

# 流体力学概论

[德] L. 普朗特 著

科学出版社

# 流体力学概論

(德) L. 普朗特著

郭永怀等译

科学出版社

1974

2P4/62

## 内 容 简 介

本书是 L. Prandtl 的名著，内容丰富，概念鲜明，论述深入精辟，旨在为初学者、高年级大学生及航空、水利、气象等方面有关工程技术人员提供一个流体力学的导引。

全书共分五章。头三章是基础部分，后两章所论述的是在前三章基础上的较为深入的问题。书中排印小号字的内容系用以提供进一步的知识，以便对有关问题获得更为深刻的见解。

与一般的流体力学的数学理论不同，书中尽可能地避免复杂的数学分析，而着重物理直观，旨在阐明流体力学的基本概念及问题的力学本质，培养读者的独立思考能力。强调应用是本书的又一特点，对于诸如航空、水利、气象等等工程技术领域的许多重要问题均有述及。

书末及脚注中给出了许多参考文献，以供进一步查考。

L. PRANDTL  
ESSENTIALS OF FLUID DYNAMICS  
With Applications to  
Hydraulics, Aeronautics, Meteorology  
and other Subjects  
Hafner Publishing Company  
1952

## 流 体 力 学 概 论

[德] L. 普朗特著

郭 永 怀 等译

\*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1966 年 5 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1974 年 2 月第二次印刷 印张：14 7/8

印数：3,701—11,700 字数：391,000

统一书号：13031·195

本社书号：330·13—2

定 价：2.00 元

## 出 版 说 明

L. 普朗特的《流体力学概论》一书，综述了二十世纪前半叶流体力学研究成果，比较清晰地阐明了流体力学的基本概念和有关应用。

本书共五章，分别叙述流体静力学、不可压缩无粘性流体力学理论、粘性流体力学理论和应用、可压缩流体力学理论以及若干实际课题。尽管近二十年来，由于实际需要，流体力学有了很大的进展，但本书涉及的各种基本概念仍是深入研究的基础。至于近年来流体力学在高速、高温、高空方面的发展，则要求读者结合自己的工作参阅国内外有关的最新著作。

本书虽有长处，但也有弊病。例如，不少地方（如湍流研究、阻力理论、机翼理论和水力机械演变等部分），由于追述一些陈旧的原始观念，而显得内容烦琐。因此，我们必须遵照毛主席关于“批判地吸收外国文化”的教导，取其精华，弃其糟粕。

本书是郭永怀同志生前根据英译本翻译的（最后一章由倪锄非同志译、郭永怀同志校）。在翻译和整理过程中，曾参照了德文原版及其俄译本，并对书中艰涩、隐晦之处作了一些注释。

## 作者为英译本写的序

本书是我的《Führer durch die Strömungslehre》一书 1949 年版的译本。此德文书名本可译为“流体动力学导引”，以表明本书是为读者——初学者、高年级大学生以及邻近学科的专家——写的一本入门书。为了做到这一点，书中尽可能避免复杂的数学分析，并且一般说来，公式是处于从属地位的，其主要目的是为了使读者能够清楚而直观地理解。英国的出版者对德文书名的直译曾提出过某些异议。最后，我们选用了《Essentials of Fluid Dynamics》这一译名，以使本书同具有大量公式的普通教科书相区别。

读者将会发现，本书正文有一些部分用大号字排印，而另一些部分用小号字排印；在这里我们着重指出这种区分的意义，是重要的。简而言之，大号字的部分给出初步介绍，而小号字的各段则为水平较高的读者和专家们提供更为详尽的知识。其中，前三章大号字的内容本来就是初学者的入门课程，而在第四章和第五章中，大号字的部分则假定读者已经学习过前三章，因而能够理解必然要论述的稍微深入一点的问题。自始至终，小号字的内容是为对数学感兴趣的读者和希望更深入地理解流体动力学这一学科的读者提供的。最后，脚注中包含的有关原始论文和教科书的大量参考文献，可供已经熟悉流体动力学的一些问题，为了进一步深入了解而希望参考原始资料的读者使用。（这里应当说明，参考文献目录决不是完备的，而只包括那些被认为是对读者最有帮助的参考文献。）

在本书最后，列出了最重要的教科书和参考书的目录。

作为一件令人关心的事，让我简略地谈谈本书德文原版的由来，它乃是从《Handwörterbuch der Naturwissenschaften》，第 IV 卷（Gustav Fischer, Jena, 1913）中的两篇关于液体和气体运动的文章

逐步发展起来的。这两篇文章又曾以更为详尽的形式刊登在 Müller-Pouillet 的《Lehrbuch der Physik》第 I 卷 2 (1929) 中。在 1930 年，这两篇文章连同其他一些来源相同的文章，由 Blackie & Son 出版社翻译出版，题名为《固体和流体的物理学》。在 1931 年我的这本书才第一次以独立的形式由 Vieweg und Sohn 出版社 (Brunswick) 出版，书名为《Abriss der Strömungslehre》(“流体力学概论”); 1935 年又出了第二版。经过大大扩充和修订的版本于 1942 年问世，其目的乃是为高年级大学生掌握与个别章节有关的专门文献铺平道路。1944 年出了第二版，1949 年又出了第三版；本书即为此第三版的译本，并且由于论述战后数年中到达我们手中的一些外国科学家的几篇重要论文，因而篇幅略微有些扩充。

(下略。)

L. 普朗特

1952 年于格廷根

# 目 录

<b>第一章 液体和气体的平衡</b> .....	1
§ 1.1. 液体的特性.....	1
§ 1.2. 应力的理论.....	2
§ 1.3. 流体中的压力.....	5
§ 1.4. 流体中的压力分布(重力不计).....	7
§ 1.5. 气体的特性.....	8
§ 1.6. 重液体的平衡.....	11
§ 1.7. 重气体的平衡.....	15
§ 1.8. 大气压和液压的交互作用。液体压力计.....	19
§ 1.9. 减压。气压计.....	22
§ 1.10. 在其他力场中流体的平衡.....	24
§ 1.11. 表面张力(毛细现象).....	27
<b>第二章 运动学。无粘性流体动力学</b> .....	32
前言.....	32
A. 运动学 .....	32
§ 2.1. 表示运动的方法.....	32
§ 2.2. 连续性.....	36
B. 无粘性流体动力学 .....	38
§ 2.3. 运动流体中的力。Bernoulli 定理.....	38
§ 2.4. Bernoulli 定理的推论.....	43
§ 2.5. 运动流体中压力分布的进一步讨论.....	47
§ 2.6. 两股流体的汇流。间断面。涡旋的形成.....	51
§ 2.7. 间断面的进一步讨论。压力的测量.....	55
§ 2.8. 均质无粘性流体运动的进一步讨论。无旋运动.....	58
§ 2.9. 无旋运动的进一步讨论.....	64
§ 2.10. 有环量的无旋运动。翼型的举力。Magnus 效应 .....	72
§ 2.11. 无粘性流体的有旋运动。涡丝.....	76

---

§ 2.12. 定常运动的动量定理.....	81
§ 2.13. 关于动量定理的另一些例子.....	85
§ 2.14. 速度脉动情况下流动的动量定理.....	89
§ 2.15. 液体的表面波.....	91
§ 2.16. 明渠里的水流.....	99
<b>第三章 粘性流体的运动. 湍流. 流体阻力. 实际应用.....</b>	<b>103</b>
§ 3.1. 粘性(内摩擦).....	103
§ 3.2. 动力相似性. Reynolds 数.....	108
§ 3.3. 物体在粘性流体中的运动. Stokes 公式. 边界层.....	111
§ 3.4. 湍流.....	117
§ 3.5. 湍流的进一步研究.....	128
§ 3.6. 涡旋的形成.....	144
§ 3.7. 流动分离的防止.....	150
§ 3.8. 二次流.....	155
§ 3.9. 粘性起主导作用的流动.....	159
§ 3.10. 轴承润滑的流体动力学理论.....	163
§ 3.11. 等截面直管和渠道中的流动.....	171
§ 3.12. 变截面渠道中的流动.....	180
§ 3.13. 流体中运动物体的阻力.....	186
§ 3.14. 流体阻力的流体力学理论.....	192
§ 3.15. 关于流体阻力的实验结果.....	200
§ 3.16. 翼型.....	209
§ 3.17. 机翼理论.....	220
§ 3.18. 机翼理论的实际应用. 实验验证.....	230
§ 3.19. 螺旋桨.....	236
§ 3.20. 对螺旋桨的进一步讨论. 风车. 其他类型的螺旋桨.....	243
§ 3.21. 水轮机. 泵和压缩机 .....	255
§ 3.22. 流体力学和空气动力学的实验方法.....	262
<b>第四章 有显著体积变化的流动(气体动力学).....</b>	<b>275</b>
前言 .....	275
§ 4.1. 压力的传播. 声速.....	276
§ 4.2. 一维定常可压缩流动.....	281

---

§ 4.3. 有阻力情况下可压缩流的能量定理.....	287
§ 4.4. 正激波理论.....	289
§ 4.5. 有阻力的流动.....	295
§ 4.6. 二、三维超声速流动。绕角的流动。气体射流 .....	298
§ 4.7. 二维超声速流动的一般近似法.....	303
§ 4.8. 亚声速流动.....	306
§ 4.9. 物体的超声速运动。弹体的阻力.....	315
§ 4.10. 绕尖物体和翼型的二维超声速流动.....	318
§ 4.11. 高速实验技术.....	324
<b>第五章 其他课题.....</b>	<b>330</b>
前言.....	330
A. 几种物态的联合效应 .....	330
§ 5.1. 气蚀.....	330
§ 5.2. 水锤。滑行面.....	336
§ 5.3. 水和空气的混合物.....	342
§ 5.4. 气流中的颗粒.....	348
§ 5.5. 水流中的颗粒.....	352
§ 5.6. 加速流体中的物体。流体动力远距作用.....	360
B. 旋转物体和旋转坐标系 .....	364
§ 5.7. 基本原理。Bernoulli 方程和几个具体问题.....	364
§ 5.8. 地球旋转对大气中和海洋中的无粘性流的影响.....	370
§ 5.9. 摩擦风及类似的现象.....	375
§ 5.10. 绕旋转圆盘的流动和阻力公式.....	384
C. 分层流体在重力作用下的流动 .....	387
§ 5.11. 两种密度不同的流体.....	387
§ 5.12. 密度的连续变化.....	392
§ 5.13. 层化和地球的旋转的联合效应.....	404
§ 5.14. 水平密度和速度梯度与地球旋转的联合效应。一般环流...	409
D. 运动流体中的传热。热所引起的流动 .....	417
前言 .....	417
§ 5.15. 传热的一般原理。强迫流动的特例.....	418
§ 5.16. 传热引起的密度差所产生的自然流动.....	433

参考文献.....	449
附录.....	453
内容索引.....	462

# 第一章 液体和气体的平衡

## § 1.1. 液体的特性

液体之所以异于固体，在于液体的质点比较容易移动。要想改变固体的形状，必须施加一定的力（有时可能相当大），可是要改变液体的形状，只要能有充分的时间任其变形，就用不着施加外力。液体，和固体一样，抗拒速度大的变形，但是这种抗力当流动一旦停止便迅速消逝。液体的这种抗拒变形的特性就叫做**粘性**。在§ 3.1 中我们将仔细地讨论粘性。除了普通易流动的液体之外，还有粘性很大的液体，它们对于变形的抗力是相当大的（但是当液体运动一停止，这抗力就等于零）。介乎这种液体和（非晶形的）固体之间，存在着各种不同程度的流动性。例如，玻璃在热了之后就具有这种不同程度的流动性，而沥青以及类似的物质在常温下就显示出这种性质。

**实验：**把一桶沥青倒置，视温度的不同它要几天或者几个星期才能完全流出来。流出来以后的沥青形成一个扁饼，虽然它确实继续在流动，人们却可以在上面走动而看不出痕迹；但是，如果在上面站了一会儿，那就会留下脚印。要是用锤子猛敲，它会象玻璃一样地破碎。

在研究液体的平衡时，我们只讲处于静止状态的，或者流动得很缓慢，以致可以把它当作处于静止状态的液体。因此，我们就可以忽略抗拒变形的抗力而并不损害准确性，并且，我们立刻就有液体状态的以下的定义：**液体在平衡时对于变形沒有抗力**。

根据物质分子运动论的概念，物体的最微小的质点（分子）在不断地运动；正是这种运动的动能表现为热。从这个观点出发，液体和固体的区别，在于液体的质点并不象固体的那样围绕固定位置振动，而是不断迁移位置<sup>1)</sup>。

1) 更为详细的解释参看 M. von Laue, *Forsch. u. Fortsch.*, Vol. 21/23, p. 53 (1947).

假如在液体里有了应力，则在有应力差的方向引起屈服的那些位置迁移就容易发生。当液体处于静止时，这种屈服就足以使应力差很快地消失；但是，当液体的形状在改变时，就产生应力，形状的改变越快应力越大。随着温度上升，非晶固体会逐渐软化；软化可以设想是这样发生的：假如把固体加热，也就是说，如果增加分子运动的能量，最初所发生的，仅是少数质点碰巧在那个时候有特别大的振幅而迁移了位置；继续加热，迁移位置的越来越多，最后，在固体里面迁移位置成为普遍的现象。对于结晶体来说，从固体状态转变为液体状态的过程，通常是以熔解的方式不连续地实现的，也就是说，这是由于规则的结构被破坏的缘故。

液体的另一个特性，是它们对体积变化有着巨大的抗拒力。要想把一公升的水压进半公升的容器里是很不可能的一件事；如果把它放进一个两公升的容器里，容器只能半满，即使把水上面的空气抽出去也仍然如此。但是，水并不是绝对不能压缩的，在高压下，可以将它压缩到看得出的地步（大约一千个大气压<sup>1)</sup>可以使水的体积减少百分之五）。类似的关系也适用于其他液体。

### § 1.2. 应力的理论

我们现在较严密地考虑平衡状态下液体中应力的性质。看来，在这里值得提一下，关于固体在平衡时所受的力的普遍定理，也可以应用到液态物体上去。为了证实这一点，时常利用一个专门的“刚化原理”。这个原理是根据以下的考虑：“任何能自由运动的体系，其平衡不会因为任一可运动部分的随后刚化而受到影响；这就是说，可以想象把平衡的液体的任何部分刚化起来，而并不扰动平衡。于是，刚体平衡的定理就可以应用到已经刚化了的那部分液体上去了。”<sup>2)</sup>不过，这种利用刚体的绕弯的办法并不是绝对必要的。力学上的一般平衡定理是一再借“刚体”的概念导出的，但这些定理也完全可以应用到系中各个质点有内部运动的自由的“静止的质点系”上去（虽然这里考虑整个体系处于平衡而没有利用这

1) 关于压力的单位，参看 § 1.3, p. 6; §§ 1.8, 9, pp. 21—24.

2) 当然，这里并不是指涉及体积变化、结晶等等的物理上的凝固，而只不过是指没有任何位移和体积变化的理想刚化而已。

种内自由度). 只要我们是讨论实际的静止情况, 这两种观点都同样可以自圆其说; 但要是我们讨论有运动的情况, 那么刚化原理就容易使我们遭到困难, 因为实际上并没有刚体. 鉴于以后要应用到流体力学上, 我们现在进而把另外一个方法的主要原理简单地叙述一下, 这个方法通常在弹性力学里也被采用.

我们一开始就假设: 所有的力都是质量间的相互作用. 譬如, 如果质量  $m_1$  以力  $F$  吸引另一质量  $m_2$ , 则  $m_2$  就用同样的力  $F$  吸引  $m_1$ ; 也就是, 这两个力是作用在相反的方向 (Newton 的作用和反作用定律). 在一质点系里(它们可以是从整体里任意选出来的), 我们要区别两种力: **内力** 和 **外力**. 内力作用于同一个体系内的两质点之间, 所以它们总是成对地出现的, 而方向则相反; 外力作用于本体系的一质点和外界的一质点之间, 因此它在这个体系内仅出现一次. 假如我们把所有作用在这个体系的一切质点的力合成起来(矢量加法或各分量分别相加), 则内力总是成对地抵消, 因而最终只有外力出现. 要使这个体系处于平衡, 这些作用在每个质点上的力的合力(矢量和或三个分量和)必须等于零. 假如我们把系内所有质点上的力加起来, 正如前面所述, 则只有外力的合力存在. 而由于平衡的关系, 各个质点上的合力等于零, 所以作用于这个体系上的外力的合力也就等于零. 这个定理除了假定质点系处于平衡状态以外, 对质点系未作任何假设, 因而它在各种方式的应用中极其有用. 假设我们用直角坐标, 这个定理包含三个方程:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

这里  $X, Y, Z$  是外力在  $x, y, z$  轴方向的分力.

对于外力所形成的力矩也有一个完全相似的定理. 在平衡时这些力矩也必须等于零.

在弹性体和液体里, 我们都是讨论体内的应力. 它们显然是由作用在体内最小质点间的内力所形成. 通常, 对于大量质点的区域, 我们只满足于掌握那里的平均状态, 因为要把质点间一切的力都描述出来未免太烦杂了, 何况这些质点还在不断地作强烈的热运动. 但因为我们的定理仅仅论及外力, 我们怎能抓住内力? 回

答是：“我们必须把内力变作外力！”这可以用以下的办法来实现：我们想象一个物体被切成两块，我们选取其中的一块（图 1.1 中的 I）作为我们的质点系，于是 II 的质点作用在 I 上各质点的力，原来是内力，现在就变成外力了。如果整个物体处于外加压应力（由图 1.1 中的两个箭头所示）作用之下，则也还有内应力；而如果我们想象此截面已是完整的，则可知右边各质点的力就通过此截面作用到左边的质点上。如果我们把这些力都加起来（就是合并成合力），则这个合力便与作用在 I 上的力相平衡（参看图 1.2）。这就对通过此截面所作用的力的合力给出了一个明确划一的描述<sup>1)</sup>。

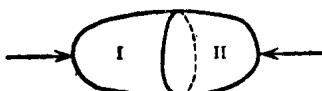


图 1.1



图 1.2

我们现在用“**应力**”一词来指作用在截面单位面积上的力。在上述例子中，如果我们把总力用截面积来除，显然我们就得到该截面上的平均应力。所以，我们又看到，“一个面积上的应力”正如力一样也是一个矢量。

这种利用一个想象的截面把内力变作外力的原理（以下简称为“截面原理”），可以广泛地应用；想要研究物体内部的应力，我们可以用几个这样的截面把一个体元（平行六面体、棱柱体、四面体等等）从物体内部分隔出来，研究其平衡。最简单的情形，是所有作用在这体元上的力均为压缩力。根据这些体元的平衡，我们就可以导出关于应力的各种重要定理。现在把其中之一作为一个例子提出来，并予以证明。“设有三个平面共同形成一个立体角。如果那三个平面上的应力矢量给定，则任何其他截面上的应力矢量也就可以知道。”

**证明：**我们用欲求其中应力的第四个平面去截这个立体角，使它形成一个四面体，如图 1.3 所示。1, 2 和 3 等力可以从给定

1) 当然，我们也完全可以考虑 II，结果是一样的，只是力的方向相反（即由 I 作用于 II）。

的应力矢量乘以相应的三角形面积来得到。第四个力仅能有一个方向和一定的大小才能与 1, 2 和 3 等力平衡；这个力除以相应的三角形的面积就是所要求的应力。为了计算方便，我们选 1, 2, 3, 诸面为坐标面（见图 1.3）。

关于应力理论的详细讨论可以在弹性力学教科书上找到。这里我们仅仅提一下：“应力”代表通过一点的所有可能截面上的应力矢量的全体，从而可以和一个椭球面联系起来；因而应力的分量就可以用

“张量”的形式表示出来。根据前面的定理，当形成一个立体角的三个截面上的应力矢量给定时，任何一点的应力（连同相应的椭球面）也就确定了。对应于椭球的三个主轴，对每个应力状态而言都存在三个相互垂直的截面，这些截面上的应力矢量与各该面垂直。这样区分出来的三个应力叫做**主应力**，而相应的方向叫做**主方向**。

### § 1.3. 流体中的压力

平衡时，流体内的应力特别简单。抗拒变形（就是阻碍质点彼此相对移动）与摩擦有关。假如两个相接触的固体之间没有摩擦，则压力就必定和此两物体的接触面垂直（因而当这两个物体中任一物体沿接触面滑动时并不作功）。同样地，流体内不抗拒变形是由于：**在流体内部，应力到处与它所作用的面垂直**，这时通常就叫做**压力**。我们立刻可以利用这个事实作为流体状态的定义，这个定义和 § 1.1 中所给出的定义完全等价。

根据流体里的压力的这一特性，由考虑一个简单的平衡情况，我们就立刻可导出关于压力的另外一个特性。我们设想在流体内分隔出一个小三棱柱体。设顶、底两端面与各棱边垂直（当然，我们也可以设想此棱柱体在流体中就地刚化，而研究其余的流体施加于此棱柱体上的力的平衡），两端面上的压力大小相等而方

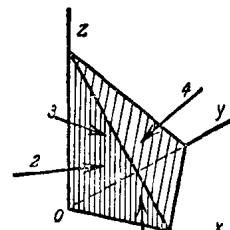


图 1.3

向相反, 所以彼此平衡, 因而就无须再讨论了。由于各侧面上的力是与各该面垂直的, 它们就必定在与各稜边垂直的平面内。图 1.4 示出了此稜柱体的横截面和侧面上所作用的法向力。为了能平衡, 这些力必须形成图 1.5 所示的三角形。由于图 1.5 内三角形的各边与图 1.4 内三角形的各相应边垂直, 这两个三角形的对应角便相等, 因而相似。由此可见, 这三个压力便与稜柱体各相应侧面

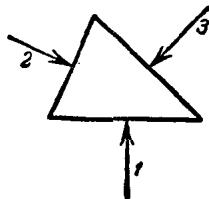


图 1.4

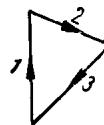


图 1.5

的面积成正比。如是, 如果我们要得到单位面积上的压力, 就必须将总压力除以稜柱体的各相应的侧面积。既然稜柱体的侧面都是等高的, 所以它们的面积就与它们的底边(稜柱体端面的边)成正比。由此可见, **单位面积的压力**(我们以后不多费口舌, 就叫它**压力**)在稜柱体的所有三个侧面上都相同。由于稜柱体是任意选取的, 于是我们得出结论: **流体内任何一点的压力是各向均等的**(更准确地说, 对于所想象的截面的所有可能位置都相同)。在这种情形下, 应力椭球面就是一个球面。因此, 要决定这样一个压力系统(叫做静水压力), 只需有一个数值, 即压力  $p$ , 就够了。根据前面所述, 很明显,  $p$  就表示作用在单位面积上的力。量度压力的单位是各式各样的, 因所选用的力和面积的单位而异。实际上, 用每平方厘米有多少公斤 ( $\text{Kg}/\text{cm}^2$ )<sup>1)</sup> 或者用每平方米有多少公斤 ( $\text{Kg}/\text{m}^2$ ), 或者用英制每平方吋有几磅 ( $\text{Lb}/\text{in}^2$ ) 是方便的。关于某些别的单位请参看 §§ 1.8, 9。

1) 这里我们采用以头一个字母大写表示引力单位的系统, 因而, 例如一千克的质量我们记作  $\text{kg}$ , 而 1 公斤(千克重)则记作  $\text{Kg}$ 。

### § 1.4. 流体中的压力分布(重力不计)

流体是有重量的。可是在很多情形下，特别是压力高的时候，就无需计及重力的影响。这样就把讨论大大地简化了。我们仍旧从一个处于平衡的棱柱体开始；但这里这个棱柱体取得长一些，而来考虑关于轴向位移的平衡。开始我们假设流体内的压力是逐点变化的。假设棱柱体的横截面积(等于端面面积；我们假设端面垂直于轴)为  $a$  (图 1.6)，我们可以将这个面积取得很小，使得它上面的压力变化可以忽略不计。设棱柱体一端的压力是  $p_1$ ，而另一端的是  $p_2$ ，则便有作用于轴向的两个方向相反的力  $ap_1$  和  $ap_2$ 。但根据基本假定，棱柱体各侧面上的压力都和该侧面垂直，所以也和棱柱体的轴垂直，因而它们对平行于棱柱体轴

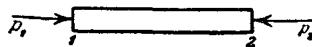


图 1.6

的分力毫无作用，不管侧面上的压力是怎样分布的。这就是说，为了平衡，在所讨论方向的各力， $ap_1$  和  $ap_2$ ，它们自己必须相平衡，于是我们必定有

$$ap_1 = ap_2, \quad \text{或} \quad p_1 = p_2;$$

由于棱柱体的位置是完全任意的，这就是说，在沒有重力(和任何其他外加力)时，**流体中各点的压力是相同的**。

万一流体是装在一个狭窄而弯曲的空间里，致使不可能在任意两点间划出一个棱柱体，我们仍旧可以随意重复我们前面的论证——从第一点到第二点，再从第二点到另外一个方向的第三点，等等，这样一步一步地直到所需的端点  $n$  为止。从  $p_1 = p_2, p_2 = p_3, \dots$ ，等等，我们便可以得到  $p_1 = p_n$ 。另外一个更为妥善的论证是这样的：假想我们把现在所考虑的狭窄而弯曲的细管摆在一个容器里，其中充满了该流体。然后，假设在平衡达到以后，除了细管里的流体以外，其余的都被刚化。根据我们的刚化原理(§ 1.2)，将管外的流体刚化丝毫不改变(平衡状态下)力的状况；也就是说，在平衡的时候，流体里的压力是处处相同的，不管空间是多么狭窄。

**注：**在极狭窄的间隙里，当流体的压力改变(例如通过外载荷)后，要经过相当长久的时间才能达到平衡。例如，对于可塑的陶土(由很细的颗粒所组成，颗粒之间则充满了水)，这段时间可以是几天，而对整个地下粘土层来