變截面剛構分析續編

蔡方蔭著

科學出版社

變截面剛構分析續編

蔡 方 蔭 著

科 學 出 版 社

變截面剛構分析續編

著者	蔡方蔭
出版者	科學出版社 北京東皇城根甲42號 北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
印刷者	中科藝文聯合印刷廠
總經售	新華書店

書號: 0402	1956年2月第一版
(專) 116	1956年2月第一次印刷
(滬) 0001—2,290	開本: 787×1092 1/16
字數 108,000	印張: 12 3/4　插頁: 4

定價: (8) 2.83元

內　容　介　紹

本書係著者 變截面剛構分析”一書出版後所寫關於同一題材的論文四篇所組成，因係前書之補充材料，故標題爲“變截面剛構分析續編”。

第一篇所述之“不均衡力矩傳播法”係現下分析剛構之力矩一次分配法中之良法。第二篇將角變位移法推廣而用於有跨變橫梁之剛構，前此論及者甚少，且過於簡略。第三篇將桁架常數之計算加以簡化，旣不必先求各桿之應力，亦不須列一冗長之計算表。第四篇敍述單層桁架剛構之正確分析法，係現下分析此項剛構之很便於實用的正確方法，其主要部分並曾於 1955 年 6 月 8 日在中國科學院學部成立大會上宣讀。此四篇內容之一部分前此只很簡略地在期刊中發表過。

本書與著者之前書相同，各篇均有獨立性；旣便於工程師及研究生作進修之用，亦可供敎學時作參考之需。

序

拙著"變截面剛構分析"一書出版後，自1954年4月至10月間，著者繼續寫了關於同一題材而互有關係的論文四篇，共約十餘萬言，合成一書，題爲"變截面剛構分析續編"，作爲前書之補充。

本書第一與第二兩篇，係就一般剛構立論，第三與第四兩篇則專就桁架剛構(卽以桁架爲橫梁之剛構)立論，玆扼要說明此四篇之內容如下：

第一篇所述不均衡力矩傳播法之概念，應歸功於顧翼鷹同志[1]，但採用角變傳播係數以傳播不均衡力矩，將顧同志原來分爲三步之計算合併爲一步而大大簡化，則係著者偶爾所發現。著者前此[2]根據林同棪、柯勞塞克及孟昭禮三氏分析法之數學關係，曾將此法扼要發表。第一篇將此法從頭導算，自成體系，並將其應用推廣到多層多間之剛構，俾讀者可以不必經許多周折卽可了解此法之原理與廣泛應用。

包含跨變之角變位移法，在極少數之中外書刊中，曾簡略提到，但只列舉其公式，未列出其導算，且所採用之常數或淆混不清，其應用之範圍或只限於對稱式構件。第二篇將此項公式推廣而用於不對稱之構件，並列出其導算。此外並根據結點變形必須相容之條件，列舉校核所得結果之方法。根據著者之經驗，分析跨變結構所得結果之校核，宜用形變法，只憑靜力學校核常嫌不够。

桁架與拱梁及折梁相同，係一種有跨變之構件，此項情况前此似未曾被注意。故桁架剛構之正確分析，除採用其他步驟外，須用桁架之角變與跨變兩項常數。第三篇將梯形與矩形桁架之角變常數計算加以簡化，並根據第二篇之公式，說明包含跨變時，桁架之他種常數之計算。

據著者所知，除計算工作繁重而不便實用之最少功法與冗力法外，現下所有分析桁架剛構之方法，均係根據種種之特殊假定。所得之近似結果，旣不符合結構變形之實際情况，又不能保持各桿件於結點處之連續性。第四篇所述桁架剛構之正確分析，係根據(1)柱頂力矩作用與(2)桁架跨變影響之兩項簡單原理。依照此兩項原理以計

1) 土木工程學報，第1卷，第3期，1954年9月，363—368頁。

2) 同上，345—348及358頁。

算柱與桁架之各項常數，再採用任一種包含桁架跨變影響之剛構分析法(例如第二篇之角變位移法)，則所得結果之正確性，與不作任何特殊假定用最少功法或變位法所得者完全相同。著者曾將上述兩項原理簡略發表[1]，並曾於1955年6月8日在中國科學院學部成立大會上宣讀。在此篇中，除導得分析含有變截面柱（例如階形柱）與單階式桁架剛構所需之各項公式外，並將所有算例之計算詳細列出，以供參考而便實用。

為便於校核起見，本書算例之數字，大部分仿照柯勞塞克所著"形變分配法"一書之先例，用計算機算至六位甚或更多位有效數字。於實際工作中，除特殊情形外（例如求相差甚微兩數之差時，或算例2-1與2-2之計算及算例4-10之校核），一般以算至四或五位有效數字較為適宜。

本書屬稿時多承潘家錚、常士驃及祝慕高三同志不時多方協助，脫稿後又承錢令希教授與潘家錚同志將全稿校閱一遍，鄭朝強同志校閱了第一篇，都提出若干修改意見；校樣承許保明同志細心校對，均此一併致謝。

本書中數學公式與數字計算至為繁多，著者雖屢次校核，訛誤之處，恐仍不免。如荷讀者不吝指出，著者當不勝感幸。

蔡方蔭
1954年11月5日於北京第二機械工業部

1) 土木工程學報，第2卷，第1期，1955年3月，67—98頁。

目　　錄

第 一 篇

不均衡力矩傳播法

1. 緒 言

近世剛構分析法之繁多，眞可謂推陳出新，層出不窮。著者認爲所有剛構分析法可分爲兩大類型：卽採用剛構常數法與不採用剛構常數法。任一剛構之形式(包括其中各桿之長度、截面及支承等情形)既經擬定之後，其中各桿之兩端各有一個而且只有一個有獨立性的基本剛構常數存在，其計算係採用順序連鎖之程序，旣不必解聯立方程，亦無須採用往復多次運算之近似步驟。此項與荷載情形無關之剛構常數，不但可用於各種不同之荷載情形；且使在每一種荷載情形下之桿端力矩計算，大大簡化。實用之剛構常須在多種荷載情形下進行分析，採用剛構常數法在實用中之優越性至爲顯然。

採用剛構常數法又可分爲兩種：一種以桿端力矩爲計算之對象，另一種則以結點角變(亦卽桿端角變)爲計算之對象。前者以立特 (W. Ritter)[1]1) 在十九世紀末所發表之定點 (fixed point) 法爲最早。我國林同棪教授於 1934 年在國內外發表的力矩一次 (林氏原稱“直接”) 分配法[2]，將採用剛構常數之分析法大大改善。至於以後所發表之許多類似分析法，不但多與林氏法基本相同，且不及林氏法之廣泛而便於實用，例如 1936 年顧臨特 (L. E. Grinter)[3]、1938 年柯勞塞克 (C. V. Klouček)[4]、及 1948 年我國鄭朝強同志[5]與 1952 年孟昭禮教授[6]所發表之三種相似而不完全相同之分析法。著者在其最近出版之“變截面剛構分析”[7]之第十章及兩篇論文[8]、[9]中，曾將其所知之許多採用剛構常數法加以溝通與比較。玆將林、柯、鄭、孟四氏法扼要比較如下。

林氏法係直接計算設計時所必需之桿端力矩，但必須於每一桿端計算幾個不同之力矩分配比(亦稱分配係數或分配因數)，乃其最大缺點。柯、鄭、孟三氏法係直接

1) 方括號中之數字指本篇末尾所列參考文獻之號數。

計算結點或桿端之角變，將力矩分配之步驟根本删除，但設計所必需之每一桿端力矩，均必須用公式由桿端角變計算之，其缺點似更甚於林氏法；且柯、鄭、孟三氏法中所列出之公式均只限於等截面剛構，故不能直接用於分析廠房之變截面剛構。茲將柯、鄭、孟三氏法加以比較：柯氏法所採用之剛構常數，不及鄭、孟二氏所採用者有明確之物理概念，其計算亦不及鄭、孟二氏法簡明。孟氏法之應用只限於敞口式剛構，鄭氏法並可用於多層多間之閉合式剛構，且發表較孟氏為早，似少為人注意。柯氏計算剛構常數之公式，可用於直接分析較簡單之閉合式剛構。於龐大複雜之閉合式剛構，可採用近似程度極高之近似公式。著者認為此實柯氏法之最大優點而非任何其他類似分析法所可及者。

為了使林氏直接計算桿端力矩之力矩一次分配法無須於每一桿端計算幾個不同之力矩分配比，最近顧翼鷹同志[10]根據柯氏傳播角變之原則，將結點作用於桿端之不均衡力矩，先行傳播於其他各桿端[1]，求得各桿端不均衡力矩之總值，而後進行一次分配，即得各桿端分配力矩之總值。任何力矩一次分配法均係將結點作用於桿端之不均衡力矩先行分配，而後傳遞於其他桿端再行分配，故每一桿端須用幾個不同之分配比。顧氏法係將結點作用於桿端之不均衡力矩先行傳播於其他各桿端最後一次分配之，故每一桿端，只須用一個分配比。著者認為顧氏法實係力矩分配法之一大改善。著者根據顧氏之計算步驟，發現任一 ab 桿由 a 至 b 端之"不均衡力矩傳播係數"（以下簡稱"傳播係數"）等於鄭氏法 b 端與 a 端之角變比率及孟氏法中由 b 至 a 端之角變傳播係數，因此將顧氏原有之計算步驟大大簡化，並推廣而可用於變截面剛構，不但使顧氏法與林、柯、鄭、孟四氏之法相溝通，而且將該四氏法之主要優點均包含於此一法之中。此法係以傳播係數為基本剛構常數而以分配比為輔助剛構常數，後者之值可由前者計算之。基本剛構常數之計算，既如孟氏法之具有明確之物理概念，又如柯氏法之只需一個計算公式。於較簡單之閉合式剛構，可用連分式直接計算其剛構常數；於龐大複雜之剛構，並可採用與柯氏相似而近似程度極高之近似公式，將其中任一桿端之基本剛構常數不用順序連鎖之步驟而立即算得。著者認為顧氏法經改善後，實堪稱為現下最優之力矩一次分配法。

著者在前述之論文[9]中曾將此法與林、柯、孟三氏法相結合而扼要介紹，致令讀者於了解此法之前必須了解該三氏法之梗概，頗為不便。茲將此法之原理從頭導述，另闢蹊徑，既不依賴該三氏法所得之數學關係，亦不引用任何之現成公式（例如角變

1) 顧氏稱"力矩影響"。

位移公式)，俾讀者不必多費周折，即可明瞭此法之原理及應用。

2. 基本原理

(1) **桿端力矩與桿端角變之關係**　設任一變截面桿 ab 未承受任何荷載，其兩端亦無相對之位移如圖 1-1(a) 所示。採用一般所熟習之力矩分配法中之桿件常數，即該桿 a 與 b 兩端之勁度 S_{ab} 與 S_{ba} 及力矩傳遞係數 C_{ab} 與 C_{ba}，可得其 a 與 b 兩端所受之力矩 M_{ab} 及 M_{ba} 分別與其兩端角變 θ_a 及 θ_b 之關係如下：

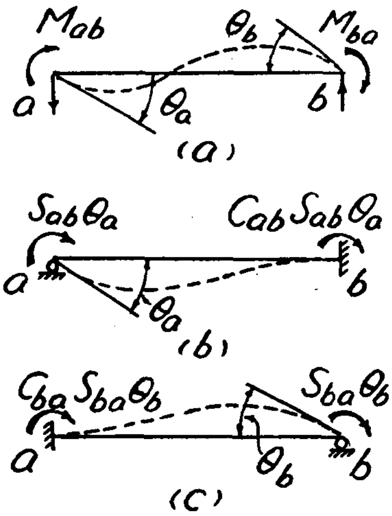

圖 1-1

如圖 1-1(b) 所示，設 a 端係簡支，b 端係固定。以任一力矩加於 a 端使該端之角變爲 1。根據力矩分配法中桿端勁度及力矩傳遞係數之定義，則前項加於 a 端力矩即係 ab 桿 a 端之勁度 S_{ab}。故 a 端之角變爲 θ_a 時，其 a 與 b 兩端所受之力矩必分別爲 $S_{ab}\theta_a$ 與 $C_{ab}S_{ab}\theta_a$。同此，若 a 端係固定，b 端係簡支，如圖 1-1(c) 所示，則當 b 端之角變爲 θ_b 時，其 b 與 a 兩端所受之力矩必分別爲 $S_{ba}\theta_b$ 與 $C_{ba}S_{ba}\theta_b$。若於圖 1-1(b) 與 (c) 中 $\theta_a=\theta_b$，根據馬克斯韋 (J. C. Maxwell) 互等變位之定理，則圖 1-1(b) 中 b 端所受之力矩 $C_{ab}S_{ab}\theta_a$ 等於圖 1-1(c) 中 a 端所受之力矩 $C_{ba}S_{ba}\theta_b$，由是得

$$C_{ab}S_{ab}=C_{ba}S_{ba}=(CS)_{ab}, \tag{1-1}$$

其中 $(CS)_{ab}$ 可稱爲 ab 桿兩端之"傳遞勁度"，將圖 1-1 (b) 與 (c) 相疊加，並採用式 (1-1) 之關係，可得任一 ab 桿兩端所受之力矩與其兩端角變之關係如下：

$$M_{ab}=S_{ab}(\theta_a+C_{ab}\theta_b), \tag{1-2}$$

$$M_{ba}=S_{ba}(\theta_b+C_{ba}\theta_a). \tag{1-3}$$

所有桿端力矩及角變，均以順時針向者爲正號，反是爲負號。

(2) **角變傳播係數之公式**　上已說明，此法之基本剛構常數即係孟氏法之角變傳播係數，惟須兩端互換採用。惟孟氏法中計算角變傳播係數須用兩個公式，且不能用於閉合式剛構；而著者計算角變傳播係數之公式只有一個，且可用於閉合式剛構。圖 1-2 示任一 ab 桿之 a 端與 $a1, a2, a3,\cdots\cdots$ 等桿(以下以 an 桿代表之)相剛接，因此該桿之 a 端係受彈性約束，即 a 端之角變 θ_a 之值視其所受之力矩 M_{ab} 而定。圖 1-2

中所有 an 桿之 n 端亦係受彈性約束。將該桿於 b 端截斷，而加以任一力矩 M_{ba}。因 a 與 b 兩端所發生角變 θ_a 與 θ_b 之正負號必係相反，故兩者之關係可以由 b 至 a 端之角變傳播係數[1] $C_{ba\theta}$ 用下列公式表之，即

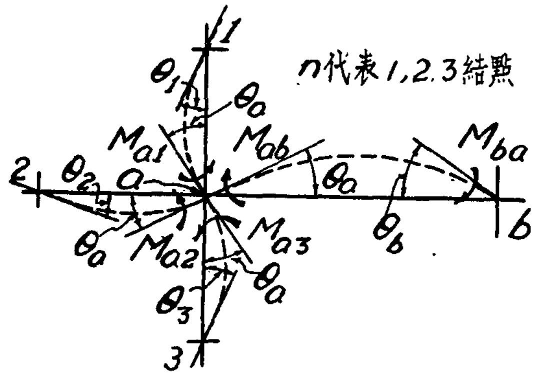

圖 1-2

$$\theta_a=C_{ba\theta}\theta_b; \tag{1-4}$$

同此，令由 a 至 n 各端之角變傳播係數各爲 $C_{an\theta}$，故

$$\theta_n=C_{an\theta}\theta_a. \tag{1-5}$$

當 ab 桿之 b 端受有力矩 M_{ba} 時，其 a 端亦必受有力矩 M_{ab}，而此力矩 M_{ab} 又必使 an 諸桿之 a 端各受有力矩 M_{an} 以維持結點 a 之平衡。亦卽 a 端所受之力矩 M_{ab} 必分配於 an 諸桿之 a 端使受有分配力矩 M_{an}。以式 (1-4) 及 (1-5) 之值代入式 (1-2) 中，得

$$M_{ab}=\left[S_{ab}+\frac{(CS)_{ab}}{C_{ba\theta}}\right]\theta_a, \tag{1-6}$$

$$M_{an}=[S_{an}+(CS)_{an}C_{an\theta}]\theta_a. \tag{1-7}$$

故所有 an 桿 a 端所受力矩之總和 ΣM_{an} 爲

$$\Sigma M_{an}=\{\Sigma S_{an}+\Sigma[(CS)_{an}C_{an\theta}]\}\theta_a. \tag{1-8}$$

因結點 a 在 M_{ab} 及 ΣM_{an} 之作用下必維持平衡，故

$$M_{ab}+\Sigma M_{an}=\left\{\Sigma S_a+\Sigma[(CS)_{an}C_{an\theta}]+\frac{(CS)_{ab}}{C_{ba\theta}}\right\}\theta_a=0, \tag{1-9}$$

其中 $\Sigma S_a=S_{ab}+\Sigma S_{an}$，卽結點 a 所有各桿端勁度之總和。由是得計算由任一 ab 桿 b 至 a 端之角變傳播係數之一個公式如下：

$$\boxed{C_{ba\theta}=-\frac{(CS)_{ab}}{\Sigma S_a+\Sigma[(CS)_{an}C_{an\theta}]}}. \tag{1-10}$$

式 (1-10) 之應用嗣後再說明。

(3) **不均衡力矩之傳播** 先將剛構所有之桿端均行固定，計算各桿端在荷載作用下之定端力矩 M_F。每一結點所有各桿端定端力矩之總和 ΣM_F 卽係該結點之不均衡力矩 M_U，故

1) $C_{bc\theta}$ 卽鄒氏法中之 R_{ab} 與孟氏法中之 f_{ba}。

$$M_U=\sum M_F. \tag{1-11}$$

M_U 顯然係每一結點作用於其所有各桿端之不均衡力矩，其指向與各桿端作用於該結點之不均衡力矩正相反，故如圖 1-3(a)[1] 所示，M_U 以 ⊞ 符號表示之。試考慮任一結點 a 之不均衡力矩 M_{Ua} 如何傳播於其任一相鄰之結點 b。如圖 1-3(a) 所示，

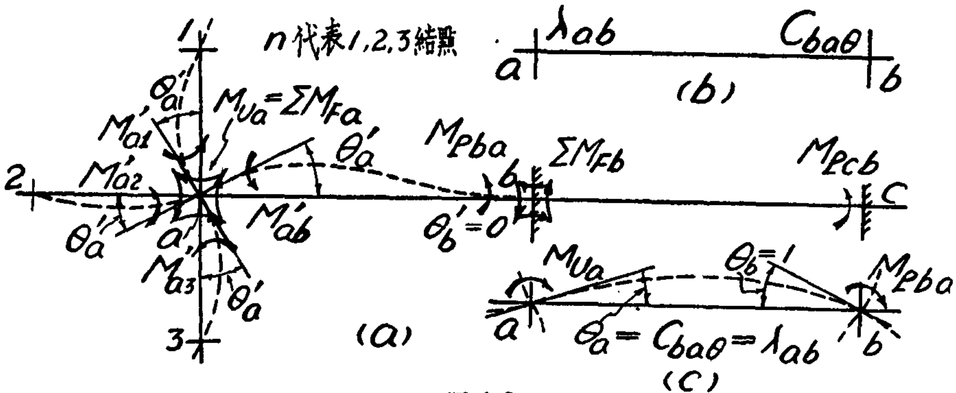

圖 1-3

除令結點 b 仍固定外，將其餘結點概行鬆弛，如是則結點 a 之 M_{Ua} 即分配於 ab 及 an 諸桿之 a 端，分別得 M'_{ab} 及 $\sum M'_{an}$。同時 ab 桿 b 端之角變 θ_b 爲零，an 諸桿 n 端之角變 θ'_n 與結點 a 角變 θ'_a 之關係當然仍與式 (1-5) 所表示者相同。以 $\theta_b=0$ 及 $\theta_a=\theta'_a$ 之值代入式 (1-2) 及 (1-8) 中，得

$$M'_{ab}=S_{ab}\theta'_a, \tag{1-12}$$

$$\sum M'_{an}=\{\sum S_{an}+\sum[(CS)_{an}C_{an\theta}]\}\theta'_a. \tag{1-13}$$

因 M'_{ab} 及 $\sum M'_{an}$ 係 M_{Ua} 之分配力矩，故

$$M_{Ua}+M'_{ab}+\sum M'_{an}=0. \tag{1-14}$$

以式 (1-12) 及 (1-13) 之值代入式 (1-14) 中，解之即得 θ'_a 之值爲

$$\theta'_a=-\frac{M_{Ua}}{\sum S_a+\sum[(CS)_{an}C_{an\theta}]}. \tag{1-15}$$

將 ab 桿 a 端之分配力矩 M'_{ab} 傳遞於其固定之 b 端，即係 b 端所得之"傳播不均衡力矩"(以下簡稱"傳播力矩") M_{Pba}，亦即結點 b 所得之"傳播不均衡力矩"，故

$$M_{Pba}=C_{ab}M'_{ab}. \tag{1-16}$$

以式 (1-15) θ'_a 之值代入式 (1-12) 中，再代入式 (1-16) 中，得

1) 讀者如感覺由圖 1-3(a) 證明式 (1-19) 稍爲迂迴而不易了解時，可以圖 1-3(c) 用柵勒伯勒斯勞定理之證明代替之。

$$M_{Pba}=-\frac{(CS)_{ab}}{\Sigma S_a+\Sigma[(CS)_{an}C_{an\theta}]}M_{Ua},\tag{1-17}$$

採用式 (1-10) 中 $C_{ba\theta}$ 之值，得

$$M_{Pba}=C_{ba\theta}M_{Ua}.\tag{1-18}$$

爲便利此法之應用起見，茲採用 λ_{ab} 爲任一 ab 桿由 a 至 b 端之"不均衡力矩傳播係數"(以下簡稱爲"傳播係數")，其值卽等於由 b 至 a 端之角變傳播係數 $C_{ba\theta}$。故式 (1-18) 可寫成

$$\boxed{M_{Pba}=\lambda_{ab}M_{Ua}.}\tag{1-19}$$

將式 (1-10) 中之 $C_{ba\theta}$ 及 $C_{an\theta}$ 分別改爲 λ_{ab} 及 λ_{na} (卽 an 各桿由 n 至 a 端之傳播係數)，卽得計算任一 ab 桿由 a 至 b 端傳播係數之一個公式如下：

$$\boxed{\lambda_{ab}=-\frac{(CS)_{ab}}{\Sigma S_a+\Sigma[(CS)_{an}\lambda_{na}]}.}\tag{1-20}$$

如圖 1-3(b) 所示，於角變傳播法中，$C_{ba\theta}$ 之值記於 ab 桿之 b 端；於此法中，λ_{ab} 之值則記於 ab 桿之 a 端，以免混淆。由式 (1-20) 可知：任一 ab 桿 a 端之傳播係數 λ_{ab} 須由與 a 端相剛接之所有 an 桿另一端 n 傳播係數 λ_{na} 計算之。

若任一 ab 桿之 a 端只有 $a1$ 一桿相剛接 (如連續梁)，則 $\Sigma S_a=S_{ab}+S_{a1}$ 及 $\Sigma(CS)_{an}\lambda_{na}=(CS)_{a1}\lambda_{1a}$，式 (1-20) 簡化爲

$$\boxed{\lambda_{ab}=-\frac{C_{ab}}{1+\frac{S_{a1}}{S_{ab}}(1+C_{a1}\lambda_{1a})}.}\tag{1-21}$$

故於連續梁或二桿相剛接之結點甚多之剛構中，除於多於二桿剛接之結點須用式 (1-20) 外，其餘均以採用式 (1-21) 較爲簡便。

由式 (1-20) 或 (1-21) 可知傳播係數 λ_{ab} 之正負號係與力矩傳遞係數 C_{ab} 者相反。除 C_{ab} 爲負號(例如曲桿)之時外，λ_{ab} 常係負號。

每一結點之不均衡力矩，須傳播於其四周之某些桿端與所有結點，此與克勞斯 (Hardy Cross)[11] 之力矩分配法相同。但固定於支點之桿端旣不轉動，故只承受傳播力矩，其原有或所得之傳播力矩，卽不再傳播亦不分配；所有鉸接或簡支於支點之桿端，均無須假設爲固定，故不承受任何傳播力矩。

任一 ab 桿 b 端所得之傳播力矩 M_{Pba} (卽係結點 b 因傳播所得之不均衡力矩 M_{Ub}) 亦須傳播於其四周之桿端與結點，以圖 1-3(a) 中與結點 b 相鄰之任一結點 c

爲例，令結點 c 爲固定，其餘所有結點均鬆弛，以相同之計算卽可將 M_{Pba} 傳播於 bc 桿之 c 端與結點 c 得 M_{Pcb}。若結點 b 另有不均衡力矩 ΣM_{Fb}，須與 M_{Pba} 相疊加而後再傳播，此卽柯氏所採用之"集體傳播"法，故

$$M_{Pcb}=\lambda_{bc}(M_{Pba}+\sum M_{Fb}).\tag{1-22}$$

以上扼要說明不均衡力矩之傳播步驟，其詳細計算方法當於下列第三節再行說明。

不均衡力矩之傳播公式 (1-19) 或 (1-18) 亦可用其他理論如"虛功原理"，馬克斯韋之"互等變位"定理或彌勒伯勒斯勞 (H. Müller-Breslau)[12] 之"變位線卽影響線"理論證明之。玆以後者爲例，求得式 (1-19) 如下：如圖 1-3(c) 所示，令結點 b 有一角變 $\theta_b=1$，得 ab 桿之變位曲線 ab，其結點 a 之角變 $\theta_a=-C_{ba\theta}$。此變位曲線卽結點 b 不均衡力矩 M_{Pba} 之影響線，可用力或力矩荷載。故當結點 a 有一不均衡力矩 M_{Ua} 時，則結點 b 之不均衡力矩 M_{Pba} 卽等於 M_{Ua} 乘以結點 a 之角變 $\theta_a=C_{ba\theta}=\lambda_{ab}$，故

$$M_{Pba}=\lambda_{ab}M_{Ua},$$

卽得上列式 (1-19) 之另一簡單之證明方法。

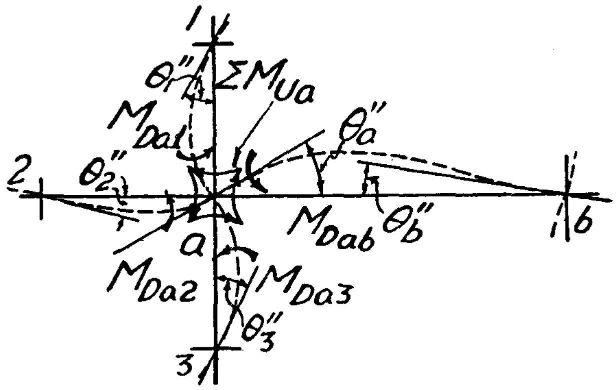

圖 1-4

(4) 不均衡力矩之分配　如圖 1-4 所示，設結點 a 固定時有一不均衡力矩 M_{Ua}，將結點 a 鬆弛，各桿端均有角變 θ''，結點 a 之各桿端亦各有分配力矩 M_D，令 $\Sigma M_{Dan}=M_{Da1}+M_{Da2}+M_{Da3}$，其值可用式 (1-8) 或 (1-13) 並將其中之 $C_{an\theta}$ 改爲 λ_{na} 計算之，故

$$\Sigma M_{Dan}=\{\Sigma S_{an}+\Sigma[(CS)_{an}\lambda_{na}]\}\theta_a''.\tag{1-23}$$

當結點 a 有角變 θ_a'' 時，其相鄰之結點 b 角變 θ_b'' 之值爲

$$\theta_b''=C_{ab\theta}\theta_a''=\lambda_{ba}\theta_a'',\tag{1-24}$$

其中 λ_{ba} 爲 ab 桿由 b 至 a 端之傳播係數。以式 (1-24) 中 θ_b'' 之值代入式 (1-2) 中，得 ab 桿 a 端之分配力矩 M_{Dab} 之值爲

$$M_{Dab}=[S_{ab}+(CS)_{ab}\lambda_{ba}]\theta_a''.\tag{1-25}$$

因

$$\Sigma M_{Ua}+\Sigma M_{Dan}+M_{Dab}=0,$$

故

$$\Sigma M_{Ua}=-\{\Sigma S_a+\Sigma[(CS)_{an}\lambda_{na}]+(CS)_{ab}\lambda_{ba}\}\theta_a''. \tag{1-26}$$

令 μ_{ab} 為 ab 桿 a 端之分配比，則

$$\mu_{ab}=\frac{M_{Dab}}{\Sigma M_{Ua}}. \tag{1-27}$$

以式 (1-25) 及 (1-26) 之值代入式 (1-27) 中並化簡即得

$$\boxed{\mu_{ab}=-\frac{\dfrac{1}{C_{ab}}+\lambda_{ba}}{\dfrac{1}{-\lambda_{ab}}+\lambda_{ba}}.} \tag{1-28}$$

故任一 ab 桿 a 端之分配比 μ_{ab} 值可由其 a 與 b 兩端之傳播係數計算之。因此，分配比為此法中之輔助剛構常數。注意分配比之值必係負號。

由式 (1-25) 至 (1-27) 又可得計算任一 ab 桿 a 端分配比 μ_{ab} 之另一公式如下：

$$\boxed{\mu_{ab}=-\frac{S_{ab}+(CS)_{ab}\lambda_{ba}}{\Sigma S_a+\Sigma[(CS)_{an}\lambda_{na}]+(CS)_{ab}\lambda_{ba}}.} \tag{1-28a}$$

上式雖較式 (1-28) 稍冗長，但其中 $\Sigma S_a+\Sigma[(CS)_{an}\lambda_{na}]$ 及 $(CS)_{ab}\lambda_{ba}$ 之值，在計算傳播係數 λ_{ab} 時均已求得，無須另算，故上式之應用或反較式 (1-28) 為方便。

於等截面剛構，傳遞係數 $C_{ab}=C_{ba}=0.5$，勁度 $S=4EK=4EI/L$，式 (1-20)，(1-21)，(1-28) 及 (1-28a) 分別簡化為

$$\lambda_{ab}=-\frac{K_{ab}}{2\Sigma K_a+\Sigma(K_{an}\lambda_{na})}; \tag{1-29}$$

$$\lambda_{ab}=-\frac{1}{2+\dfrac{K_{a1}}{K_{ab}}(2+\lambda_{1a})}; \tag{1-30}$$

$$\mu_{ab}=-\frac{2+\lambda_{ba}}{\dfrac{1}{-\lambda_{ab}}+\lambda_{ba}}; \tag{1-31}$$

$$\mu_{ab}=-\frac{2K_{ab}+K_{ab}\lambda_{ba}}{2\Sigma K_a+\Sigma(K_{an}\lambda_{na})+K_{ab}\lambda_{ba}}. \tag{1-31a}$$

3. 應用步驟及算例

(1) **剛構常數之計算** 先採用式 (1-20) 計算各桿端之傳播係數。由該式可知任一 ab 桿左端 a 之傳播係數 λ_{ab} 必須由 an 各桿左端 n 之傳播係數 λ_{na} 計算之。故各桿左端 a 之 λ_{ab} 計算，必須自與剛構左方支點接合之桿端起始，向右依次進行，始可逐一求得。若剛構左方支點 a 係固定，則式 (1-20) 中 $\sum(CS)_{an}=\infty$，故 $\lambda_{ab}=0$，由此可知：凡 n 端爲固定之桿，式 (1-20) 中之 λ_{na} 值皆爲零，故該桿之存在與否，只與該式中之 $\sum S_a$ 值有影響。若剛構左方支點係鉸接或簡支，則式(1-20) 中 $\sum(CS)_{an}=0$ 及 $\sum S_a=S_{ab}$，故 $\lambda_{ab}=C_{ab}$。設圖 1-2 中之 1 端係鉸接，2與3端係固定，則 $\lambda_{1a}=C_{1a}$，$\lambda_{2a}=\lambda_{3a}=0$，代入式 (1-20) 中得 ab 桿 a 端傳播係數 λ_{ab} 之值爲

$$\lambda_{ab}=-\frac{(CS)_{ab}}{S_{ab}+S_{a2}+S_{a3}+S_{a1}(1-C_{a1}C_{1a})}.$$

令 $S'_{a1}=S_{a1}(1-C_{a1}C_{1a})$，卽 1 端爲鉸接時 $a1$ 桿 a 端之勁度，及 $\sum S_a=S_{ab}+S'_{a1}+S_{a2}+S_{a3}$，則上式可寫成 $\lambda_{ab}=(CS)_{ab}/\sum S_a$。因此，如採用 S'_{a1} 爲 1 端鉸接時 a 端之勁度，則該桿之存在與否，亦祇與式 (1-20) 中之 $\sum S_a$ 值有影響，其分母中後一項包含 λ_{na} 之值仍爲零。故剛構中任一桿端受彈性約束時，其 λ_{ab} 之值必在 0 與 C_{ab} 之間，否則計算必係訛誤。於此，λ_{ab} 值之計算，得一極便利之相對校核。若所欲求 λ_{ab} 之桿端與若干其他桿端 an 相剛接，所有其他各桿另一端之 λ_{na} 值必須先行求得。同此，各桿右端 b 之 λ_{ba} 計算，必須自與剛構右方支點接合之桿端起始，向左依次計算。由是可知：各桿左右兩端傳播係數之計算，係兩個進行方向不同而且不相牽涉之步驟。於對稱式之剛構，此兩個計算步驟當然相同而變成一個。既知各桿端之傳播係數後，各桿端之分配比卽可用式 (1-28) 或式 (1-28a) 計算之。注意每一結點所有各桿端分配比之總和必爲 -1，可資校核之用。

於較簡單之閉合式剛構，無單一桿端與支點接合，其各桿端傳播係數之計算可採用第五節所述之連分式方法。於龐大複雜之閉合式剛構，採用第六節之近似公式將若干桿端之傳播係數之近似值先行算出，而後用上法計算之。

爲便於參考及應用起見，玆將上得計算剛構常數之各項公式列成表 1-1。

(2) **桿端力矩之計算** (a) 計算各桿端之定端力矩 M_F，由是得各結點之不均衡力矩 $M_U=\sum M_F$。(b) 自剛構最左之結點(固定支點除外)起始，將該結點之 M_U 向右傳播，得其右鄰桿右端之傳播力矩 M_P，與右鄰結點之 $\sum M_F$ 相疊加，再向右傳播。