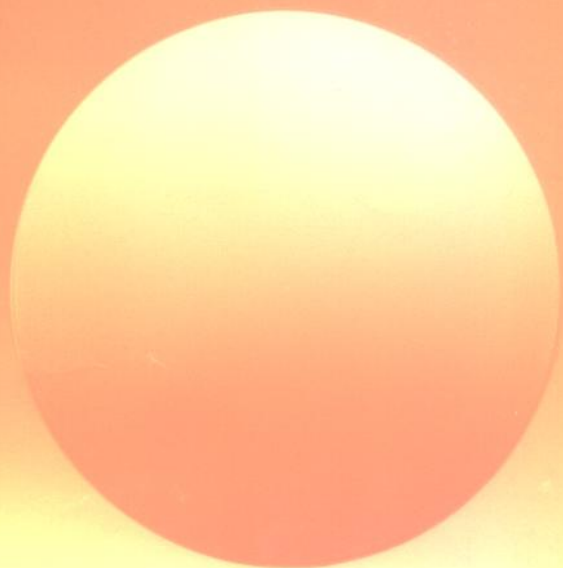


本书荣获第一届国家图书奖提名奖 TIME SERIES ANALYSIS

● 研 究 生 用 书 ● IN ENGINEERING
APPLICATION

华中理工大学出版社



杨叔子 吴 雅 等著

时间序列分析的工程应用

下 册

TB114
Y25
2

442454

时间序列分析的 工程应用

下 册

杨叔子 吴 雅
王治藩 丁 洪 熊有伦
黄逸云 吴今培 马孝江
欧阳普仁 著

华中理工大学出版社



00442454



(鄂)新登字第10号

· 研究生用书 ·

时间序列分析的工程应用

下 册

杨淑子 吴 雅 等著

责任编辑 刘宜藩 黎秋萍

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山 邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:15.75 插页:2 字数:382 000

1992年4月第1版 1996年5月第3次印刷

印数:4 001—5 000

ISBN 7-5609-0615-X/TH·51

定价:15.00 元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书分为上、下两册,共四部分:第一部分是时序分析工程应用的基础理论,包括时序分析与系统辨识、系统分析间的关系,ARMA模型的工程意义,ARMA模型的时域和频域特性,离散模型与连续模型的转移;第二部分是时序分析工程应用的基本技术,主要包括AR模型、ARMA模型的建模方法;第三部分是时序分析工程应用的各个专题,包括最佳预测与控制,模态参数估计,模式识别与故障诊断,表面形貌分析;第四部分是时序分析工程应用的进一步扩展内容,包括多元时序的ARMAV模型,非平稳时序的各种模型,非线性时序模型中的门限自回归模型和双线性模型,时间序列的状态模型以及这些模型的工程应用。

本书与工程应用紧密联系,取材主要来自作者与国内其他学者们的研究工作。本书除可作为工程学科硕士生教材外,还可作为其他有关专业本科生、研究生、教师及工程技术人员与科学研究人员的参考书。

Abstract

This book divided in two volumes. It consists of four parts. The first part covers the fundamental theory of TSA (Time Series Analysis). It includes the relationship between TSA and system analysis, the engineering significance of ARMA model, the characteristics of ARMA model in time and frequency domains, the conversion between discrete and continuous models. The second part covers the basic technique of TSA in engineering application. It includes modelling approach of AR and ARMA models. The third part covers some special topics about TSA application engineering. It includes optimized forecasting and control, estimation of model parameters, pattern recognition and fault diagnosis, surface topography evaluation. The fourth part covers some in-depth subjects of TSA. It includes ARMAV model of multivariable time series, models of non-stationary time series, threshold auto-regressive model and bilinear model of nonlinear time series, state model of time series as well as their applications to engineering practice.

“研究生用书”总序

研究生教材建设是提高研究生教学质量的重要环节,是具有战略性的基本建设。各门课程必须有高质量的教材,才能使学生通过学习掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识,为从事科学研究工作或独立担负专门技术工作打下良好的基础。

我校各专业自1978年招收研究生以来,组织了一批学术水平较高,教学经验丰富的教师,先后编写了公共课、学位课所需的多种教材和教学用书。有的教材和教学用书已正式出版发行,更多则采用讲义的形式逐年印发。这些讲义经过任课教师多年教学实践,不断修改、补充、完善,已达到出书的要求。因此,我校决定出版“研究生用书”,以满足本校各专业研究生教学需要,并与校外单位交流,征求有关专家学者和读者的意见,以促进我校研究生教材建设工作,提高教学质量。

“研究生用书”以公共课和若干门学位课教材为主,还有教学参考书和学术专著,涉及的面较广,数量较多,准备在今后数年内分批出版。编写“研究生用书”总的要求是从研究生的教学需要出发,根据各门课程在教学过程中的地位和作用,在内容上求新、求深、求精,每本教材均应包括本门课程的基本内容,使学生能掌握必需的基础理论和专门知识;学位课教材还应接触该学科的发展前沿,反映国内外的最新研究成果,以适应目前科学技术知识更新很快的形势;学术专著则应充分反映作者的科研硕果和学术水平,阐述自己的学术见解。在结构和阐

述方法上，应条理清楚，论证严谨，文字简练，符合人们的认识规律。总之，要力求使“研究生用书”具备科学性、系统性和先进性。

我们的主观愿望虽然希望“研究生用书”的质量尽可能高一些，但由于研究生的培养工作为时尚短，水平和经验都不够，其中缺点、错误在所难免，尚望校内外专家学者及读者不吝指教，我们将非常感谢。

华中理工大学研究生院院长

陈 珽

1989. 11.

下册目录

第八章 ARMA 模型的最佳预测与最佳控制	(1)
§ 8.1 最佳预测原理	(1)
§ 8.2 最佳预测的计算	(5)
§ 8.3 最佳预测的校正	(13)
§ 8.4 指数加权平滑预测	(16)
§ 8.5 利用 ARMA 模型特性加权的最佳预测计算	(21)
§ 8.6 最佳预测的应用实例	(26)
§ 8.7 最佳控制	(31)
§ 8.8 最佳控制的应用实例	(39)
习题	(46)
第九章 模态参数估计	(48)
§ 9.1 模态参数估计的基本概念	(49)
§ 9.2 模态参数估计的 ARMA 模型法	(59)
§ 9.3 扩展的 Prony 法	(67)
§ 9.4 有关 Prony 谱的问题	(86)
习题	(91)
第十章 模式识别·故障诊断	(92)
§ 10.1 模式识别与故障诊断的基本概念	(93)
§ 10.2 用 AR 模型参数构造的距离判别函数	(98)
§ 10.3 特征量的提取	(128)
§ 10.4 根据模型特性构造的判别函数	(138)
§ 10.5 Bayes 判据	(151)
习题	(159)
第十一章 表面形貌识别	(160)
§ 11.1 表面形貌识别的基本概念	(161)
§ 11.2 用轮廓的谱矩表征表面	(169)
§ 11.3 表面形貌的计算机评价	(178)

§ 11.4	纹理轮廓的识别——建模与模拟	(182)
§ 11.5	非正态分布随机轮廓的建模与识别	(185)
§ 11.6	任意分布随机表面场的建模与模拟	(196)
习题		(209)
第十二章	多元时间序列与 ARMAV 模型	(212)
§ 12.1	多元时间序列与 ARMAV 模型	(213)
§ 12.2	ARV 模型参数的估计	(225)
§ 12.3	ARMAV 模型参数的估计	(230)
§ 12.4	ARV 模型的最佳预测	(238)
§ 12.5	模态参数估计的 ARMAV 模型法	(243)
§ 12.6	闭环系统辨识的 ARMAV 模型法	(250)
习题		(258)
第十三章	非平稳时间序列模型	(260)
§ 13.1	系统参数分析	(263)
§ 13.2	系统输入、输出信号的分析	(271)
§ 13.3	非平稳时序建模的趋势项直接剔除法	(277)
§ 13.4	非平稳时序建模的趋势项提取法	(293)
§ 13.5	非平稳时序模型的应用实例	(304)
习题		(312)
第十四章	门限自回归模型	(314)
§ 14.1	非线性现象与非线性时序模型	(315)
§ 14.2	门限自回归模型及其特性	(325)
§ 14.3	门限自回归模型的建模	(330)
§ 14.4	门限自回归模型的预测与应用	(346)
习题		(355)
第十五章	双线性时序模型	(356)
§ 15.1	双线性离散系统及其建模	(357)
§ 15.2	Volterra 函数级数模型	(363)
§ 15.3	双线性离散系统的 Volterra 核	(365)
§ 15.4	双线性连续系统的 Volterra 核	(369)
§ 15.5	双线性离散模型与连续模型的转换	(375)

§ 15.6 模型转换实例	(379)
习题	(386)
第十六章 时间序列的状态模型	(387)
§ 16.1 状态模型的建立	(387)
§ 16.2 状态模型的性质	(396)
§ 16.3 因果律	(398)
§ 16.4 典则差分模型	(403)
§ 16.5 动态系统的故障诊断	(404)
习题	(414)
续附录 1 数据	(415)
附 1.5 武汉市某区人口月死亡率数据	(415)
附 1.6 武汉市某区肿瘤月死亡率数据	(415)
附 1.7 钢筋混凝土 T 形梁的自由响应数据	(416)
附 1.8 振动位移 $\{x_{1t}\}$ 与动态切削力 $\{x_{2t}\}$ 采样电流数据	(423)
附 1.9 中国轻工业产量发展指数数据	(424)
附 1.10 中国重工业产量发展指数数据	(424)
附 1.11 武汉市月平均气温数据	(425)
附 1.12 武汉市日平均气温数据	(426)
附 1.13 钢丝绳断丝检测中磁场变化的采样电压数据	(427)
附 1.14 国际航空公司每月客票数据	(428)
附 1.15 加拿大山猫每年捕捉数数据	(428)
附 1.16 机床工作台爬行位移数据	(429)
续附录 2 IBM 系列机及其兼容机上的实用程序及其	
使用说明	(432)
附 2.5 模态参数估计的扩展 Prony 算法 Fortran 子程序	(432)
附 2.6 ARMAV 建模的向量模型标量化方法 Pascal 过程	(444)
附 2.7 提取幂函数与指数函数趋势项的 Pascal 过程	(450)
附 2.8 提取周期趋势项的 Pascal 过程	(455)
附 2.9 GM (1, 1) 提取指数趋势项的 Pascal 过程	(459)
附 2.10 GM (2, 1) 提取周期趋势项的 Pascal 过程	(461)
附 2.11 计算点值图的 Pascal 过程	(464)

附 2.12 SETAR 建模的 Pascal 过程	(466)
附 2.13 双线性建模的 Fortran 程序	(472)
主要参考文献	(481)

第八章 ARMA 模型的最佳预测 与最佳控制

ARMA 模型的最佳预测与最佳控制是时序方法在工程中的应用的一个很重要的方面。ARMA 模型最初起源于市场经济预测, 后来, 随着时序方法的发展及其应用领域的扩大, ARMA 模型被成功地用于工程系统的预测, 并与控制理论相结合, 用于工程系统的控制。本章首先讨论 ARMA 模型的最佳预测, 其中包括最佳预测原理、最佳预测计算的各种方法、最佳预测的校正等问题; 在此基础上, 进而讨论最佳控制问题, 其中包括控制系统、控制器设计及控制效果。本章还将列举最佳预测和最佳控制的应用实例。总之, 本章是一个概念性很强、而且应用性也很强的章节, 它是在对 ARMA 模型已经有了充分的了解、并已建立了 ARMA 模型的基础上讨论的, 其实质是讨论如何基于模型对系统进行最佳预测和施加最佳控制的问题。另外, 需要说明, 本章所述的预测, 仅限于采用 ARMA 模型对平稳时间序列所进行的预测, 至于其他时序模型的预测问题, 将另在相应的章节中讨论。

§ 8.1 最佳预测原理

8.1.1 最佳预测原理

第三章已经指出, 一个平稳时间序列 $\{x_t\}$ 总可以由一系列白噪声 $\{a_t\}$ 的线性组合来表示, 这种线性组合的权函数就是 ARMA 模型的 Green 函数 G_j , 即

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}, \quad (8.1.1)$$

由于此式中的 t 只是形式上的下标, 则此式又可改写为:

$$x_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t+l-j}, \quad (8.1.2)$$

再将此式展开, 即有:

$$\begin{aligned} x_{t+l} = & (G_0 a_{t+l} + G_1 a_{t+l-1} + \cdots + G_{l-1} a_{t+1}) \\ & + (G_l a_t + G_{l+1} a_{t-1} + \cdots). \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

如果在 t 时刻对未来第 l 步的取值 x_{t+l} 进行预测, 并记此预测值为 $\hat{x}_t(l)$, 则对式 (8.1.3) 右边第一个括号内的各项, 由于 $\{a_t\}$ 为白噪声, 则在 t 时刻不能依据已有的 $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \cdots, a_1$ 值去预测未来的 $a_{t+1}, a_{t+2}, \cdots, a_{t+l}$ 值, 此即, $\{a_t\}$ 的未来值是不可预测的. 因此, 式中第一个括号内的各项是无法预测计算的; 而对于式中第二个括号内的各项, 由于在 t 时刻, 所有 $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \cdots$ 都已确定, 是可以计算的, 因此这一部分就是 $\hat{x}_t(l)$. 于是, 上式可记为:

$$x_{t+l} = e_t(l) + \hat{x}_t(l), \quad (8.1.4)$$

其中, $e_t(l) = G_0 a_{t+l} + G_1 a_{t+l-1} + \cdots + G_{l-1} a_{t+1}$

$$= \sum_{j=0}^{l-1} G_j a_{t+l-j}; \quad (8.1.5)$$

$$\hat{x}_t(l) = G_l a_t + G_{l+1} a_{t-1} + \cdots = \sum_{j=l}^{\infty} G_j a_{t+l-j}. \quad (8.1.6)$$

式 (8.1.4) 中 $e_t(l)$ 为向前第 l 步的预测误差, $\hat{x}_t(l)$ 为向前第 l 步的预测值, 式 (8.1.5) 和式 (8.1.6) 含义明显而深刻, 是预测的基本原理与基本方法, 应予以十分重视, 并深刻理解. 同时由这两式可知, 向前第 l 步的预测值 $\hat{x}_t(l)$ 是现在与过去的所有干扰的线性组合, 而向前第 l 步的预测误差 $e_t(l)$ 是未来 l 步干扰的线性组合, 而且, $\hat{x}_t(l)$ 中已经包括了可能计算的所有项, 因此, 预测误差 $e_t(l)$ 达最小. 然而, $e_t(l)$ 是一个随机变量, 无法用它直接表示预测误差的大小, 而需用它的方差来表示. 由式

(8.1.5), 预测误差的方差为:

$$\text{Var}[e_t(l)] = \text{Var}\left[\sum_{j=0}^{l-1} G_j a_{t+l-j}\right] = \sum_{j=0}^{l-1} G_j^2 \text{Var}[a_{t+l-j}],$$

即

$$\text{Var}[e_t(l)] = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{l-1} G_j^2. \quad (8.1.7)$$

因此, 上式表明, 式 (8.1.6) 所示的预测是预测误差的方差为最小意义下的预测, 称为最佳预测. 不仅如此, 理论上还可以证明, 当时间序列 $\{x_t\}$ 的元素满足正态分布时, 式 (8.1.6) 所示的预测 (又称为线性预测) 是最优的.

如同节 2.2.2 中所讨论的意义一样, 读者可以证明, 在几何上, 式 (8.1.4)、式 (8.1.5)、式 (8.1.6) 表示最佳预测 $\hat{x}_t(l)$ 为向量 x_{t+l} 在无穷维空间中的正交投影, 如图 8.1.1 所示, 此时, $e_t(l)$ 为最小. 从回归理论的角度来分析, 此三式表示 x_{t+l} 完全回归于 $\hat{x}_t(l)$.

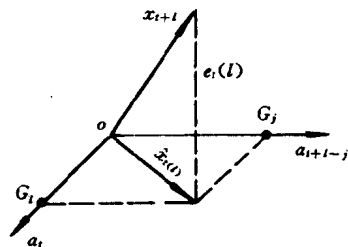


图 8.1.1 最佳预测的几何意义

8.1.2 最佳预测的分析

对式 (8.1.6) 所示的最佳预测, 可作如下分析.

1. 长期预测的特点

所谓长期预测, 是指向前预测的步数 l 较大时的预测, 由式 (8.1.6) 可知, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, 因 $\lim_{j \rightarrow \infty} G_j = 0$, 则有

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \hat{x}_t(l) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=l}^{\infty} G_j a_{t+l-j} \right] = 0,$$

即

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \hat{x}_t(l) = 0, \quad (8.1.8)$$

即最佳预测的长期预测等于零. 而由于时间序列 $\{x_t\}$ 是零均值的, 所以上式表明, 最佳预测的长期预测值就是时间序列的均值, 此为长期预测的特点之一. 当 $\{x_t\}$ 的均值非零时, 其均值的估值为 $\hat{\mu}_x$, 即

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \hat{x}_t(l) = \hat{\mu}_x. \quad (8.1.9)$$

再考察长期预测的方差. 由式 (8.1.7) 显见, 预测误差的方差随预测步数 l 的增大而增大, 当 $l \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \text{Var}[e_t(l)] = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} G_j^2,$$

而时间序列 $\{x_t\}$ 的方差为:

$$\begin{aligned} \text{Var}[x_t] &= \text{Var}\left[\sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j^2 \text{Var}[a_{t-j}] = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} G_j^2. \end{aligned}$$

比较上述两式, 则有

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \text{Var}[e_t(l)] = \text{Var}[x_t]. \quad (8.1.10)$$

此式表明, 长期预测误差的方差等于时间序列本身的方差, 此为长期预测的特点之二.

由上述分析可见, 式 (8.1.8)、式 (8.1.9)、式 (8.1.10) 表明了长期预测的两个特点. 而从物理意义上来分析, 这两个特点是很明显的, 因为随着预测步数的增大, 预测准确性必然下降, 当然也就只能根据时间序列的均值特性对系统的远期发展趋势作出推断, 并只能根据时间序列的方差特性对这一推断的误差作出统计意义上的估计.

2. 一步预测的特点

一步预测是指 $l=1$ 时的最佳预测. 由式 (8.1.3) 有

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= G_0 a_{t+1} + (G_1 a_t + G_2 a_{t-1} + \cdots) \\ &= a_{t+1} + \hat{x}_t(l), \end{aligned}$$

即

$$\hat{x}_t(1) = x_{t+1} - a_{t+1},$$

或

$$a_t = x_t - \hat{x}_{t-1}(1). \quad (8.1.11)$$

上式表示,模型的残差 a_t 是最佳预测的一步预测误差,这是一步预测的特点之一. 因此,一步预测误差的方差为:

$$\text{Var}[e_t(1)] = \text{Var}[a_t] = \sigma_a^2. \quad (8.1.12)$$

这表明,一步预测误差的方差等于模型残差的方差或系统输入白噪声的方差. 此即一步预测的另一个特点.

3. x_{t+l} 的真值范围

当 $\{x_t\}$ 呈正态分布,且取置信度水平为 0.05 时,真值 x_{t+l} 以 95% 的概率落入区间,

$$[\hat{x}_t(l) \pm 1.96 \sqrt{\text{Var}[e_t(l)]}],$$

即

$$\left[\hat{x}_t(l) - 1.96\sigma_a \sqrt{\sum_{j=0}^{l-1} G_j^2}, \hat{x}_t(l) + 1.96\sigma_a \sqrt{\sum_{j=0}^{l-1} G_j^2} \right]. \quad (8.1.13)$$

§ 8.2 最佳预测的计算

分析式 (8.1.6) 可知,直接利用该式进行最佳预测计算是十分困难的,因为,其中的每一 a_{t-j} 值均需按模型进行迭代计算,由此看来,寻求一种能直接由时间序列的观测值 $\{x_t\}$ 进行最佳预测计算的方法是十分必要的.

8.2.1 最佳预测计算的原理

1. 引例

首先考察最简单的 AR (1) 模型的最佳预测计算,然后再从

中导出一般的计算方法.

对 AR (1) 模型

$$a_t = x_t - \varphi_1 x_{t-1}, \quad (8.2.1)$$

由式 (8.1.6), 其向前第一步预测值

$$\hat{x}_t(1) = G_1 a_t + G_2 a_{t-1} + G_3 a_{t-2} + \dots$$

考虑到 AR (1) 模型的 $G_j = \varphi_1^j$, 并将上式中各 a_{t-j} 项用式 (8.2.1) 代换, 有

$$\begin{aligned} \hat{x}_t(1) = & \varphi_1(x_t - \varphi_1 x_{t-1}) + \varphi_1^2(x_{t-1} - \varphi_1 x_{t-2}) \\ & + \varphi_1^3(x_{t-2} - \varphi_1 x_{t-3}) + \dots \end{aligned}$$

显然, 上式右边由第二项起各相邻两项可以抵消, 且当 $j \rightarrow \infty$ 时, $G_j = \varphi_1^j = 0$, 则有

$$\hat{x}_t(1) = \varphi_1 x_t. \quad (8.2.2)$$

而由第二章 AR 模型的结构可知, AR (1) 模型在 t 时刻的数学期望为 $E[x_{t+1}] = \varphi_1 x_t$, 因此则有

$$\hat{x}_t(1) = E[x_{t+1}]. \quad (8.2.3)$$

上式表示, 对于 AR (1) 模型, 向前第一步最佳预测值 $\hat{x}_t(1)$ 等于时间序列在 t 时刻的数学期望 $E[x_{t+1}]$. 那么, 对于任何一个 ARMA 模型, 向前第 l 步的最佳预测值是否仍有类似上述关系成立, 即是否有 $\hat{x}_t(l) = E[x_{t+l}]$, 这是人们所关心的最一般的问题.

2. 最佳预测计算的原理

将式 (8.1.3) 两边在 t 时刻取数学期望, 有

$$\begin{aligned} E[x_{t+l}] = & E[G_0 a_{t+l} + G_1 a_{t+l-1} + \dots + G_{l-1} a_{t+1}] \\ & + E[G_l a_t + G_{l+1} a_{t-1} + \dots]. \end{aligned}$$

现分析此式右边各项在 t 时刻, 各 $a_t, a_{t-1}, \dots$ 已经确定, 故第二项的数学期望仍为括号内各项之和; 而各 $a_{t+1}, a_{t+2}, \dots, a_{t+l}$ 是零均值的随机变量, 故第一项的数学期望为零. 于是, 上式变为:

$$E[x_{t+l}] = \sum_{j=l}^{\infty} G_j a_{t+l-j}.$$

比较此式与式 (8.1.6), 即有:

$$\hat{x}_t(l) = E[x_{t+l}]. \quad (8.2.4)$$

式 (8.2.4) 表示, 时间序列的向前第 l 步最佳预测值 $\hat{x}_t(l)$ 等于在 t 时刻对 x_{t+l} 的数学期望. 显然, 这一结论在预测问题中是十分重要的, 因为根据第二章所述的 ARMA 模型结构, $E[x_t]$ 就等于模型中除 a_t 以外的所有确定性项, 可以很方便地直接利用模型参数和时间序列的观测值计算出来. 式 (8.2.4) 所示的预测方法称为数学期望预测法, 是最佳预测计算的最基本的方法.

8.2.2 AR 模型的最佳预测计算

对 AR (n) 模型

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \cdots + \varphi_n x_{t-n} + a_t,$$

由式 (8.2.4), 当 $l=1$ 时, 在 t 时刻向前第一步最佳预测值为:

$$\hat{x}_t(1) = E[x_{t+1}] = E[\varphi_1 x_t + \varphi_2 x_{t-1} + \cdots + \varphi_n x_{t+1-n} + a_{t+1}].$$

由于在 t 时刻, 各 $x_t, x_{t-1}, \cdots, x_{t+1-n}$ 是已确定了的, 而 a_{t+1} 尚未发生, 即 $E[a_{t+1}] = 0$, 故上式可写为:

$$\hat{x}_t(1) = \varphi_1 x_t + \varphi_2 x_{t-1} + \cdots + \varphi_n x_{t+1-n}.$$

同理, 当 $l=2$ 时, 在 t 时刻向前第二步最佳预测值

$$\begin{aligned} \hat{x}_t(2) &= E[x_{t+2}] = E[\varphi_1 x_{t+1} + \varphi_2 x_t + \cdots + \varphi_n x_{t+2-n} + a_{t+2}] \\ &= \varphi_1 E[x_{t+1}] + \varphi_2 x_t + \cdots + \varphi_n x_{t+2-n} \\ &= \varphi_1 \hat{x}_t(1) + \varphi_2 x_t + \cdots + \varphi_n x_{t+2-n}; \end{aligned}$$

当 $l=3$ 时, 在 t 时刻向前第三步最佳预测值为:

$$\begin{aligned} \hat{x}_t(3) &= E[x_{t+3}] = E[\varphi_1 x_{t+2} + \varphi_2 x_{t+1} + \varphi_3 x_t + \cdots \\ &\quad + \varphi_n x_{t+3-n} + a_{t+3}] \\ &= \varphi_1 E[x_{t+2}] + \varphi_2 E[x_{t+1}] + \varphi_3 x_t + \cdots + \varphi_n x_{t+3-n} \\ &= \varphi_1 \hat{x}_t(2) + \varphi_2 \hat{x}_t(1) + \varphi_3 x_t + \cdots + \varphi_n x_{t+3-n}. \end{aligned}$$

显然, 在 t 时刻向前第 l 步最佳预测值应为:

$$\begin{aligned} \hat{x}_t(l) &= \varphi_1 \hat{x}_t(l-1) + \varphi_2 \hat{x}_t(l-2) + \cdots + \varphi_{l-1} \hat{x}_t(1) + \varphi_l x_t \\ &\quad + \varphi_{l+1} x_{t-1} + \cdots + \varphi_n x_{t+l-n} \quad (\text{当 } l \leq n \text{ 时}); \end{aligned}$$