材料力学教程

下　册

武汉水利电力学院建筑力学教研組编

水利电力出版社

材料力学教程

下册

武汉水利电力学院建筑力学教研組编

水利 社

內 容 提 要

本书是由武汉水利电力学院建筑力学教研組全体担任材料力学課程的教师，在党的教育方針的指导下，根据教学改革以来的教学經驗，并吸收了学生、专业課程教研組和生产单位的意見，集体編写的。

本书的特点是既注意了結合水利工程专业的特点和要求，又保証了基本理論的足夠的广度和深度。

本书除了緒論、結論与附录外，共分为：基本概念、拉伸和压縮、拉伸和压縮时材料強度的实驗研究、拉伸或压縮时的強度計算与自重影响、拉伸和压縮的超靜定問題、剪切、扭轉、梁的弯曲——切力与弯矩、梁的应力、应力状态理論、梁的变形、超靜定梁、应用彈性变形能的理論求变位、強度理論、复合抗力、曲杆、压杆的稳定、按許用荷重法計算結构物、动力荷重、在重复应力下物件的強度計算等二十章。每章附存小結与复习題，对讀者可以起一定的輔导作用。

本书分上、下两册出版，上册包括緒論及前十章，下册包括結論及后十章。

本书的主要讀者是高等工业学校、专科学校的水利工程各专业的学生，也可以供水利技术工作者、高等工业学校其它专业学生及一般工程技术人員参考。

材料力学教程

下　册

武汉水利电力学院建筑力学教研組編

*

2788 Z 165

水利电力出版社出版（北京西郊科学路二里沟）

北京市书刊出版业营业許可証出字第105号

水利电力出版社印刷厂排印

新华书店科技发行所发行　　各地新华书店經售

*

$850\times1168\frac{1}{32}$开本＊$8\frac{5}{8}$印張＊220千字＊定价(第9类)1.10元

1960年6月北京第1版

1960年6月北京第1次印刷(0001—5,300册)

目　录

第十一章 梁的变形

§11-1 一般概念 梁的撓度曲綫的微分方程式

（一）梁在荷重作用下，既会引起应力，同时也会发生变形。研究梁的变形是一个很重要的問題，因为有以下**两个目的：**

（1）使梁的設計**能够滿足剛度要求**。如图11-1可以看作是簡支吊車梁的結构計算簡图，我們在設計吊車梁时，除了要使它滿足强度要求以外，还应当要滿足剛度要求。也就是要求梁在荷重作用下，梁上任一点的最大变位δ不超过許用变位值$[\delta]$（現行吊車梁規范一般規定$[\delta]=L/250\sim L/750$），这样才能使吊車行駛时减小振动，并滿意地保持二吊車梁在接头处的連接能够比較平滑。其他如平板閘門、弧形閘門上的主横梁等，因受工作条件的限制，也都具有一定的剛度要求。因此必須对梁的变形进行研究。

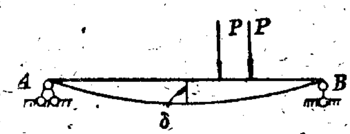

图 11-1 受集中荷重作用的簡支梁

（2）要借助梁的变形以**求解超静定梁**的問題。这一点将在下章內专門討論。

（二）我們首先以簡支吊車梁为例，說明梁的变形概念以及解釋几个重要的名詞。

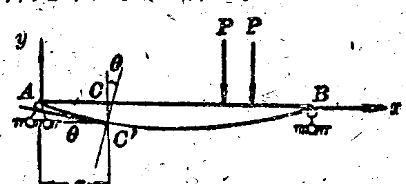

图 11-2 梁变形时所发生的两种变位——撓度与轉角

如图11-2所示，AB綫表示吊車梁的軸綫，作Axy直角坐标；x軸与AB綫重合，y軸与梁端截面的主慣性軸重合，Axy平面就表示梁的纵向对称軸平面。荷重P作用在这个平面內，使梁

发生平面弯曲变形。

观察梁的平面弯曲变形，可以看出：

（1）梁的横截面产生了**两种形式的变位**：

一种是梁截面的形心C沿y軸方向的綫变位CC'（在x軸方向的变位是二次微量，可以忽略不計）。这个綫变位一般叫做梁在该截面的**撓度**，它常以字母"y"来表示。撓度符号規定向上为正。

另一种是梁截面对它原来位置的角变位。这种角变位一般叫做梁在該截面的**轉角**。常以"θ"来表示。它的符号規定以逆时針轉为正。

（2）梁的軸綫变成一条連續而光滑的曲綫，这条曲綫就叫做梁的**撓度曲綫**，或者叫做**彈性曲綫**。撓度曲綫可以用方程式$y=f(x)$来表示，即撓度y仅是x的函数。由图11-2可知，在C点的截面轉角又等于該点在撓度曲綫上的切綫和x軸所夹的角度。由此导出$\operatorname{tg}\theta=dy/dx$，在小变形的假設下$\theta$角一般都小于1°。因此

$$\theta\approx\operatorname{tg}\theta=\frac{dy}{dx}. \tag{11-1}$$

式(11-1)表示梁在同一截面上撓度和轉角之間的微分关系。

（三）求撓度曲綫的方程式可归結为求y与x之間的函数关系。由第九章純弯曲的研究中，我們曾得到弯曲时的曲率公式(9-18)

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EJ_z}.$$

对于一般的梁，虽然是非純弯曲問題，但当梁的跨度$L>\frac{h}{10}$(h为梁截面的高度)时，切力对梁弯曲变形的影响可以忽略不計；如以矩形截面梁为例，由切力所引起的撓度比由弯矩所引起撓度的3.2%还小，因此式(9-18)可以推广到非純弯曲的問題，但此时式中的M和ρ不再是常数，所以非純弯曲的曲率公式(9-18a)应为

$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EJ}.$$

另外，在高等数学中，我們曾經得出任一曲綫的曲率公式如下：

$$\frac{1}{\rho(x)}=\pm\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\tag{11-2}$$

由式(9-18a)和式(11-2)

得
$$\pm\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{M(x)}{EJ}.\tag{11-3}$$

式(11-3)就是**梁的撓度曲綫的微分方程式**。

对于小变形的梁，它的轉角$\theta=dy/dx$与1比較起来是一个很小的数值，因而式(11-3)分母中的$(dy/dx)^2$一項可以略去，即式(11-3)可以簡化为：

$$\pm\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EJ}.\tag{11-4}$$

式(11-4)叫做**梁的撓度曲綫的近似微分方程式**。适用于小变形的梁，它是計算梁的变形的基本公式。

式(11-4)左端的正負号，取决于$M(x)$和d^2y/dx^2的符号規定：图11-3是我們习惯用的符号規定，由图可知，当$d^2y/dx^2>0$时$M(x)>0$，說明两者的符号是一致的。因此，式(11-4)左端的正負号可以省去，即

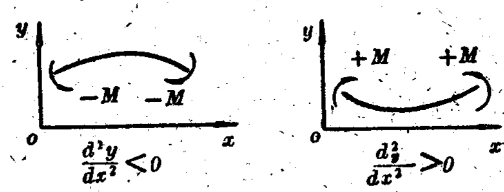

图 11-3 $M(x)$和$\frac{d^2y}{dx^2}$的符号

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EJ}.\tag{11-4a}$$

应用式(11-4a)时，其中的$M(x)$一項，应按第八章中的規定，将符号一并代入。求解这一微分方程式后就可以得出撓度曲

綫方程式，从而可以求得撓度和轉角。下面分別介紹研究梁的变形时常用的几种方法。

§11-2 重积分法

将式(11-4a)积分一次，可得出轉角的方程式

$$\frac{dy}{dx}=\theta=\frac{1}{EJ}\left(\int M(x)dx+c_1\right). \qquad (11-5)$$

再积分一次，可得出撓度的方程式

$$y=\frac{1}{EJ}\left(\iint M(x)\,dx^2+c_1x+D_1\right). \qquad (11-6)$$

这样应用两次积分求出撓度的方法叫做**重积分法**。积分式中C_1及D_1为积分常数，可以由梁的**边界条件**和**連續条件**决定。下面举例說明这一方法的应用。

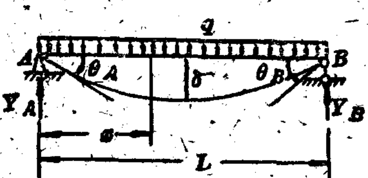

图 11-4 受均布荷重作用的簡支梁

例題11-1 閘門上一根迭梁(承受均布荷重的簡支梁)的計算簡图如图11-4所示，EJ为常数。試求梁的最大撓度δ及轉角θ_A、θ_B。

解 1.列出微分方程式：

支座反力 $\qquad Y_A=Y_B=\frac{qL}{2}$,

弯矩方程式 $\qquad M(x)=\frac{qLx}{2}-\frac{qx^2}{2}$.

把$M(x)$代入式(11-4a)得：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{qL}{2}x-\frac{qx^2}{2}\right).$$

2.积分：

$$\theta=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{qL}{4}x^2-\frac{qx^3}{6}+c_1\right), \qquad (a)$$

$$y=\frac{1}{EJ}\left(\frac{qL}{12}x^3-\frac{qx^4}{24}+c_1x+D_1\right). \qquad (b)$$

3.确定积分常数并列出轉角和撓度的方程式：由支座处的边界条件，即

当$x=0$时，$y=0$，可由式(b)得$D_1=0$。

当$x=L$时，$y=0$，可由式(b)得

$$C_1=-qL^3/24.$$

把C_1和D_1的值代入式(a)和(b)中，即得：

轉角方程式 $$\theta=\frac{1}{EJ}\left(\frac{qL}{4}x^2-\frac{qx^3}{6}-\frac{qL^3}{24}\right), \qquad (c)$$

撓度方程式 $$y=\frac{1}{EJ}\left(\frac{qL}{12}x^3-\frac{qx^4}{24}-\frac{qL^3}{24}x\right). \qquad (d)$$

4.求δ、θ_A、θ_B。由对称关系可知最大撓度δ发生在梁的中点。故将$x=L/2$代入式(d)得：

$$y_{\frac{L}{2}}=\delta=-\frac{5qL^4}{384EJ}.$$

負号表示δ的方向向下。

將$x=0$代入式(c)得：

$$\theta_A=\theta_0=\frac{c_1}{EJ}=-\frac{qL^3}{24EJ}.$$

負号表示A端截面是順时針轉的。

將$x=L$代入式(c)得：

$$\theta_B=\theta_L=+\frac{qL^3}{24EJ}.$$

正号表示B端截面是逆时針轉。

在計算δ、θ_A、θ_B的具体数值时，应注意統一单位。如采用q(公斤/厘米)、L(厘米)、J(厘米^4)、E(公斤/厘米^2)时，这样求得的撓度单位是厘米，轉角单位是弧度。計算出最大撓度的数值以后，我們就可以进行剛度校核，如果$\delta\leqslant[\delta]$，則梁的設計就滿足了剛度要求。

例題 11-2 承受集中荷重P的簡支梁如图 11-5所示，EJ为常数，試求梁的撓度和轉角。

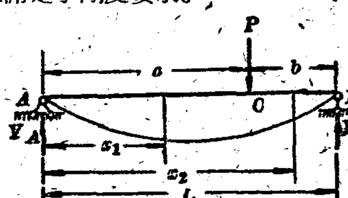

图 11-5 受一个集中荷重作用的簡支梁

解 这个題目的解題步驟与例題11-1相同。下面重点討論几个問題。

1.因为一个集中荷重P把梁分成两段，因而需要分段写出两个弯矩方程式，即

当$0\leqslant x_1\leqslant a$，$M(x_1)=Pb/Lx_1$， (a)

当$a\leqslant x_2\leqslant L$，$M(x_2)=Pb/Lx_2-P(x_2-a)$ (b)

將两个弯矩方程式分别代入式(11-4a)，积分后就得出四个方程式：

$$\theta_1=\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{pb}{L}\cdot\frac{x_1^2}{2!}+C_1\right), \qquad (c)$$

$$y_1=\frac{1}{EJ}\left(\frac{pb}{3!L}x_1^3+C_1x_1+D_1\right), \qquad (d)$$

$$\theta_2=\frac{dy_2}{dx_2}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{pb}{L}\cdot\frac{x_2^2}{2!}-p\frac{(x_2-a)^2}{2!}+C_2\right), \qquad (e)$$

$$y_2=\frac{1}{EJ}\left(\frac{pb}{L}\cdot\frac{x_2^3}{3!}-p\frac{(x_2-a)^3}{3!}+C_2x_2+D_2\right). \qquad (f)$$

这样在四个方程式中就有四个积分常数。由此推論，当梁上有n个不連續荷重(如集中荷重、集中力偶等)作用时，就有$2(n+1)$个积分常数。

2.积分常数的确定。例題11-2中有四个积分常数，须写出四个方程式才能解出这些常数。方程式可以根据下列的已知条件写出：

1)連續条件。即集中荷重P作用下的截面C是第一、第二梁段的共有截面，它的轉角和撓度既可以由第一梁段的方程式計算，也可以由第二梁段的方程式計算，但因梁的撓度曲綫在截面C处仍是連續和光滑的，因而从第一梁段或第二梁段計算出来的截面C的轉角和撓度都应該相等。由此可以写出两个方程式，即

当$x_1=x_2=a$时，

$$\theta_1=\theta_2$$

或

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{dy_2}{dx_2} \qquad (1)$$

$$y_1=y_2 \qquad (2)$$

2)边界条件。即

当 $x_1=0$ 时　　$y_1=0$　　(3)

当 $x_2=L$ 时　　$y_2=0$　　(4)

将式(1)、(2)、(3)、(4)联立求解即得：

$$D_1=D_2=0,$$

$$C_1=C_2=-\frac{pb}{6L}(L^2-b^2).$$

由上推論，积分常数总可以由已知的連續条件和边界条件成立足够的方程式来联立解出。

在复杂荷重的作用下，如荷重使梁的分段数目愈多，则联立求解积分常数愈是麻煩。不过从例題11-2中可以看出，如果在撓度曲綫微分方程式的建立和积分过程中，能够遵照以下四个規定，则常可将**积分常数簡化为两个**，即C和D(即能使$C_1=C_2=\cdots\cdots=C$，$D_1=D_2=\cdots\cdots=D$)。这

将大大減少計算的工作。

(a)在分段列出弯矩方程式时，各弯矩方程式中的自变量 x 应从同一个坐标原点計算起。坐标原点一般取在梁的左端。

(b)在下一梁段的弯矩方程式中，常包含了以前各段的弯矩方程式的形式，这些方程式的形式必須保持不变。如例題11-2中第二梁段的弯矩方程式(b)的第一項应和第一梁段弯矩方程式(a)的形式完全一样，不能任意分解或合并。

(c)在下一梁段的弯矩方程式中，除了和以前各段弯矩方程的形式完全一样的項以外，一定有新增加的項，这些新增加的項一定要包含乘数$(x-a)$，此处的a是所有以前各梁段长度之和。如在例題11-2中，第二梁段弯矩方程式(b)中的第二項$P(x-a)$就包含了乘数$(x-a)$。如有集中力偶M作用时，只要在$M(x)$的項里，将M値乘上$(x-a)$値，这个条件就可以滿足。对于其他荷重情形也是一样的。

(d)把弯矩式子代入微分方程式进行积分时，不要将其中的括弧〔如$(x-a)$〕展开。

以上这种做法，可以簡化积分常数的計算，建議讀者通过做練习来加以驗証。

3.最大撓度的位置。在例題11-2中，設$a>b$。当$x_1=0$时，则$\theta<0$，当$x_1=a$时，则$\theta>0$。因此，$\theta=0$处的位置(即最大撓度δ的位置)必然发生在AC段內。

令
$$\frac{dy_1}{dx_1}=\theta_1=0,$$

即
$$\theta_1=\frac{1}{EJ}\left(\frac{pb}{L}\frac{x_1^2}{2!}+C_1\right)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{pb}{L}\frac{x_1^2}{2!}-\frac{pb}{6L}(L^2-b^2)\right)=0.$$

由此解得
$$x_1=\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}.\tag{g}$$

从式(g)可以看出：

当 $b\to0$ 时
$$x_1=\sqrt{\frac{L^2}{3}}=0.577L\tag{h}$$

当 $b=\frac{L}{2}$时
$$x_1=0.5L,\tag{i}$$

比較(h)、(i)两式可知，集中力P的位置对于最大撓度的位置并不发生巨大影响(見图11-6)。因此，为了实用的簡便，可以**不管集中力P的位置如何，都可以认为最大撓度发生在梁的中点**，这样求出的中点撓度值和精确的最大撓度值非常接近。

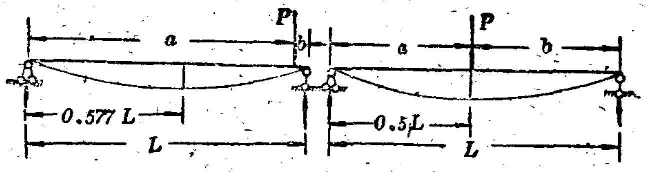

图 11-6　荷重P在梁上移动时，撓度曲綫上最大撓度的位置

§11-3　初参数法

(一)在上一节中，我們曾将撓度曲綫的微分方程式：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EJ} \qquad (11\text{-}4a)$$

积分两次幷求出撓度。在列出这个微分方程式时，必須首先求出弯矩方程式，但是研究梁的問題时，一般說来，梁上的荷重是已知值，而弯矩則是待定值。有时，当梁上作用着各种不同的荷重时，弯矩方程式的数目很多，对于梁撓度曲綫的計算就很麻煩。因此在本节內我們要介紹另一种比較簡便的方法——**初参数法**来計算撓度。

将式(11-4a)微分两次，得：

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2M(x)}{dx^2}=\frac{dQ(x)}{dx}=q(x)\,. \qquad (11\text{-}7)$$

在上式中，撓度的四次导数和荷重$q(x)$直接連系在一块，問題就变成了如何来解这个四次的非齐次微分方程。式(11-7)的通解为：

$$y=\bar{y}+\hat{y}. \qquad (a)$$

式中的$\bar{y}$为齐次方程：

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=0. \qquad (b)$$

的解，而$\hat{y}$是式(11-7)的特解。将式(b)积分四次得

$$EJ\bar{y}=C_1\frac{x^3}{3!}+C_2\frac{x^2}{2!}+C_3\frac{x}{1!}+C_4. \qquad (c)$$

式(c)中的C_1、C_2、C_3、C_4是四个积分常数，式(11-7)的特解为：

$$EJ\hat{y}=\Phi(x)=\int_0^x dx\int_0^x dx\int_0^x dx\int_0^x q(x)dx. \qquad (d)$$

因此我們求得(11-7)的通解为：

$$EJy=EJ\bar{y}+EJ\hat{y}=EJ\bar{y}-\Phi(x)=C_1\frac{x^3}{3!}+C_2\frac{x^2}{2!}+C_3\frac{x}{1!}$$

$$+C_4+\int_0^x dx\int_0^x dx\int_0^x dx\int_0^x q(x)dx. \qquad (11\text{-}8)$$

上式中的四个积分常数，可以将式(11-8)逐次微分，并将$x=0$的值代入求得。

令式(11-8)中的$x=0$ 得 $EJy_0=C_4$.

$$EJ\frac{dy}{dx}=C_1\frac{x^2}{2!}+C_2\frac{x}{1!}+C_3+\int_0^x dx\int_0^x dx\int_0^x q(x)dx,$$

当$x=0$时 $\qquad EJy'=EJ\theta_0=C_3$;

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=C_1\frac{x}{1!}+C_2+\int_0^x dx\int_0^x q(x)dx,$$

当$x=0$时 $\qquad EJy''_0=M_0=C_2$;

$$EJ\frac{d^3y}{dx^3}=C_1+\int_0^x q(x)dx,$$

当$x=0$时 $\qquad EJy'''_0=Q_0=C_1$.

在上列各式中y_0、θ_0、M_0、Q_0是梁左端（$x=0$处）的撓度、轉角、弯矩和切力，这四个值叫做**初参数**。如用初参数来表示式(11-8)的撓度方程式，即得

$$EJy=EJy_0+EJ\theta_0\frac{x}{1!}+M_0\frac{x^2}{2!}+Q_0\frac{x^3}{3!}$$

$$+\int_0^x dx\int_0^x dx\int_0^x dx\int_0^x q(x)dx. \qquad (11\text{-}9)$$

(二)在四个初参数中，两个可以从梁左边支承的边界条件求得，另外两个可以从梁右边支承的边界条件求出。至于方程式

(11-9)右边最后的一项，可以利用积分学中函数的 n 次积分，按公式：

$$\int_0^x dx\int_0^x dx\cdots\cdots\int_0^x q(x)\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{(n-1)}q(t)dt. \tag{11-10}$$

化为一次积分，因此式(d)可写成：

$$EJy=\Phi(x)=\frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3 q(t)dt \tag{11-10'}$$

在图 11-7a 中，表示梁的 AB 段有均布荷重 q 作用的情形。

(1)对于 OA 段(即 $o\leqslant x\leqslant a_1$)，

由于 $$q(t)=0$$

故 $$\Phi(x)=0. \tag{11-11}$$

(2)对于 AB 段(即$a_1\leqslant x\leqslant a_2$)，

$$\Phi(x)=\frac{1}{3!}\int_{a_1}^x (x-t)^3 q(t)\,dt=\frac{q}{4!}(x-a_1)^4. \tag{11-12}$$

(3)对于 BE 段(即 $a_2\leqslant x\leqslant L$)，

$$\Phi(x)=\frac{1}{3!}\int_{a_1}^{a_2}(x-t)^3 q(t)\,dt=\frac{q}{4!}(x-a_1)^4-\frac{q}{4!}(x-a_2)^4. \tag{11-13}$$

根据式(11-11)、(11-12)、(11-13)可以得出以下的规则：

(1)以梁的左端为坐标原点，当 x 越过了均布荷重段的起点 $x=a_1$ 时，在函数$\Phi(x)$内要列上这样的一项

$$\frac{q}{4!}(x-a_1)^4.$$

(2)当 x 越过了均布荷重段的终点$x=a_2$时，在$\Phi(x)$内要增加一项

$$-\frac{q}{4!}(x-a_2)^4.$$

(三)在图11-7b中，表示梁上有集中力 P 作用在 C 点的情形。

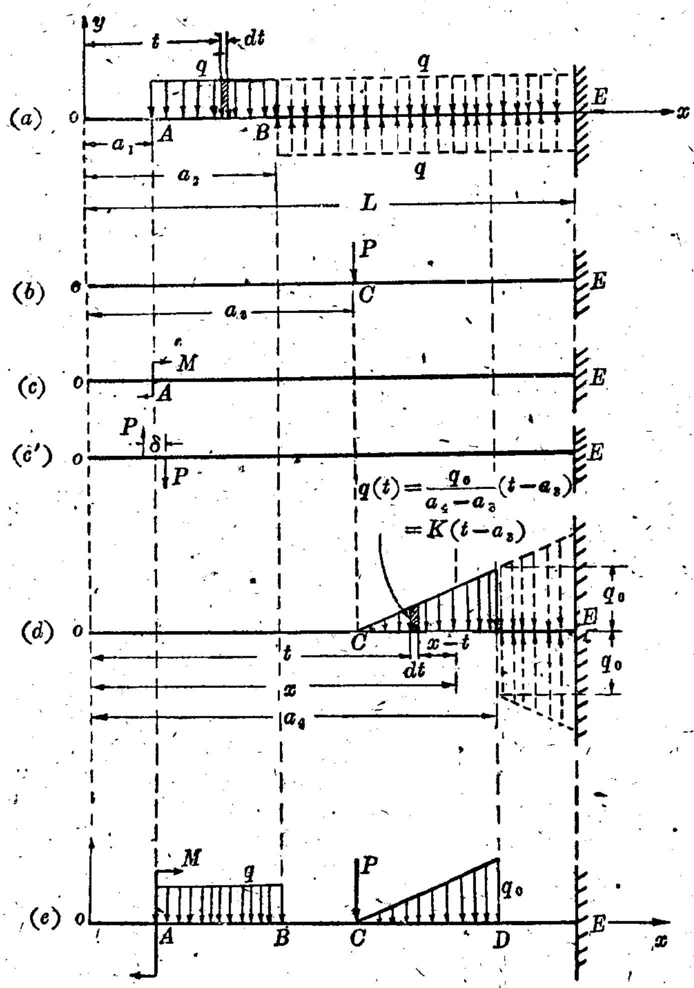

图 11-7　承受多种荷重的悬臂梁

（1）OC段(即$0\leqslant x\leqslant a_3$)，因$q(t)=0$，

故　　$\Phi(x)=0$　　(11-11′)

（2）假設集中力 P 是作用在无穷小 Δa 上的均布荷重 q，则 $q\Delta a=P$。由式(11-10′)得：

$$\Phi(x)=\frac{1}{3!}\int_{a_3}^{a_3+\Delta a}(x-t)^3 q\,dt.$$