

高等学校教学用书



复变函数論方法

下 册

M. A. 拉甫倫捷夫 著
B. A. 沙 巴 特
施祥林 夏定中 译

人民教育出版社

高等学校数学用书



复变函数论方法

下册

M. A. 拉甫倫捷夫 著
B. A. 沙 巴 特
施祥林 夏定中 译

人民教育出版社



本書根據蘇聯國家技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的拉甫倫捷夫 (М. А. Лаврентьев) 和沙巴特 (Б. А. Шабат) 合著“復變函數論方法”(Методы теории функций комплексного переменного) 1951年版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定為國立大學數學力學系力學專業、物理系和物理數學系的教学參考書。

本書中譯本分上下兩册出版。

中譯本下册包括：保角映射的變分原理、函數論在分析上的應用、運算法和它的应用、特殊函數等四章。

本書由南京大學施祥林、夏定中合譯。

3178 / 18

復變函數論方法

下 册

M. A. 拉甫倫捷夫, B. A. 沙巴特著

施祥林 夏定中譯

北京市書刊出版業營業許可證出字第2號

人民教育出版社出版(北京景山東街)

上海大東集成聯合印刷廠印裝

新華書店上海發行所發行

各地新華書店經售

統一書號 13010·216 開本 850×1168 1/32 印張 10 14/16

字數 301,000 印數 13,501—17,000 定價(6) 1.00

1957年8月第1版 1961年12月上海第4次印刷

目 錄

第四章 保角映射的变分原理

§ 1. 基本变分原理	341
57. 基本变分原理	342
58. 原理的推廣	348
59. 边界導数	354
§ 2. 近似区域的映射	360
60. 近似於圓的区域	360
61. 近似於已給区域的区域	368
62. 結果的推廣	371
§ 3. 应用	381
63. 浮力的計算	381
64. 濃厚流体內的波	388
65. 具有流股障碍的繞流	394
66. 地下水的运动	397
第四章参考文献	406

第五章 函数論在分析上的应用

§ 1. 展开成級数与無窮乘積	407
67. 泰乐級数与罗朗級数	407
68. 展开半純函数为部分分式	413
69. 展开整函数为無窮乘積	420
§ 2. 留数理論的应用	426
70. 積分的計算	426
71. 積分的計算(續)	434
72. 零点的个数的計算、范宣納拉特斯克的方法	439
§ 3. 漸近估計的方法	449
73. 漸近展开式	449
74. 越过法	452
75. 別种方法	457
第五章参考文献	461

第六章 運算法和它的应用

§ 1. 基本概念与方法	464
76. 拉普拉斯变换	464
77. 拉普拉斯变换的性質	473
78. 乘法定理	478
79. 展开定理	484
80. 例, 补充	490
§ 2. 应用	504
81. 常微分方程与方程組	504
82. 电路的計算	510
83. 偏微分方程	518
84. 輸送線的計算	526
第六章参考文献	534

第七章 特殊函数

§ 1. 欧拉的 Γ -函数	535
85. 定义及基本性質	535
86. 例, 补充	545
§ 2. 正交多項式	551
87. 正交函数組	551
88. 正交的多項式	557
89. 用权的表达式, 母函数	562
90. 例, 应用	571
§ 3. 圓柱函数	584
91. 第一类圓柱函数	585
92. 另一些圓柱函数	596
93. 圓柱函数的漸近表达式	605
94. 圓柱函数的圖象, 零点的分佈	615
95. 例, 应用	622
§ 4. 橢圓函数	634
96. 週期函数	634
97. 橢圓函数的一般性質	640
98. 橢圓積分和雅科比函数	647
99. 魏尔斯特拉斯函数 ζ -函数	656
100. 例, 应用	669
第七章参考文献	677
索引	678

第四章 保角映射的变分原理

这一章是用来讲保角映射的“动力学”的。其中陈述了一些定性的与定量的命题，凭了这些命题，使我们可以推测：当被映射区域的边界改变时，映射要怎样改变。这种命题在实用上特别值得注意，因为它们给出了从一个已知结构换成一个相近的结构时的简单计算方法。我们假定，在计算一个已经设计好的结构时，发现某一些量超出了所许可的范围。於是，自然发生了如下的问题：应当把这结构在那里加以改变？改变多少？在若干情形中，这问题的答案可以基于这里所说的变分原理而获得。

在本章末，给出了把变分原理应用到具体的实际问题上去的一些例子。

§1. 基本变分原理

设在 z 平面内给定了两个单连区域 D 与 \tilde{D} ，它们分别由曲线 C 与 \tilde{C} 所围成，并设 $w=f(z)$ 与 $w=\tilde{f}(z)$ 分别是把 D 与 \tilde{D} 保角地映射成一个规范区域（圆，半平面，带形）的函数，并且这两个函数是同样地规定的。我们刚才所说的那个问题，在数学上可以表述为：

设映射 $w=f(z)$ 是已知的，周线 \tilde{C} 与 C 很接近；求当从区域 D 换到区域 \tilde{D} 时，增量

$$\delta f = \tilde{f}(z) - f(z)$$

的主要部分。

这个问题的解答可以有二个方向——近似方向与定性方向。我们从一些定性的原理来开始。

57. 基本变分原理 我們先來規定一些記号。由曲線 C 所圍成的区域，我們記作 $D(C)$ 。把 $D(C)$ 保角地映射到單位圓上去，並且使区域内的一個確定的點 z_0 在這映射下變換成坐標原點的那個函數，我們記作

$$w = f(z, C); \quad f(z_0, C) = 0. \quad (1)$$

滿足所說條件的函數可以有無限多個，但是它們都僅僅彼此相差一個形如 $e^{i\delta}$ 的因子， δ 是一個實數。記号 $f(z, C)$ 我們理解為是表示這些函數中的任何一個的，但在量 δ 是很重要的那些問題中，我們將用補充的條件來確定它。在映射 (1) 下變換成圓周

$$|w| = \rho < 1$$

的那些閉曲線，我們用 C_ρ 來表示，稱它為等高線。

用一條周線 \tilde{C} 來代替周線 C ，稱作周線 C 的形變。我們假定區域 $D(C)$ 與 $D(\tilde{C})$ 都是對於點 z_0 的星形區域，即，假定它們的邊界 C 與 \tilde{C} ，在以 z_0 為極點的極坐標系內，可以借單值函數 $r(\varphi)$ 與 $\tilde{r}(\varphi)$ 用方程

$$r = r(\varphi)$$

與

$$\tilde{r} = \tilde{r}(\varphi)$$

來表示。在周線 C 上，使這兩個函數的差的模

$$|\tilde{r}(\varphi) - r(\varphi)|$$

達到最大值的那個點

$$z_2 = z_0 + r_2 e^{i\varphi_2},$$

及其在周線 \tilde{C} 上的對應點

$$\tilde{z}_2 = z_0 + \tilde{r}_2 e^{i\varphi_2},$$

我們稱做最大形變點，數

$$\lambda = \frac{\tilde{r}_2}{r_2}$$

稱為周線的最大形變。

定性理論的基本變分原理，所謂林德勞甫 (Lindelöf) 原理，是說：

如果僅限於考慮把包含固定点 z_0 (在每一个这样的映射下, 它都对应於点 $w=0$) 的区域映到單位圓上去的那些映射的話, 那末, 当把区域的边界向內压缩时: 1) 所有的等高線都压缩; 2) 在点 z_0 处的延伸系数增大; 3) 在边界上保持不动的那些点处的延伸系数(因而, 特别是, 边界的未經形变部分的像的長度)减小; 4) 在最大形变点处的延伸系数增大到 $\frac{1}{\lambda}$ 倍以上。

換句話說, 有下述定理成立:

定理 1. 如果区域 $D(\tilde{C})$ 包含在 $D(C)$ 內, 那末:

1) 對於任何一个 ρ ($0 < \rho < 1$), 区域 $D(\tilde{C}_\rho)$ 都包含在 $D(C_\rho)$ 內, 並且只有当 \tilde{C} 与 C 相合时, \tilde{C}_ρ 与 C_ρ 方能相接触;

2) 在点 z_0 处有

$$|f'(z_0, \tilde{C})| \geq |f'(z_0, C)|, \quad (2)$$

其中的等号只有当 \tilde{C} 与 C 相合时方能成立;

3) 如果周線 \tilde{C} 与 C 有公共点 z_1 , 那末在这个点处必有

$$|f'(z_1, \tilde{C})| \leq |f'(z_1, C)|, \quad (3)$$

其中的等号只有当 \tilde{C} 与 C 相合时方能成立;

4) 如果这两个区域對於 z_0 都是星形的, 那末在最大形变点处有

$$|f'(z_2, \tilde{C})| \geq \frac{1}{\lambda} |f'(z_2, C)|, \quad (4)$$

其中 $\lambda < 1$ 是周線的最大形变。

首先, 我們注意, 只要就周線 \tilde{C} 与 C 僅在一小段 (a, b) 上不同的情形來証明这定理便夠了, 在这一小段上 \tilde{C} 是一段圓周弧, 其曲率同曲線 C 在 (a, b) 上的曲率很接近, 於是 $D(\tilde{C})$ 与 $D(C)$ 僅相差一塊小面積 σ (圖 126)。事实上, C 的任何一個变更, 都可以由繼續施行这种簡單的变更而得到, 所以, 如果對於这种情形, 定理已經証明, 那末對於普遍的情形这定理便也已証明了。

現在我們引進一个輔助的 ζ 平面, 並且用一个保角映射把区域

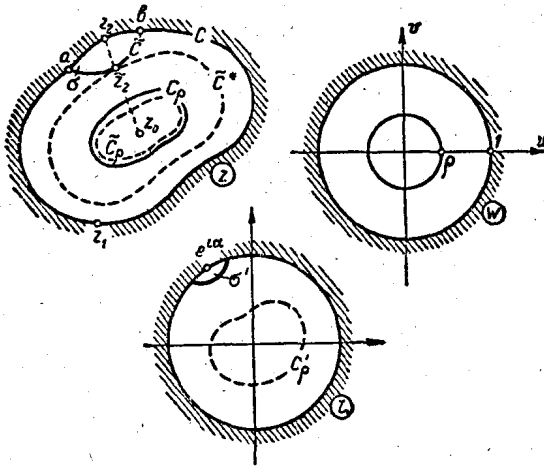


圖 126

$D(C)$ 映到單位圓 $|\zeta| < 1$ 上:

$$\zeta = f(z, C), \quad f(z_0, C) = 0.$$

設這時 \tilde{C} 被变换成曲線 \tilde{C}' , 包含在 \tilde{C}' 与圓周 $|\zeta| = 1$ 之間的那塊面積等於 σ' (圖 126)。我們用一個保角映射把區域 $D(\tilde{C}')$ 映成 w 平面中的單位圓:

$$w = g(\zeta), \quad g(0) = 0.$$

因為在不計高級無限小的程度內, 可以把面積 σ' 看作是圓月牙形, 所以可以拿第 34 節中的映射 (8) 來作為 g :

$$w = g(\zeta) = \zeta \left\{ 1 + \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 + \zeta e^{-i\alpha}}{1 - \zeta e^{-i\alpha}} \right\}, \quad (5)$$

其中 α 是面積 σ' 中任何一個點的幅角。我們來求 g 的逆映射。為了這個目的, 我們把 (5) 式改寫成:

$$\zeta = w \left\{ 1 - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 + \zeta e^{-i\alpha}}{1 - \zeta e^{-i\alpha}} \right\}$$

的形狀(我們利用了下述事實: 在不計高級無限小的程度內, 當 η 很小時, $\frac{1}{1+\eta} = 1 - \eta$)。因為 w 與 ζ 相差一個與 σ' 同級的無限小量, 所以可

以在含有因子 σ' 的項內用 w 來代替 ζ ，而不改變我們的精確度。因此

$$\zeta = w \left\{ 1 - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 + we^{-i\alpha}}{1 - we^{-i\alpha}} \right\}. \quad (6)$$

我們把 ζ 平面中在映射 $w = g(\zeta)$ 下與圓周 $|w| = \rho$ 相對應的那條曲線記作 C'_ρ 。為了要得出 C'_ρ 的參數方程，我們置

$$\zeta = re^{i\varphi}, \quad w = \rho e^{i\theta},$$

求表达式(6)的对数，

$$\ln \frac{\zeta}{w} = \ln \frac{r}{\rho} + i(\varphi - \theta) \approx -\frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 + \rho e^{i(\theta - \alpha)}}{1 - \rho e^{i(\theta - \alpha)}},$$

然后把实数部分与虚数部分分开：

$$\left. \begin{aligned} r &= \rho \left(1 - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \alpha) + \rho^2} \right), \\ \varphi &= \theta - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{2\rho \sin(\theta - \alpha)}{1 - 2\rho \cos(\theta - \alpha) + \rho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由这两个方程中，可以得出所要证明的定理中的全部结论。显然，我們有

$$w = f(z, \tilde{C}) = g[f(z, C)]; \quad (8)$$

所以，在映射 $\zeta = f(z, C)$ 下区域 $D(\tilde{C}_\rho)$ 变换成 $D(C'_\rho)$ 。因为在此时区域 $D(C_\rho)$ 变换成圆 $|\zeta| < \rho$ ，所以要证明定理的第一部分，只要证明 $D(C'_\rho)$ 包含在圆 $|\zeta| < \rho$ 內就夠了。可是因为

$$1 - 2\rho \cos(\theta - \alpha) + \rho^2 \leq (1 + \rho)^2,$$

所以根据(7)式，對於周線 C'_ρ 上所有的点來說都有

$$|\zeta| = r \leq \rho \left(1 - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right) < \rho. \quad (9)$$

这样，定理中的第一个结论已經完全证明。

把不等式(9)除以 ρ ，並令 ρ 趨於 0，我們得到極限

$$\left| \frac{d\zeta}{dw} \right|_{w=0} \leq 1 - \frac{\sigma'}{2\pi} < 1.$$

但是这样我們就有 $|g'(0)| > 1$ ，所以根据(8)式

$$|f'(z_0, \tilde{C})| = |g'(0)| \cdot |f'(z_0, C)| > |f'(z_0, C)|,$$

这便证明了第二个结论。

现在设点 $\zeta = re^{i\varphi}$ 沿着圆周 $|\zeta| = 1$ 的半径趋近于这圆周上的一个点 $e^{i\varphi}$ ，并设 $e^{i\varphi}$ 位于 σ' 的外面。于是，由于映射是保角的，其对应点 $w = \rho e^{i\theta}$ 也沿着与圆周 $|w| = 1$ 的半径相切的方向趋近于 $e^{i\theta}$ ，所以我们有：

$$\begin{aligned} |\Delta\zeta| &= |\zeta - e^{i\varphi}| = 1 - r, \\ |\Delta w| &= |w - e^{i\theta}| \approx 1 - \rho. \end{aligned}$$

但是由不等式(9)有

$$\frac{1-\rho}{1-r} \leq \frac{1-\rho}{1-\rho + \frac{\sigma'\rho}{2\pi} \frac{1-\rho}{1+\rho}} \approx 1 - \frac{\sigma'\rho}{2\pi} \frac{\rho}{1+\rho},$$

在这式子中取当 $r \rightarrow 1$ 时的极限，我们便得到：

$$\left| \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta=e^{i\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-\rho}{1-r} \leq 1 - \frac{\sigma'}{4\pi}.$$

由此就得出了定理中的结论 3)。

要证明定理的最后那个结论，我们用 \tilde{C}^* 来记由 C 经过相似变换

$$\zeta = z_0 + \lambda(z - z_0)$$

所得的那条曲线(图 126)。显然，函数

$$w = f(\zeta, \tilde{C}^*) = f\left(z_0 + \frac{\zeta - z_0}{\lambda}, C\right) \quad (10)$$

作出一个把区域 $D(\tilde{C}^*)$ 映成单位圆的保角映射。可是 $D(\tilde{C}^*)$ 包含在区域 $D(\tilde{C})$ 内，并且点 \tilde{z}_2 既属于 \tilde{C} ，也属于 \tilde{C}^* ，所以根据这定理的结论 3) 有

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}^*)| < |f'(\tilde{z}_2, \tilde{C})|.$$

但因为根据(10)有

$$f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}^*) = \frac{1}{\lambda} f'(z_2, C),$$

所以

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C})| \geq \frac{1}{\lambda} |f'(z_2, C)|.$$

於是定理便完全証明了。

下面的所謂孟台尔 (Montel) 原理，是剛才所証明的那个定理的一个簡單推論：

定理 2. 設区域 $D(C)$ 与 $D(\tilde{C})$ 都包含点 z_0 ，並且

$$C = C_1 + C_2, \quad \tilde{C} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2,$$

其中 \tilde{C}_1 位於 $D(C)$ 內， \tilde{C}_2 在 $D(C)$ 外面， C_2 在 $D(\tilde{C})$ 內， C_1 在 $D(\tilde{C})$ 外面(見圖 127)。此外，並設在映射

$$w = f(z, C), \quad w = f(z, \tilde{C})$$

下，弧 C_1 与 \tilde{C}_1 分別變換成弧 δ_1 与 $\tilde{\delta}_1$ ，那末在這兩段弧的長度之間便有关系^①

$$\tilde{\delta}_1 \geq \delta_1, \quad (11)$$

其中的等号只有在 C 与 \tilde{C} 相合時方能成立。

為了要証明這定理，我們引入由曲線 $C' = \tilde{C}_1 + C_2$ 所圍成的輔助区域 $D(C')$ ，並把 C_2 在映射

$$w = f(z, C')$$

下的像記作 δ' 。因為 $D(C')$ 包含在 $D(\tilde{C})$ 內，並且弧 \tilde{C}_1 同時屬於 C' 与 \tilde{C} ，所以根據林德勞甫原理的第三个結論，在 \tilde{C}_1 上的每一個點處都有

$$|f'(z, \tilde{C})| \geq |f'(z, C')|。$$

因此，考慮到導數的模的幾何意義，我們有

$$\tilde{\delta}_1 \geq 2\pi - \delta'。 \quad (12)$$

另一方面， $D(C')$ 位於區域 $D(C)$ 的內部，而弧 C_2 同時屬於曲線 C' 与 C ，所以基於同一理由有

$$\delta' \leq 2\pi - \delta_1。 \quad (13)$$

把不等式(12)与(13)聯合起來，我們便得出所求的不等式(11)。

① 我們用同一文字來表示弧的本身与弧的長度。

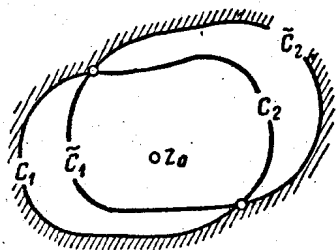


圖 127

58. 原理的推廣 在上節中所證明的那個基本變分原理，也可以推廣到那些把區域保角地映射成其他類型規範區域的函數上去。

1) 圓的外部 我們把在周線 C 外部的那個區域記作 $\Delta(C)$ ；設函數

$$w = F(z, C), \quad F(\infty, C) = \infty \quad (1)$$

把區域 $\Delta(C)$ 保角地映射到單位圓的外部 $|w| > 1$ 上。沿用上節中所採用的那些記號，我們可以建立下述定理：

定理 1. 如果區域 $\Delta(\tilde{C})$ 包含在 $\Delta(C)$ 內，那末

1) 對於任何一個 $\rho > 1$ ，區域 $\Delta(\tilde{C}_\rho)$ 都包含在區域 $\Delta(C_\rho)$ 內；對於無論怎樣的 ρ 來說，都只有在 \tilde{C} 與 C 相合時，周線 \tilde{C}_ρ 與 C_ρ 方能相接觸；

2) 在無窮遠點處有

$$|F'(\infty, \tilde{C})| \geq |F'(\infty, C)|; \quad (2)$$

3) 在周線 \tilde{C} 與 C 的公共點 z_1 處有

$$|F'(z_1, \tilde{C})| \leq |F'(z_1, C)|; \quad (3)$$

4) 如果周線 \tilde{C} 與 C 對於點 $z=0$ 都是星形的，那末在最大變形點 \tilde{z}_2 與 z_2 處有

$$|F'(\tilde{z}_2, \tilde{C})| \geq \frac{1}{\lambda} |F'(z_2, C)|, \quad (4)$$

等號只有在 \tilde{C} 與 C 相合時方能成立。

這定理的證明，可以照上節中所證明的那個定理同樣地來作出，不過要用對單位圓外部的映射來代替 (5)，並把其中的那個月牙形挪到圓的外部來。證明這定理的最簡單的方法，是利用變數代換

$$z - z_0 = \frac{1}{\zeta}, \quad w = \frac{1}{\omega},$$

把它化成上節中已證明的那個定理。

2) 半平面的情形 設曲線 C 通過無窮遠點，並且在無窮遠點處

具有切線与有限曲率^①；於是，当 R 足夠大时，圓周 $|z|=R$ 与 C 相交於两个点，並且可以使这两个点的差的幅角与 π 任意接近。

我們还假定，正向半虛軸上的足夠远的部分不与 C 相交，並把以 C 为边界的两个区域中包含了这部分虛軸的那一个区域記作 $D(C)$ 。我們規定用

$$w=f(z, C), \quad f(\infty, C)=\infty, \quad |f'(\infty, C)|=1 \quad (5)$$

來記作出把区域 $D(C)$ 映成上半个平面 $v>0$ 的保角映射的那个函数。根据存在定理，在这些對於曲線 C 的条件之下，函数 f 存在，並且在可以相差一个实数常数項的程度內被确定。由於在以后这个相差的常数項並不起什么作用，所以我們可以把 f 理解为这些函数中的任何一个。最后，設 C_0 与 \tilde{C}_0 分別是在映射

$$w=f(z, C)$$

与映射

$$w=f(z, \tilde{C})$$

下被变换成直線

$$v = \text{const}$$

的那兩条曲線(圖 128)。在这些記号之下，我們有下述定理：

定理 2. 設曲線 \tilde{C} 也通过点 ∞ ，並且在無窮远处与 C 有共同的切線。如果此外区域 $D(\tilde{C})$ 还包含在区域 $D(C)$ 內，那末

1) 對於任何一个 $v>0$ ，区域 $D(\tilde{C}_v)$ 都包含在区域 $D(C_v)$ 內，並且只有当 \tilde{C} 与 C 相合时， \tilde{C}_v 与 C_v 方能相接触；

2) 如果 C 与 \tilde{C} 有一个公共的正則点 z_1 ，那末在这个点处便有

$$|f'(z_1, \tilde{C})| \leq |f'(z_1, C)|; \quad (6)$$

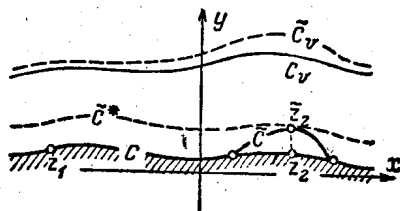


圖 128

^① 這便是說，由 C 經变换 $\zeta = \frac{1}{z}$ 而得到的那条曲線 C^* ，在点 $\zeta=0$ 处具有切線与有限曲率。

3) 如果曲線 C 与 \tilde{C} 由單值函数

$$y = y(x), \quad y = \tilde{y}(x)$$

來給出, 而 z_2 与 \tilde{z}_2 分别是这两条曲線上使得差

$$y(x) - \tilde{y}(x)$$

达到最大值的那两个点, 那末便有

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C})| \geq |f'(z_2, C)|, \quad (7)$$

並且(6)与(7)中的等号, 只有当 \tilde{C} 与 C 相合时方能成立。

根据在上一節中所举过的理由, 我們只需要考虑当 C 与 x 軸相合、 \tilde{C} 与 C 僅在無限小的一段 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 上不同、在这段上 \tilde{C} 是一段曲率很小的圆弧时的情形便夠了。在这情形下

$$f(z, C) \equiv z,$$

根据第 34 節中的公式(7), 在不計高級無限小的精确程度內,

$$f(z, \tilde{C}) \approx z + \frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{z-a}. \quad (8)$$

它的反函数可以照在上一節中那样來求得, 其形狀是

$$z \approx w - \frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{w-a}.$$

在其中置

$$w = u + iv,$$

並把实数部分与虛数部分分开, 在固定了 v 时我們便得出曲線 \tilde{C}_v 的参数方程:

$$\left. \begin{aligned} x &\approx u - \frac{\sigma}{\pi} \frac{u-a}{(u-a)^2 + v^2}, \\ y &\approx v + \frac{\sigma}{\pi} \frac{v}{(u-a)^2 + v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

从(9)的第二个方程中可以看出, \tilde{C}_v 位於区域 $y > v$ 內, 即, 位於区域 $D(C_v)$ 內, ——这便証明了定理中的第一个結論。

要証明結論 2), 我們在 x 軸上取距离 a 較 σ 为远的任何一个点 x , 並在这个点处求函数(8)的導数; 我們有

$$f'(x, \tilde{C}) \approx 1 - \frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{(x-a)^2} < 1,$$

这便是所需要证明的。

要证明结论 3), 我们把 C 按向量 $\tilde{z}_2 - z_2$ (向上) 作平行平移后所得的那条曲线, 记作 \tilde{C}^* 。显然, 我们有

$$f(z, \tilde{C}^*) = f(z - \tilde{z}_2 + z_2, C),$$

因此,

$$f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}^*) = f'(z_2, C).$$

另一方面, $D(\tilde{C}^*)$ 包含在区域 $D(\tilde{C})$ 内, 并且 \tilde{z}_2 是 \tilde{C} 与 \tilde{C}^* 的公共点; 所以, 根据已经证明的结论 2),

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}^*)| \leq |f'(\tilde{z}_2, \tilde{C})|.$$

把最后这两个关系式相比较, 我们便得出所求的不等式 (7)。于是定理就完全证明了。

所证明的这个定理可以有简单的流体力学上的解释。设有一个很深的具有平滑的垂直侧壁的渠道, 它的底部的截面的形状为曲线 C 。那末,

如果在渠道的某一处底部升高了, 那么流体的所有流线也便都升高, 而且在底部的没有经过形变的点处, 流速减小。

3) **带形的情形** 设 C_0 与 C 是两段弧, 除了它们的端点 a_1 与 a_2 之外, 没有公共点。这时我们并不把这两个点 a 中有一个点或两个点都与无穷远点 $z = \infty$ 相合的情形除外。用 $D(C_0, C)$ 来记由曲线 C_0 与 C 所围成的那个区域, 并用

$$w = f(z, C_0, C); f(a_1, C_0, C) = -\infty, f(a_2, C_0, C) = \infty \quad (10)$$

来表示把区域 $D(C_0, C)$ 保角地映射到带形 $0 < v < 1$ 上去的那个函数。函数 $f(z, C_0, C)$ 在可以相差一个实常数项的程度内被确定, 这常数项现在对我们不起什么作用。我们把在映射 (10) 下变换成直线

$$v = \text{const} \quad (0 < v < 1)$$

的曲线记作 C_v, \tilde{C}_v 。

我們还假定, 曲線 C_0 与 C 可以借單值函数

$$y = y_0(x), \quad y = y(x)$$

來給出, 並且 $|y'_0(x)|$ 与 $|y'(x)|$ 都不超过一个正的常数 m 。我們來考慮平行直線束

$$y = kx + b, \quad |k| < \frac{1}{m},$$

这个直線束中的每一條直線, 同 C_0 与 C 的交点都不多於一个。曲線 C_0 上使得这直線束的包含在 C_0 与 \tilde{C}_0 之間的直線段达到最大值的那个点 z_2 , 以及其在曲線 \tilde{C}_0 上的对应点 \tilde{z}_2 , 我們称为(方向 k 的)最大形变点。

有下述定理成立:

定理 3. 如果区域 $D(\tilde{C}_0, C)$ 包含在区域 $D(C_0, C)$ 內, 那末

1) 對於任何一个 $v (0 < v < 1)$, 区域 $D(\tilde{C}_v, C)$ 总包含在 $D(C_v, C)$ 內, 並且只有当 \tilde{C}_0 与 C_0 相合时, 曲線 \tilde{C}_0 与 C_0 方能相接触;

2) 如果曲線 \tilde{C}_0 与 C_0 有公共点 z_1 , 那末在这个点处有

$$|f'(z_1, \tilde{C}_0, C)| \leq |f'(z_1, C_0, C)|; \quad (11)$$

3) 在曲線 C 上的任何一个点 z 处, 有

$$|f'(z, \tilde{C}_0, C)| \geq |f'(z, C_0, C)|; \quad (12)$$

4) 在最大形变点处有

$$|f'(z_2, \tilde{C}_0, C)| \geq |f'(z_2, C_0, C)|. \quad (13)$$

在(11)–(13)中的等号, 只有在曲線 \tilde{C}_0 与 C_0 相合时方能成立。

同在前面所討論的那些情形中一样, 这定理的証明可以在下述假定下來進行: $D(C_0, C)$ 是單位帶形 $0 < y < 1$ (即, C_0 是 x 軸, C 是直線 $y=1$), \tilde{C}_0 处处与 C_0 相合, 僅在很小的一段 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 处除外, 在这一段上 \tilde{C}_0 是一段曲率很小的圓弧。在这样的假定之下, 根据第 34 節中的公式(13), 函数 $f(z, \tilde{C}_0, C)$ 的形狀应当是

$$w = f(z, \tilde{C}_0, C) \approx z + \frac{\sigma}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi(z-a)}{2}, \quad (14)$$