应用数量经济学

贺菊煌　著

应用数量经济学

贺菊煌　著

经济科学出版社

一九八九年·北京

责任编辑：祁之杰
责任校对：李　鹏
封面设计：卜建晨
版式设计：代小卫

应用数量经济学

贺菊煌　著

*
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
中国铁道出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米　32开　6.75印张　146000字
1989年12月第一版　1989年12月第一次印刷
印数：0001—2200册
ISBN7-5058-0273-9/F·238　定价：2.60元

目　录

绪　论

数量经济学（Quantitative Economics）一词在国外很少有人使用。笔者只从荷兰经济学家亨利·台尔等人所著的《运筹学与数量经济学基础》（张玉纲、杨小凯译，湖南科学技术出版社1981年版。）一书中见过这个词。从该书的内容看，数量经济学包括投入产出分析、宏观经济计量模型、经济预测、消费者经济、经济计量方法等内容。在我国，数量经济学一词被广泛使用，但它包括哪些内容，学者们意见不尽一致。学者们提及的内容大致可分为两方面：一是运用数学方法研究经济问题，如数理经济学，投入产出分析；二是主要用于经济问题分析的数学方法，如经济计量方法。许多人认为这两方面内容都属于数量经济学。我们认为，前一方面的内容属于数量经济学，后一方面的内容则不属于数量经济学。因为经济科学的研究对象是社会生产、交换、分配、消费等经济活动，数量经济学作为经济科学中的一门学科也不能例外，要以这些经济活动为研究对象，只不过它强调使用数学方法而已。所以，我们将数量经济学定义为：运用数学方法研究社会生产、交换、分配、消费等经济活动的学科。

数量经济学既可以是纯理论的，也可以是应用性的。若为前者，则称为数理经济学；若为后者，则称为应用数量经济学。二者的区别主要在于：前者着重于纯理论分析，后者则要考虑把纯理论分析与经验资料结合起来，使之能用于定

量分析。应用数量经济学的具体内容主要是关于各种经济活动的可计量的数学模型的设定。这种模型一方面以数理经济学为依据，另一方面又能用实际统计资料作经验的测定。例如，关于仅含初始投入的生产函数，数理经济学通常只用如下的抽象的函数式表示：

$$Q=f(K,\ L)$$

式中Q表示产出，K表示资本投入，L表示劳动投入。并且只指出其一般性质，如

$$f(K,\ 0)=0,\ f(0,\ L)=0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K}>0,\quad \frac{\partial Q}{\partial L}>0,$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}<0,\quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}<0。$$

应用数量经济学中的生产函数不限于此。它要求给出具体的函数形式，并且要求其参数可用现有的经济计量方法估计。学者们提出了若干种这样的生产函数。其中最著名的是*Cobb-Douglas*生产函数：

$$Q=AK^{\alpha}L^{(1-\alpha)}\qquad A>0,\ 0<\alpha<1$$

式中A，α为待估参数。它既具有上述关于生产函数的一般性质，又便于用现有经济计量方法估计其参数。

本书讨论八种最重要的也是最基本的经济数学模型。它们是：生产函数，需求函数，消费函数，货币需求函数，一般均衡模型，投入产出模型，宏观经济模型和经济增长模型。其中，需求函数、一般均衡模型、投入产出模型主要用于研究资源配置和相对价格的决定；消费函数、货币需求函数、宏观经济模型主要用于研究资源利用水平和物价水平；生产函数在以上两方面研究中都要用到，经济增长模型则用

于经济发展趋势的研究。

本书初稿请余根钱同志看过，他提出了一些修改意见，谨致谢意。

第一章　生产函数

生产函数是经济学中同效用函数并列的基础函数。自1928年*Cobb-Douglas*生产函数问世以来，经济学家对生产函数的研究不断深入，在理论和应用上都取得了重要成果。本章概要介绍这些成果。

第一节　生产函数的定义

生产函数反映生产中投入与产出之间的数量关系。它说明生产要素的任何一种组合最多能够生产多少产品。这种关系含意：（1）各种投入中至少有一种被充分利用；（2）无效率的工艺不被采用。关于第（2）点，解释如下。

设生产某种产品有三种工艺。第一种工艺生产一单位产品需要投入1单位劳动、8单位资本；第二种工艺生产一单位产品需要投入4单位劳动、6单位资本；第三种工艺生产一单位产品需要投入7单位劳动、2单位资本。情形如图1.1所示。图1.1中A、B、C三点分别代表这三种工艺生产单位产品所需要的劳动投入量和资本投入量。若生产中投入的劳动、资本之比为1∶8，显然应采用第一种工艺；若生产中投入的劳动、资本之比为7∶2，显然应采用第三种工艺。若生产中投入的劳动、资本之比介于以上二数之间，应当采用哪种工艺，特别当生产中投入的劳动、资本之比为4∶6时，是

否应当采用第二种工艺，就不显然了。从图1.1我们可直接

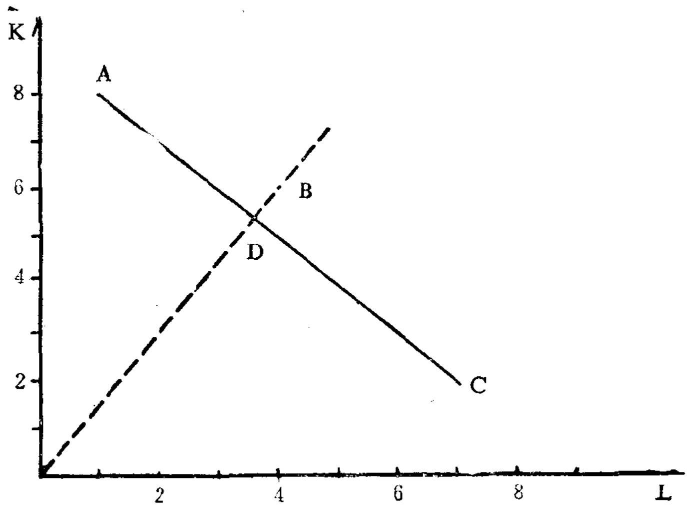

图 1.1

看出：当生产中投入的劳动、资本之比为4：6时，采用第二种工艺并不适当，而同时采用第一、第三两种工艺，使单位产品的平均劳动投入量和平均资本投入量等于图中D点之坐标，则比较适当。因为对于同样的产出，后者的投入较少。经简单计算，当生产中投入的劳动、资本之比为4：6时，让$\frac{17}{30}$的产品生产采用第一种工艺，$\frac{13}{30}$的产品生产采用第二种工艺，其单位产品的平均劳动投入量$\overline{l}$和平均资本投入量$\overline{k}$分别为

$$\overline{l} = 1 \times \frac{17}{30} + 7 \times \frac{13}{30} = 3.6$$

$$\overline{k} = 8 \times \frac{17}{30} + 2 \times \frac{13}{30} = 5.4$$

此即D点的坐标值，它比第二种工艺单位产品所需的投入（4，6）要少。所以，第二种工艺是无效工艺。无论劳动和资本的投入比例如何，该工艺都不应被采用。生产中宜采用的工艺是第一、第三两种工艺，称为有效工艺。

生产函数的一般形式是

$$F(Y_1, \cdots, Y_n, X_1, \cdots, X_m; K_1, \cdots, K_r, L_1, \cdots, L_s) = 0 \qquad (1.1.1)$$

式中Y_i表示第i种产品的产量，X_j表示第j种商品的投入量，K_k表示第k种资本的投入量，L_l表示第l种劳动的投入量。注意，这里的资本投入量不仅指资本品的消耗（折旧），而且指资本品的占用（或租用）。

生产函数（1.1.1）表示的是多种产品联合生产时的投入产出关系。如果我们仅考虑一种产品的生产，并且将各种生产要素的投入量用统一的符号表示，则生产函数可写为

$$Y = f(X_1, \cdots, X_n) \qquad (1.1.2)$$

式中Y表示某一产品的产量，X_1，…，X_n表示各种生产要素的投入量，包括中间投入（原材料、能源等投入）和初始投入（资本品和劳动投入）。

严格意义的生产函数只包括实物变量，不包括价值变量。但在实际应用中，常常引入不变价格，将众多的同类变量合并成一个变量，以便应用。例如按不变价格将众多的资本品合并成为单一的资本量；按固定工资率（或其他指标）将各种劳动合并成为单一的劳动量。

另一方面，由于中间投入与产出之间通常有比较固定的比例关系，实际应用的生产函数往往将中间投入暂时撇开，而集中研究初始投入与产出的关系。

综合以上两点，可将生产函数写为

$$Y=f(K,\ L) \tag{1.1.3}$$

式中Y表示产品的产量，K表示资本投入量，L表示劳动投入量。

此外，对于生产多种产品的某一生产部门或整个国民经济，也可建立单一的生产函数。这时，各种产品按不变价格合并成为单一的产出量，而且为了避免产品结构变动的影响，通常以净产值作为产出变量。其生产函数式为

$$y=f(K,\ L) \tag{1.1.4}$$

式中y表示不变价净产值，其他符号意义同前。

第二节　生产函数的若干特性

生产函数的特性，主要通过规模报酬、边际替代率、边际生产力、替代弹性这些概念来描述。本节集中讨论这四个概念。

（一）规模报酬。

指所有生产要素都按同一比例变动时，产出是否也按同一比例变动的问题。当所有生产要素投入量都变为原先的$\delta(>0)$倍，若产出量也变为原先的δ倍，则称为规模报酬不变；若产出量大于原先的δ倍，则称为规模报酬递增；若产出量小于原先的δ倍，则称为规模报酬递减。

规模报酬递增常常与某些工艺的不可分割性有关。所谓工艺的不可分割性，是指这些工艺使用的某些设备要求产出量达到某一水平才能充分发挥作用，如果产出量低于这一水平，则使用这些设备就不划算。当存在若干种不可分割的工艺而且起码产出水平较大的工艺具有较高的效率时，生产规

模的扩大就会发生规模报酬递增现象。

规模报酬递减常常与自然条件有关。例如，捕鱼船队加倍通常难以使鱼获量加倍，因为海洋中自然生长的鱼没有随之增加，我们也不能把自然生长的鱼作为生产要素纳入捕鱼业的生产函数之中。

规模报酬不变被认为是最普遍的情况而在经济分析中广泛应用。具有规模报酬不变的生产函数在数学上称为一次齐次函数。所谓齐次函数，是指当自变量都变为原来的$\delta(>0)$倍时，因变量变为原来值乘以δ的某一固定次方。例如对于函数$f(x_1, x_2)$，若

$$f(\delta x_1, \delta x_2)=\delta^r f(x_1, x_2) \qquad (1.2.1)$$

则说该函数为 r 次齐次函数。当 $r=1$，即

$$f(\delta x_1, \delta x_2)=\delta f(x_1, x_2) \qquad (1.2.2)$$

则该函数就是一次齐次函数。

关于齐次函数有如下的欧拉定理：

若（1.2.1）成立，则

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}=rf(x_1, x_2) \qquad (1.2.3)$$

特别地，若 $r=1$，即（1.2.2）成立，则

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}=f(x_1, x_2) \qquad (1.2.4)$$

下面，我们来证明（1.2.4）。令

$$\delta=\frac{1}{x_2}$$

将其代入（1.2.2），得

$$\frac{1}{x_2}f(x_1, x_2)=f\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right)=g(R, 1)$$

式中$R=x_1/x_2$。于是

$$f(x_1,\ x_2)=x_2g(R)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}[x_2g(R)]=x_2\frac{\partial g(R)}{\partial x_1}$$

$$=x\frac{dg(R)}{dx_2}\ \frac{\partial R}{\partial x_1}=x_2g'(R)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$=x_2g'(R)\frac{1}{x_2}=g'(R)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}[x_2g(R)]=g(R)+x_2\frac{\partial g(R)}{\partial x_2}$$

$$=g(R)+x_2g'(R)\frac{\partial k}{\partial x_2}$$

$$=g(R)+x_2g'(R)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$=g(R)+x_2g'(R)\left(-\frac{x_1}{x_2^2}\right)$$

$$=g(R)-Rg'(R)$$

于是

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1g'(R)+x_2[g(R)-kg'(R)]$$

$$=x_1g'(R)+x_2g(R)-x_1g'(R)$$

$$=x_2g(R)$$

$$=f(x_1,\ x_2)$$ （证毕）

（二）边际替代率。

在生产中，各生产要素之间具有某种程度的替代性。例如生产一定量产品，可以多用劳动少用资本，也可以少用劳动多用资本，即劳动与资本之间具有替代性。生产理论中用以表示替代性的一个初级概念是边际替代率。其含义是：在产出量不变的条件下，某一生产要素增加一单位可减少另一生

产要素多少单位。对于生产函数$Y=f(K, L)$，我们既可计算劳动对资本的边际替代率，也可计算资本对劳动的边际替代率。这二者互为倒数关系，只计算其中一个就够了。本书只计算资本对劳动的边际替代率，即在Y保持不变（譬如说保持Y_0）的条件下，增加一单位K，可减少多少单位L。在这里，变量之间的关系是

$$f(K, L)-Y_0=0$$

将L看成K的函数，可得

$$\frac{dL}{dK}=-\frac{\partial f/\partial K}{\partial f/\partial L} \qquad (1.2.5)$$

这就是边际替代率的表达式。

边际替代率的性质可借助于等产量线直观地说明。设生产某种产品有五种工艺，每种工艺生产一单位产品所需要的资本和劳动投入量由图1.2中的点A、B、C、D、E代表。由第一节的论述可知，图1.2中A、B、D、E所代表的工艺是有效工艺，C代表的工艺是无效工艺。连接A、B、D、E的折线及其两端平行于坐标轴的延长线，是代表生产一单位产品投入的资本量和劳动量的点的轨迹。同理，生产两单位产品投入的资本量和劳动量的点的轨迹是折线$A'B'D'E'$及其两端平行于坐标轴的延长线。该线上某一点到原点的距离两倍于过该点的射线与$ABDE$线之交点到原点的距离。例如OA'两倍于OA。这些折线称为等产量线。对于任意给定的产出量，可以在K-L平面上画出一条相应的等产量线。如果生产某种产品有无数种工艺，那末可以想象，其等产量线将变成克滑的曲线。在这种情况下，将有：（1）等产量线上任一点的切线斜率为负；（2）等产量线凸向原点。即使没有无限种工艺，情况也大体如此。

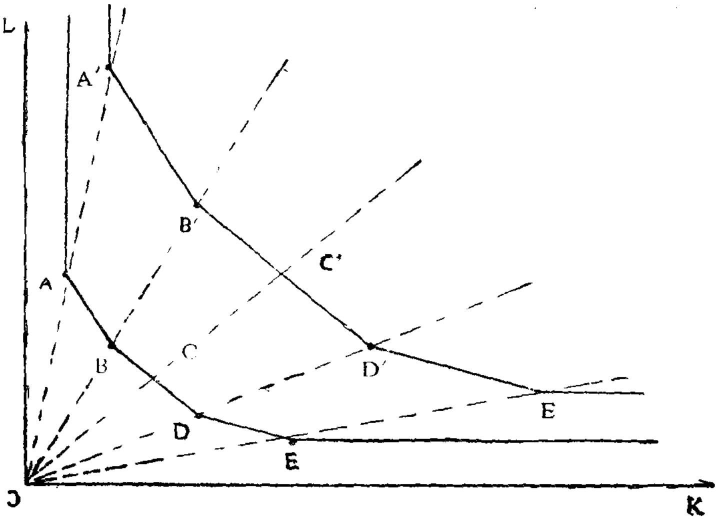

图 1.2

等产量线的斜率，就是我们所考察的边际替代率。等产量线具有负斜率表示边际替代率为负值。这从经济上很好理解：在产出量不变的条件下，增加一种生产要素的投入量通常可减少（至少不增加）另一种生产要素的投入量，否则后一种工艺就不会被采用。

等产量线凸向原点，表示边际替代率具有递减性，即随着某一生产要素的不断增加，需要越来越多的该种生产要素才能替代一定量的另一种生产要素。就资本对劳动的替代来说，边际替代率递减的数学表达式是

$$\frac{d^2L}{dK^2}>0 \tag{1.2.6}$$

（三）边际生产力。

指在其他生产要素投入量不变的条件下，某一种生产要素投入量增加一单位所带来的产品增加量。用数式表示，就是生产函数对某一生产要素的一阶偏导数。边际生产力通常大于或等于零。就生产函数$Y=f(K, L)$来说，

$$\begin{aligned} &\text{劳动的边际生产力}=\frac{\partial Y}{\partial L}\geqslant 0 \\ &\text{资本的边际生产力}=\frac{\partial Y}{\partial K}\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

边际生产力通常随投入量的不断增加而递减。或者说，在其他生产要素投入量不变的条件下，连续增加某一种生产要素的投入量，其单位投入增量所带来的产出增量越来越少。这种情况称为边际生产力递减规律。用数式表示为

$$\frac{\partial_2 Y}{\partial L^2}<0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}<0 \tag{1.2.8}$$

边际生产力递减与规模报酬递减是两回事，不可混淆。但是，这二者又有联系。当生产函数具有规模报酬不变或递减之性质时，边际生产力必然递减。关于这一点证明如下。

上一点我们已经说明等产量线具有负斜率且凸向原点，即

$$\frac{dL}{dK}<0$$

$$\frac{d^2 L}{dK^2}>0$$

并且根据（1.2.5）有

$$\frac{dL}{dK}=-\frac{\partial Y/\partial K}{\partial Y/\partial L}$$

将此式代入上一式，得