                                |     |
|-----|------------------------------------------------|-----|
| 第一节 | 引言 .....                                       | 125 |
| 第二节 | $D$ 算子的某些性质 .....                              | 127 |
| 第三节 | 双线性微分方程的解 .....                                | 131 |
| 第四节 | 在 Sine-Gordon, MKdV 等方程中的应用 .....              | 132 |
| 第五节 | 双线性形式的 Bäcklund 变换 .....                       | 141 |
|     | 参考文献 .....                                     | 143 |
| 第五章 | Bäcklund 变换和无穷守恒律 .....                        | 145 |
| 第一节 | Sine-Gordon 方程和 Bäcklund 变换 .....              | 145 |
| 第二节 | 一类非线性进化方程的 Bäcklund 变换 .....                   | 150 |
| 第三节 | KdV 方程的 $B$ 变换可换性 .....                        | 157 |
| 第四节 | 高阶 KdV 方程和高维 Sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换 ..... | 160 |
| 第五节 | Benjamin-Ono 方程的 Bäcklund 变换 .....             | 163 |
| 第六节 | KdV 方程的无穷个守恒律 .....                            | 168 |
| 第七节 | AKNS 方程的无穷多个守恒量 .....                          | 171 |
|     | 参考文献 .....                                     | 175 |
| 第六章 | 多维孤立子及其稳定性 .....                               | 177 |
| 第一节 | 引言 .....                                       | 177 |
| 第二节 | 多维孤立子的存在问题 .....                               | 178 |
| 第三节 | 多维孤立子的稳定性和坍塌 .....                             | 194 |
|     | 参考文献 .....                                     | 201 |
| 第七章 | 某些非线性进化方程的数值计算方法 .....                         | 202 |
| 第一节 | 引言 .....                                       | 202 |
| 第二节 | KdV 方程的有限差分法和 Galerkin 有限元方法 .....             | 204 |
| 第三节 | 非线性 Schrödinger 方程的有限差分法 .....                 | 210 |
| 第四节 | RLW 方程的数值计算 .....                              | 215 |
| 第五节 | 非线性 Klein-Gordon 方程的数值计算 .....                 | 216 |
| 第六节 | 一类非线性波稳定性问题的数值计算 .....                         | 219 |
|     | 参考文献 .....                                     | 224 |
| 第八章 | 孤立子的几何理论 .....                                 | 226 |

|      |                                                 |     |
|------|-------------------------------------------------|-----|
| 第一节  | Bäcklund 变换和总曲率 $K = -1$ 的曲面 .....              | 226 |
| 第二节  | Lie 群和非线性进化方程 .....                             | 229 |
| 第三节  | 非线性方程的延拓结构 .....                                | 234 |
| 参考文献 | .....                                           | 240 |
| 第九章  | 非线性进化方程的整体解及其“blow up”问题 .....                  | 242 |
| 第一节  | 非线性进化方程及其积分估计方法 .....                           | 242 |
| 第二节  | KdV 方程的周期初值问题和初值问题 .....                        | 244 |
| 第三节  | 一类非线性 Schrödinger 方程组的周期初值问题 .....              | 252 |
| 第四节  | 非线性 Klein-Gordon 方程的初值问题 .....                  | 258 |
| 第五节  | RLW 方程和 Galerkin 方法 .....                       | 267 |
| 第六节  | $t \rightarrow \infty$ 时解的渐近性和“blow up”问题 ..... | 276 |
| 第七节  | Закрасов 方程组及其他一些耦合的非线性进化方程<br>组的定解问题 .....     | 281 |
| 参考文献 | .....                                           | 283 |
| 第十章  | 拓扑性孤立子和非拓扑性孤立子 .....                            | 286 |
| 第一节  | 孤立子与基本粒子 .....                                  | 286 |
| 第二节  | 拓扑和同伦论初步 .....                                  | 291 |
| 第三节  | 一维空间的拓扑性孤立子 .....                               | 298 |
| 第四节  | 二维拓扑性孤立子 .....                                  | 304 |
| 第五节  | 三维磁单极解 .....                                    | 311 |
| 第六节  | 四维空间的拓扑性孤立子——瞬子 .....                           | 318 |
| 第七节  | 非拓扑性孤立子 .....                                   | 322 |
| 第八节  | 孤立子的量子化 .....                                   | 328 |
| 参考文献 | .....                                           | 333 |
| 第十一章 | 凝聚态物理学中的孤立子 .....                               | 335 |
| 第一节  | 超导体中的孤立子运动 .....                                | 336 |
| 第二节  | 铁电体中的孤立子运动 .....                                | 349 |
| 第三节  | 关于固体的耦合系统中的孤立子 .....                            | 352 |
| 第四节  | Toda 晶格孤立子的统计力学 .....                           | 357 |
| 参考文献 | .....                                           | 362 |

# 第一章 绪 论

## 第一节 孤立子的由来

1834 年英国科学家 Scott Russell 偶然观察到了一种奇妙的水波。1844 年,他在《英国科学促进协会第14届会议报告》上发表的《论波动》一文中,对此现象作了生动的描述:“我观察过一次船的运动,这条船被两匹马拉着沿狭窄的运河迅速前进着,突然,船停了下来,而被船所推动的大堆水却并不停止,它们积聚在船头周围激烈地扰动着,然后水浪突然呈现出一个滚圆而平滑、轮廓分明的巨大孤立波峰,它以巨大的速度向前滚动着,急速地离开了船头。在行进中它的形状和速度并没有明显的改变,我骑在马上紧跟着观察,它以每小时约八、九英里的速度滚滚向前,并保持长约 30 英尺、高约 1—1.5 英尺的原始形状。渐渐地它的高度下降了。当我跟踪 1—2 英里后,它终于消失在逶迤的河道之中”。这就是 Russell 观察到的奇特现象,进而他认为这种孤立的波动是流体运动的一个稳定解,并称它为“孤立波”。Russell 当时未能成功地证明并使物理学家们信服他的论断,从而埋怨数学家未能从已知的流体运动方程预言出这一现象,之后有关孤立波的问题在当时许多物理学家中引起了广泛的争论。直到 60 年后的 1895 年, Korteweg, de Vries 研究了浅水波的运动,在长波近似和小振幅的假定下,建立了单向运动的浅水波运动方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \quad (1.1)$$

这里,  $\eta$  为波峰高度,  $l$  为水深,  $g$  为重力加速度,  $\alpha, \sigma$  均为常数。他们对孤立波现象作了较为完整的分析, 并从方程 (1.1) 求出了与 Russell 描述一致的, 即具有形状不变的脉冲状的孤立波解, 从而在理论上证实了孤立波的存在。然而这种波是否稳定? 两个孤立波碰撞后能否变形? 这些问题一直没有得到解答, 以致有些人怀疑, 认为方程 (1.1) 是非线性偏微分方程, 解的叠加原理不满足, 碰撞后两个孤立波的形状很可能会破坏殆尽。这种观点致使有不少人认为这种波“不稳定”, 在没有新的发现之前, 孤立波处于长期被埋没之中。

另外一个问题是, 象 Russell 讲的这种孤立波是否在流体力学之外的其他物理领域中出现呢? 在二十世纪的初叶这也是使人捉摸不定的问题。一直到五十年代, 由于 Fermi, Pasta 和 Ulam 的工作, 才出现了新的局面。他们将 64 个质点用非线性弹簧连接成一条非线性振动弦, 初始时这些谐振子的所有能量都集中其一, 其他 63 个的初始能量均为零。按照经典的理论认为: 只要非线性效应存在, 就会有能量均分, 各态历经等现象出现, 即任何微弱的非线性相互作用, 可导致系统由非平衡状态向平衡状态过渡。但实际计算的结果却使他们大吃一惊, 即上述达到能量平衡的观念是错误的。实际上, 从图 1-1 可以看到, 经过很长时间以后, 几乎全部能量又回到了原先的初始分布, 这就是著名的 FPU 问题。当时由于只在频率空间来考察, 未能发现孤立波解, 所以该问题未得到正确的解释。后来人们把晶体看成具有质量的弹簧拉成的链条, 并近似模拟这种情况, Toda 研究了这种模式的非线性振动, 果然得到了孤立波解, 使 FPU 问题得到正确的解答, 从而进一步激起了人们对孤立波研究的兴趣。

随后, 1962 年 Perring 和 Skyrme 将 Sine-Gordon 方程用于研究基本粒子时, 数值计算结果表明: 这样的孤立波并

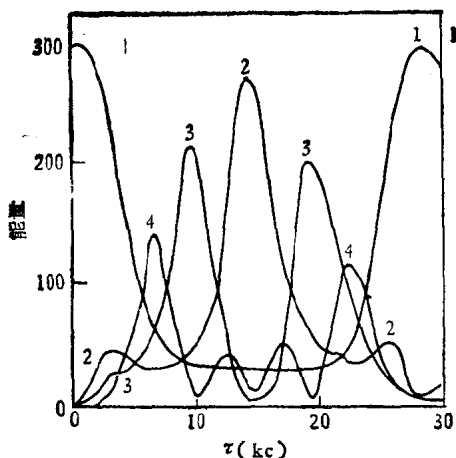


图 1-1 FPU 问题的能量曲线。单位任意,弦的初始形式是单正弦波。

不散开,即使两个孤立波碰撞后也仍保持原有的形状和速度。

1965 年美国著名科学家 Zabusky 和 Kruskal 用数值模拟方法详细地考察了等离子体中孤立子碰撞的非线性相互作用过程,得到了比较完整和丰富的结果,并进一步证实了孤立子相互作用后不改变波形的论断。他们的这些结果使人们感到惊喜。

由于得到的上述结果,以及在许多物理模型中相继发现都存在这种碰撞后具有不改变波形的稳定的孤立波的事实,从而使许多物理学家和数学家对此产生了极大的兴趣和注意,开始掀起了对孤立子问题研究的热潮,并逐步形成了较为完整的孤立子理论。

那么,究竟什么是“孤立子”呢?通常我们把非线性发展方程的局部行波解,称为“孤立波”。所谓“局部的”,是指微分方程的解在空间的无穷远处趋于零或确定常数的情况。我们把这些稳定的孤立波,即通过相互碰撞后的、不见消失而且波

形和速度也不会改变或者只有微弱的改变（就像常见的两个粒子的碰撞一样）的孤立波称为“孤立子”。但也有个别的文章和书把孤立子和孤立波混为一谈。

在物理上，也有把孤立子定义为经典场方程的一个稳定的有限能量的不弥散的解，即如果以  $\rho(x, t)$  表示孤立子的能量密度，则有

$$0 < H = \int \rho(x, t) d^m x < +\infty \quad (\text{其中 } m \text{ 为空间的维数}),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max \rho(x, t) \neq 0 \quad (\text{对某些 } x)$$

这就是说，孤立子可看成场能不弥散，一个有限的稳定“团块”，即使在运动或碰撞中，它也不受到破坏。对于一大批非线性波动方程和方程组，它们的孤立子一般具有如图 1-2 中 (a), (b), (c), (d) 四种形状，分别叫钟型(或波包型)、涡旋型(反钟型)、扭结型(结状)、反扭结型(反结状)。

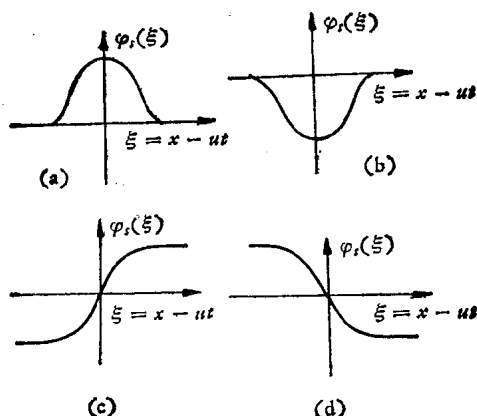


图 1-2 孤粒子类型。

$\varphi_s(\xi)$  表示行波解， $\xi = x - ut$  ( $u$  是波速，为常数)。

李政道等人基于对基本粒子的研究，又把现有的孤立子

分成二类：拓扑性孤立子和非拓扑性孤立子。关于它们的定义及详细情况我们将在第十章专门来阐述，并对李政道等人对非拓扑性孤立子的研究工作作一简要的介绍。

## 第二节 KdV 方程及其孤立子解

如前所述,1895 年 Korteweg 和 de Vries 建立了浅水波方程(1.1),我们对它稍作改变,可得如下形式

$$u_t + uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad (2.1)$$

其中,常数  $\mu$  可正可负。若  $\mu < 0$  时,作变换  $u \rightarrow -u$ ,  $x \rightarrow -x$ ,  $t \rightarrow t$ , 则(2.1)可变为

$$u_t + uu_x - \mu u_{xxx} = 0 \quad (2.2)$$

因此恒可设  $\mu > 0$ 。人们将(2.1)称为 KdV 方程。

令  $u(x, t) = u(\xi)$ ,  $\xi = x - Dt$ ,  $D = \text{const}$ , 代入(2.1), 并对  $\xi$  积分二次可得

$$3\mu \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 = -u^3 + 3Du^2 + 6Au + 6B = f(u) \quad (2.3)$$

其中,  $A, B$  为积分常数。(2.3)的解仅当  $f \geq 0$  时才可能是实的 ( $\mu > 0$ )。如果  $f(u)$  仅有一个实根,则它是无界的。现在我们设函数  $f(u)$  有三个实根,即  $f(u) = -(u - c_1)(u - c_2)(u - c_3)$ , 其中  $c_1 < c_2 < c_3$ 。由此推出:  $D = \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + c_3)$ ,  $A = \frac{1}{6}(c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1)$ ,  $B = \frac{1}{6}c_1c_2c_3$ 。函数  $f(u)$  的一般形式如图 1-3 中的曲线  $A$  所示。(2.3)的精确解能表为雅可比椭圆函数

$$u = u(x, t) = c_2 + (c_3 - c_2)c_n^2 \left[ \sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12\mu}} \right]$$

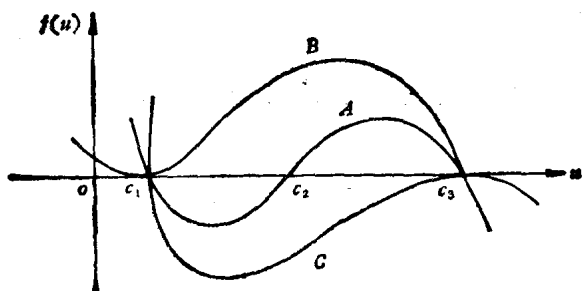


图 1-3

$$\left\{ x - \frac{1}{3} (c_1 + c_2 + c_3)t \right\}; k \right] \quad (2.4)$$

其中,  $k^2 = (c_3 - c_2)/(c_3 - c_1)$ 。周期波列方程(2.4)通常被称为“Cnoidal”波,因函数  $\text{cn}$  的实周期为  $2K$ ,  $K$  为第一类椭圆积分,因此“Cnoidal”波的周期为  $T_r = 4K \sqrt{\frac{3\mu}{c_3 - c_1}}$ 。

当  $K = 0$  时,  $\text{cn}(\xi, 0) = \cos \xi$ , 此时方程式(2.3)具有振动解

$$u = \bar{c} + a \cos \left[ 2 \sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12\mu}} \left\{ x - \frac{1}{3} (c_1 + c_2 + c_3)t \right\} \right] \quad (2.5)$$

其中,  $\bar{c} = \frac{c_2 + c_3}{2}$ ,  $a = \frac{c_3 - c_2}{2}$ 。

当  $K = 1$  时,  $\text{cn}(\xi, 1) = \text{sech} \xi$ ; 即当  $c_2 \rightarrow c_1$  时, 如图 1-3 中曲线 B, 此时周期变成无穷大, 得到 KdV 方程(2.1)常见的孤立子解

$$u = c_1 + (c_3 - c_1) \text{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12\mu}} \left\{ x - \frac{1}{3} (2c_1 + c_3)t \right\} \right] \quad (2.6)$$

若设  $c_1 = u_\infty$ ,  $c_3 - c_1 = a$ , 则(2.6)变成

$$u = u_{\infty} + a \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{a}{12\mu}} \left\{ x - \left( u_{\infty} + \frac{a}{3} \right) t \right\} \right] \quad (2.7)$$

这里,  $u_{\infty}$  表示在无穷远处的均匀态,  $a$  表示孤立子的振幅。从 (2.7) 可以看出, 这种孤立波的相对于均匀态的速度, 是正比于振幅的, 而波的宽度反比于振幅的平方根, 且振幅与均匀态无关。若  $u_{\infty} = 0$ ,  $\mu = 1$ , 则从 (2.7) 可得

$$u(x, t) = 3D \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{D}{2}} (x - Dt) \quad (2.8)$$

如图 1-4 所示。

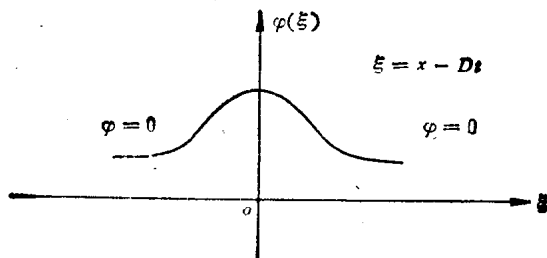


图 1-4

现在不断发现, 相当广泛的一批描述弱非线性作用下的波动方程和方程组, 在长波近似和小的且为有限的振幅假定下, 均可归结为 KdV 方程。例如: (1) 冷等离子体的磁流体波的运动; (2) 非谐振晶格的振动; (3) 等离子体的离子声波; (4) 在弹性杆中的纵向色散波动; (5) 在液、气两种混合态的压力波运动; (6) 在一个管底下部的流体的转动; (7) 在低温下非线性晶格的声子波包的热激发等。

### 第三节 非线性 Schrödinger 方程及其他一些 非线性进化方程的孤立子解

立方非线性 Schrödinger 方程为

$$iu_t + u_{xx} + v|u|^2u = 0 \quad (3.1)$$

或更一般的形式

$$u_t - \gamma u_{xx} = \chi u - \beta |u|^2 u \quad (3.2)$$

其中,  $\beta = \beta_0 + i\beta_1$ ,  $\gamma = \gamma_0 + i\gamma_1$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$ ,  $\chi, v$  均为实常数。在许多物理问题中均发现此类方程。例如, 在细束流(非线性光学)中, 有方程

$$2ik \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nabla_{\perp}^2 \psi + \frac{n_2}{n_0} k^2 |\psi|^2 \psi = 0 \quad (3.3)$$

其中,  $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $m = 0$  为平面;  $m = 1$  为柱对称。  
 $\psi = ae^{ik\theta}$ ,  $\theta = kx - \omega t + k_s(x, r)$ ,  $k$  为波数,  $n = \frac{c_0 k}{\omega} = n_0 + \frac{1}{2} n_2 a^2$ 。对于二维流, 有方程

$$\frac{n_2}{n_0} k^2 |\psi|^2 \psi = -2ki\psi_x - \psi_{xx} - \psi_{yy} \quad (3.4)$$

其他如: 等离子体的 Langmuir 波; 一维单色波的自调制; 二维定态平面波的自聚焦; 在非相对论下, 超导电子对在电磁场中运动的 Ginzburg-Landau 方程等均可用非线性 Schrödinger 方程来描述。

现考虑方程(3.1)的行波解。令

$$u(x, t) = e^{irx - is t} v(\xi), \quad \xi = x - Dt$$

其中,  $r, s$  均为待定常数,  $D = \text{const.}$  将此  $u$  的表达式代入(3.1), 可得  $v$  的常微分方程

$$v'' + i(2r - D)v' + (s - r^2)v + v|v|^2v = 0 \quad (3.5)$$

现取  $r = \frac{D}{2}, s = \frac{D^2}{4} - \alpha (\alpha > 0)$ , 消去  $v'$  ( $v$  为实的), 得

$$v'' - \alpha v - v v^3 = 0 \quad (3.6)$$

积分后, 得

$$v'^2 = A + \alpha v^2 - \frac{v}{2} v^4 \quad (3.7)$$

当  $v > 0, A = 0$  时, 可得

$$v(x, t) = \left(\frac{2\alpha}{v}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech} \alpha(x - Dt) \quad (3.8)$$

显然,  $|u|^2 \propto \operatorname{sech}^2 \alpha(x - Dt)$ , 称  $v(x, t)$  为包络孤立波, 现考察方程(3.1)更一般的形式解

$$u(x, t) = \Phi(x, t) e^{i\theta(x, t)} \quad (3.9)$$

其中,  $\Phi, \theta$  均为实函数, 并称  $\theta$  为载波,  $\Phi$  为包络波. 将式(3.9)代入式(3.1), 分开实部和虚部可得

$$\Phi_{xx} - \Phi \theta_t - \Phi \theta_x^2 - v \Phi^3 = 0, \quad v > 0 \quad (3.10)$$

$$\Phi \theta_{xx} + 2\Phi_x \theta_x + \Phi_t = 0$$

设  $\theta = \theta(x - D_1 t), \Phi = \Phi(x - D_2 t)$ , 代入(3.10)得

$$\Phi_{xx} + D_1 \Phi \theta_x - \Phi (\theta_x)^2 + v \Phi^3 = 0 \quad (3.11)$$

$$\Phi \theta_{xx} + 2\Phi_x \theta_x - D_2 \Phi_x = 0 \quad (3.12)$$

现视(3.12)为  $x$  的函数,  $t$  为固定, 对(3.12)积分得

$$\Phi^2 (2\theta_x - D_2) = \varphi(t) \quad (3.13)$$

取  $\varphi(t) = 0$ , 得  $\theta_x = \frac{D_2}{2}$ . 将此代入式(3.11), 并对  $x$  积分

得

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{p(\Phi)}} = x - D_2 t \quad (3.14)$$

其中

• • •