工程數學

（上 冊）

曹鶴蓀　張理京譯訂

龍門聯合書局出版

工程數學 (上冊) 曹鶴蓀 張理京譯訂

書局

工程數學

上冊

L. A. Pipes 原著

曹鶴蓀
張理京 譯訂

龍門聯合書局出版

工 程 數 學

下　冊

L. A. Pipes 原著

曹鶴蓀
張理京 譯訂

龍門聯合書局出版

工 程 數 學

（下 册）

L. A. Pipes 原著

曹鶴蓀　張理京譯訂

龍 門 聯 合 書 局 出 版
上海市書刊出版業營業許可證出029號
上 海 淮 海 中 路 1813 號
新 華 書 店 總 經 售
科學出版社上海印刷廠印刷
上 海 延 安 中 路 537 號

開本：787×1092 1/23　　印數：5501—6200 册
印張：12 18/23　　1952年8月第 一 版
字數：241,000　　1958年3月第四次印刷
定價：(11)2.20 元

2P70/17

原　　序

近幾年來用數學分析方法去解決技術問題的事已受到了深刻的注意. 這是由於工廠及其他各處的實驗研究室中採用理論與實驗協力合作的結果,使工程界與物理學的各部門中產生一種新的趨勢,並且引起技術專家對於應用數學的關心.

五十年以前的工程人員把微積分看作是一種超出常人智力範圍以外的神祕學問,但在今日學工程的人卻得隨處用到微積分. 在解決電學問題與機械問題中我們採用了複數,因此使工程人員至少要對複變數理論的初階具有粗淺的了解. 在研究其他對於工程技術上具有重要性的物理系統時,我們得用到矩陣代數學,運算分析*,正交函數,偏微分方程及他種數學技能;所以要用數學去解決各類技術問題——如聲學上的,電學上的,航空工程上,機械學上以及熱學上等類的問題——的人就得具備這些數學工具.

過去五年中,我曾經在大學工程研究所講授應用數學. 講授這本課程的目的,是使學工程與物理的研究生懂得如何運用數學方法去解決技術上的問題.

這門課程在本質上就是為着各種不同興趣的學生而設的. 在以前雖然有許多很好的教科書,但大多數並非直接討論數學在工程技術上的應用問題,或者就是範圍太偏於幾方面. 因此作者在教課時就覺得需要編一些油印的講義,這就產生了本書.

這本書所要講的,是數學分析在解決技術問題時的用法,因此限於篇幅不能對所有的數學問題加以嚴格的討論. 如果讀者認為對有些定理需要更嚴格的討論時,可以在書末找到參考書名(下略).

拜潑斯　1946, 7.

---

* 這個名詞有人主張譯作"算子運算法",也有人譯作"運算微積"的. 但在本書中暫且採用"運算分析法". 其實可以一概稱作"拉氏轉換法" Laplace Transform 最為恰當.

代　　序

本書原名 Applied Mathematics for Engineers and Physicists, 內容具有很多優點. 例如:(1)材料新穎而豐富,適合工程師的需要;(2)本書的重點,不在證明許多定理,而在數學的各種應用;(3)其所取材照顧到工學院各系,其中以機械、電機二系照顧得特別多,其他如土木、水利、航空、造船、輪機各系亦都涉及. 還有一點,本書頗適我國工學院新的課程標準. 按照新的規定,微積分和微分方程都是工學院一年級必修學程;讀完微積分和微分方程,接着讀這本書,在程度上相當啣接. 上海交通大學曹鶴蓀先生教工學院的工程數學,選定了它做教本,就有翻譯的動機,而我局"工程圖書出版審核委員會"適有翻譯世界工程名著的擬議,即跟曹先生約定,期於 1951 年秋季刊行. 可是一經教學,發現原著頗多寫作粗疏和排版錯誤之處,均經一一訂正,直至 1951 年四月初旬,方始交稿.

正值發排的時候,中國科學院編譯局介紹大連工學院張理京先生譯稿寄到. 二種譯本都很忠實,各有特長. 既不能重複出版,取捨實感困難. 經科學院編譯局建議,徵得曹張二先生同意,先由張先生根據曹譯本修訂,再由曹先生任覆校. 南北名手,運用匠心,彙成優良譯訂本. 校訂期間,函札往還,審愼商榷. 曹致張的信說:"… 我在整個讀完了你的譯文以後,覺得你的譯筆是比我的淸順流利. …" 張致曹的信說:"… 發現你下的工夫比我深得多,能夠有這個機會跟你合作,的確是一件最大的幸事. …" 本局覺得他們的合作確是學術界一件最大幸事;尤其是他們謙遜不遑的態度,和治學謹嚴的精神,更是值得楷模的.

本書的書名,張譯爲"理工應用數學",曹譯爲"工程數學",委由我局決定取捨. 根據原著者序文所說,這本書是由教工學院的講義整理而成;在證明方面不夠嚴密,可是對於工程上的應用,特別注重,所以用於

工學院比較適合，我們方決定採用"工程數學"這個比較簡明的書名.

還有譯訂的"訂"字，是我局加上去的. 加這個"訂"字，表示二點意義：一是表明他們下的工夫，讀者自能領會；一是譯本既多改正之處和刪節之處，和原文對照，不甚符合，加一"訂"字，藉以表明忠實態度.

本書的內容很豐富，每學期三學分，要教二學期纔能教完. 假定是一學期三至四學分的學程，可以斟酌各系的需要，刪去一些次要的材料.

末了，我局對張曹二先生的合作精神表示十二分的敬意.

龍門聯合書局編輯室 1951, 9, 10.

目　次

（上　册）

第一章

第二章

第三章

第四章

第五章

原书缺页

目　　次

(下　册)

第十二章

第十三章

第十四章

第十五章

第十六章

第十七章

第十八章

第十九章

第二十章

第二十一章

第二十二章

第 一 章

無 限 級 數

1. 引言 我們在本章裏面預備講無限級數的一些性質，特別是要多講一點冪級數． 在應用數學裏面無限級數是很重要的一部門，許多重要的物理問題要用無限級數才可能求得數值解答，又如有些微分方程是解決許多物理問題時常用的數學方法，而這些方程的解就要用無限級數來表示． 如果我們要研究這些解答的性質，我們就應該懂得怎樣去處理無限級數．因此學應用科學的人需要瞭解這門課程且具有活用的能力．

本章裏面我們要討論無限級數的一些基本觀念，要逐步講解無限級數在代數上及分析上的各種算法，並舉出級數的實際應用例子來表明一般原理．

2. 定義 本節所要討論的是無限級數的幾個基本定義．

敍列 一敍列是根據某種固定規律而形成的，並且是接連成串的許多項． 例如

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25 \tag{2.1}$$

$$x,\ x^2,\ \frac{x^3}{1\cdot 2},\ \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3} \tag{2.2}$$

就是敍列．

級數 一級數是用敍列的項所寫出來的和式．例如從上面的敍列可以寫出級數

$$1+4+9+16+25 \tag{2.3}$$

及

$$x+x^2+\frac{x^3}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3} \tag{2.4}$$

若項數是有限的，我們就說所構成的敍列或級數是有限的. 若項數為無限時，則得無限敍列或無限級數.

級數的通項或第 n 項，是表示出級數中各項形成規律的那一項，如同上述二例中的通項是

$$n^2 \text{ 及 } \frac{x^n}{(n-1)!} = \frac{nx^n}{n!}$$

其中 $n!$ 是由下式所規定的階乘積

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)\cdot n \tag{2.5}$$

3. 幾何(等比)級數 設有一含 n 個項的級數

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \tag{3.1}$$

這級數稱為幾何(等比)級數，幾何級數之和 S_n 可用下法求得.

拿 r 乘(3.1)得

$$rS_n = (ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n) \tag{3.2}$$

從(3.2)中減去(3.1)得

$$rS_n - S_n = (ar^n - a) \tag{3.3}$$

因而得

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \tag{3.4}$$

若 $|r|<1$，則當 n 增大時 r^n 的絕對值減小，我們就可以寫出

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \tag{3.5}$$

所以我們從(3.4)得

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{(1-r)} = S \tag{3.6}$$

所以說，若 $|r|<1$，則當項數無限增多時幾何級數之和 S 趨於一極限. 在這種情形下我們說級數是**收斂**的.

若 $|r|>1$，則 r^n 隨着 n 的增大而變為無限. 因此我們從(3.4)知道 S_n 要變為無限大，在這種情形下級數是**發散**的.

在 $r=-1$ 時是特別情形，這時的幾何級數變為

$$a - a + a - a \cdots \tag{3.7}$$

在這種情形下若n爲偶數則和等於零,若n爲奇數則和等於a. 若n無限增大則和旣不無限增大亦不趨於一極限,此類級數稱爲振盪級數❶.

如果使幾何級數數中的$a=1$, $r=\frac{1}{2}$, 則得

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \tag{3.8}$$

這時可得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \tag{3.9}$$

4. 收斂級數與發散級數　設有級數

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n \tag{4.1}$$

表示級數和的可變量S_n是n的函數. 如果我們讓項數n無限增大,則得下述兩種情形之一.

情形 I.　S_n趨於一極限,我們用

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S \tag{4.2}$$

來表示. 這時級數爲收斂且趨於S值(或者說等於S值).

情形 II.　這時S_n並不趨於任何極限. 無限級數爲發散,例如級數

$$1+2+3+4+5+\cdots$$

$$2-2+2-2+\cdots$$

就是發散的.

在應用數學中收斂級數是最重要的;因此我們必須要有一種方法來檢定一級數的收斂或發散.

5. 一般定理　下述各定理對於研究級數的收斂性質極爲重要,其證明從略.

定理 I.　若一可變量S_n總是隨着n而增大,但決不會超過一確定數A, 則當n無限增大時S_n趨於一不大過A的極限S.

這話可以用圖 5.1 來表明.

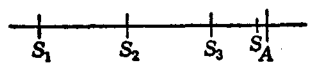

圖 5.1

代表數值S_1, S_2, $S_3\cdots$等的點逐漸接近點S, 其中

❶ 振盪級數 oscillating series.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

但 S 這數值小於或等於 A.

我們可以根據這定理來證明有些級數的收斂性質，例如有一級數

$$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \tag{5.2}$$

我們去掉第一項寫出

$$S_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \tag{5.3}$$

現在我們來看按下式規定的級數

$$U_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots \tag{5.4}$$

除了起頭二項以外級數 S_n 中的各項小於 U_n 中的對應項，因此顯然可以知道

$$S_n < U_n \tag{5.5}$$

但 U_n 是 $a=1$ 及 $r=2$ 的等比級數. 因此無論 n 有多大，$U_n<2$. 從這裏我們知道 U_n 這個可變量老是隨着 n 而增大，但始終小於 2. 因此當 n 增大時 S_n 趨於一極限，而這極限小於 2. 所以我們知道級數(5.2)為收斂且其值小於 3. 往後我們要證明級數(5.2)之值是一常數 $e=2.71828\cdots$ 即自然對數的底.

下面還有一個重要的基本定理，也是用來檢定收斂性質的.

定理 II. 若可變量 S_n 恆隨 n 的增大而減小，但決不會小於某一數 B，則當 n 無限增大時 S_n 趨於一不小於 B 的極限.

例如設有收斂級數

$$S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{5.6}$$

它具有極限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{5.7}$$

設在一定向直線上作 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 等數值所定各點，則當 n 增大時這些點趨於一點 S，由此顯然可見

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{5.8}$$

這就是說收斂級數的通項必須以零爲極限．若當 n 變爲無限大時級數的第 n 項並不趨於零，那我們就知道級數是發散的．

(5.8)雖然是收斂的必要條件，卻並非是充分條件．這就是說儘管第 n 項趨於零，我們還不能說級數是收斂的．例如就級數

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{5.9}$$

來說，可得

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \doteq 0 \tag{5.10}$$

因此能滿足(5.8)．但我們以後要證明這級數是發散的．

上述兩定理對於決定級數的斂散問題時雖具有基本上的重要性，但我們現在卻要講幾種特殊的檢定法，這些檢定法在應用時通常比上述定理容易得出結果．

6. 比較檢定法　在許多情形下我們可拿一收斂性質確定了的級數與所給級數相比較以決定級數的收斂問題．

設我們要來檢定一正項級數

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{6.1}$$

又設我們能找出一收斂的正項級數

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots \tag{6.2}$$

使其各項決不小於級數(6.1)中的對應項，則(6.1)爲一收斂級數且其和不會超過(6.2)之和．

證明上述定理時，先寫出

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \tag{6.3}$$

及

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n \tag{6.4}$$

根據假設(6.4)爲收斂，故得

$$\lim_{n\to\infty} V_n = V. \tag{6.5}$$

但因

$$V_n < V \text{ 及 } U_n < V_n \tag{6.6}$$

故得 $$U_n < V$$

根據第5節定理I，我們知道 U_n 趨於一極限，因而級數(6.1)爲收斂。

現在舉一例說明這檢定法，設有級數

$$U = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots, \tag{6.8}$$

我們可以拿級數

$$V = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots \tag{6.9}$$

作爲比較。這第二個級數是已知爲收斂的幾何級數。但(6.9)的各項永遠不小於(6.8)的對應項。因此我們知道級數(6.8)是收斂的。

發散檢定法 應用比較檢定法的原理，我們也可以檢定級數的發散性質。設我們所要檢定的正項級數爲

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \tag{6.10}$$

其中各項永遠不會小於一已知爲發散的正項級數

$$W = w_1 + w_2 + w_4 + \cdots \tag{6.11}$$

的對應項，則可知(6.10)爲發散級數。

我們可以用這個原理來證明諧級數

$$U = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{6.12}$$

是發散的。證明時先把(6.12)寫成

$$\begin{aligned} U = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{6.13}$$

現在我們拿級數

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{6.14}$$

作爲比較，我們知道(6.13)中的各項決不會小於(6.14)中的對應項。