

机械振动

中册

清华大学工程力学系

郑兆昌 主编

机械工业出版社

内 容 提 要

《机械振动》分上、中、下三册出版，上册系统介绍了振动的基本理论及工程应用。中册系统介绍非线性振动及随机振动的基本理论及其工程应用。下册将介绍有关模态分析、模态综合方法以及流-固耦合问题等。

本册系统介绍非线性振动及随机振动的基本理论及其工程应用。非线性振动部分共三章和一个附录，主要讨论非线性振动的基本性质，定性的几何方法和各种近似求解的振动方法，并论述了响应分析的数值积分方法，在附录中给出了可供应用的电子计算机程序。随机振动部分共三章，包括概率论及随机过程的基础知识，线性系统对平稳及非平稳随机激励的响应分析方法，以及非线性系统对平稳随机激励的响应分析的各种方法。

本书可作为高等院校高年级本科生、研究生的振动教学参考书，以及从事机械振动、结构振动方面研究和计算工作的研究人员、工程技术人员的参考书。

20-5/32

机 械 振 动

(中 册)

清华大学工程力学系

郑兆昌 主编

郑兆昌 丁奎元 编

机械工业出版社出版 (北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ · 印张 $22^{5/8}$ · 字数 596 千字

1986年12月北京第一版·1986年12月北京第一次印刷

印数 0,001—4,380 · 定价 6.45 元

*

统一书号：15033·5878

前 言

随着近代工程技术的迅速发展，许多工业部门中需要设计和建造各种新的大型复杂工程，诸如航天飞机、海洋石油平台、大型电站与核动力工程等等，为了既要保证安全可靠，又要经济合理，都提出了系统的非线性及随机载荷作用下的动态分析问题；机械工程中传统产品改型也需要寻找新的设计方法，如车辆要分析随机疲劳来确定其寿命、挖掘机要考虑动强度、精密机床需要从整体动态分析找到提高加工精度的途径等等。采用常规的静力设计和经验设计的方法是无法实现的。本书上册介绍的确定性的线性振动理论，为读者解决生产实践中的许多常规振动问题提供了理论和方法，并为解决复杂问题打下了基础。但还不能解决上述问题。上述动态分析问题，大多是非线性和随机的，其处理的理论方法与确定性的线性振动理论有很大差别。近些年来，非线性振动和随机振动理论得到了很快的发展和应⽤，虽然至今还没有完全成熟，但是已经获得了许多在解决工程实际问题中行之有效的方法。本册正是为了适应生产发展的需要，为从事这一领域的工程技术人员知识更新、研究生学习和高等院校有关教师的教学参考而编写的。鉴于实际工程和产品中动态分析问题的复杂性，还有许多其他的理论方法需要学习，因此在下册中将讨论近代振动试验方面新发展的模态分析方法、复杂系统的模态综合方法及流一固耦合等专题。本册的内容分如下两部分：

本册第一部分系统地介绍了非线性振动的定性理论、摄动方法和数值积分方法，并附有计算程序。前两章主要建立非线性振动的基本概念，并通过相平面方法和摄动方法研究了非线性振动理论的主要现象和基本性质。在非线⽤振动理论中，除了上册已讨论过的常系数（时不变）稳定的线性振动外，其它变系数和不

稳定的运动，由于研究方法上有共同性，也都包括在非线性振动之内，因此也讨论了慢变系数系统振动和参变振动。由于非线性振动内容广泛及其物理现象和本质的复杂性，既包括平衡位置附近的运动和周期运动，也包括大范围的运动，为此扼要介绍运动稳定性理论。为了适应近代工程问题中提出的复杂结构系统动态响应分析，另一章介绍了结构动力学中发展起来的直接积分法。其主要内容如下：

第十一章，首先介绍了工程问题中可能存在的各种刚度、阻尼等非线性特性，并给出了一些简单问题的精确解。由于大多数非线性振动问题难于寻求精确解，因此本章主要是从定性理论上对非线性振动作一般讨论。在相平面上讨论了奇点的性质，并由此决定了奇点邻近的运动性质；通过相平面上相迹讨论了大范围内的运动性质。关于系统中能量吸入和输出具有反馈而形成的周期运动，称为自激振动，也通过相平面极限环的理论作了介绍。由于非线性振动已远远超出了线性系统中仅讨论稳定运动的范围，为此扼要介绍了运动稳定性的基本概念和有关定理，以及研究运动稳定性的基本方法——李亚普诺夫直接法。

第十二章是非线性振动的摄动方法，包括求解非线性振动的各种渐近的解析方法，其中包括经典的正规摄动，以及为克服解的非一致有效而陆续发展起来的各种奇异摄动法，有早期的坐标变换法，苏联学者提出的被称为 KBM 法，在应用上比较方便的等效线性化法等各种平均法，以及近代发展起来应用范围较广的一类多尺度法。摄动法不仅限于求解非线性振动，而且在其它学科领域中有更广泛的应用。非线性振动与线性振动相比，无论从物理现象还是在数学求解上都要复杂和困难，摄动法对单自由度系统是卓有成效的，对于自治系统如振动周期依赖于振幅，并具有多种谐波响应等都可以用各阶摄动渐近解表达出来，对于非自治系统中如跳跃现象，次谐波、多谐波响应等也描述得很清楚。此外还有系统的惯性或刚度可以缓慢变化的慢变参数振动，以及参数呈周期性微小变化的参变振动，虽然本章仅讨论其线性振动，

但也包括了工程中提出的许多有意义的实际问题。

第十三章是近代计算结构动力学中发展起来的求解响应的各种数值积分方法。前述两章无论从定性或定量上研究非线性振动，一般仅适用于自由度很少的问题。对于近代有限元法离散的高自由度系统，必须采用高速电子计算机的有效的数值方法才能求解，本章介绍了这些方法的基本原理，讨论了算法的稳定性以及计算精度。并在附录中给出了电子计算机程序，便于读者扩充已有的线性振动特征值计算程序，可以进行线性和非线性的动态响应计算，这无疑有助于一些实际工程中提出的动态分析。

本册的第二部分全面系统地介绍了随机振动理论和数学基础，从概率论和随机过程到有关单自由度和多自由度、线性和非线性系统随机响应分析的各种方法，以及在处理实际问题中行之有效的办法。给读者提供了入门的必备知识，并为进一步深入学习奠定了基础。其主要内容如下：

第十四章系统介绍了从集论的基本概念、概率函数和概率密度函数，到随机变量和随机过程的一些知识，作为学习随机振动的重要的数学基础。在随机变量部分主要讨论了矩和特征函数、高斯随机量和中心极限定理。随机过程部分重点讨论了平稳随机过程及其性质、高斯随机过程和马尔可夫过程。还有随机函数的四种收敛型式及其在均方收敛意义下微分和积分的存在条件，作为求解随机振动微分方程的基础。

第十五章是把概率和随机过程的基本理论用于振动分析，系统地讨论了线性单自由度和多自由度系统随机响应的一般表达式，以及在解决工程实际问题时常用的平稳随机响应的模态分析法和传递矩阵法。讨论了响应的门槛值交叉问题与峰值分布问题，以便把随机振动理论用于结构的可靠性分析。还着重讨论了分析非平稳随机响应的渐进功率谱法。

第十六章系统地讨论了分析非线性系统随机响应的三种主要方法：福克尔-普朗克方程法、摄动法及等效线性化法，并指出了它们的优缺点。非线性系统的平稳随机响应分析还没有达到线性

系统随机响应分析那样成熟的程度，但是由于它在结构可靠性分析中的重要性，受到了广泛的重视和不断的研究。

本册非线性振动部分共三章和一个附录，由郑兆昌编写，其中有关计算程序和算例是由谭明一完成的。由天津大学陈予恕同志和南京工学院戴德成同志审阅。随机振动部分共三章由丁奎元编写，由科学院力学研究所欧阳怡同志和西北工业大学方同同志审阅。对各位审阅者热情的帮助和支持，以及所提宝贵意见表示衷心感谢。

本书上册出版后，收到许多读者来信，对他们给予的关心和鼓励深表谢意。研究生谭明一、周小平及航空工业部六〇二所刘安渝等同志协助非线性振动部分的完稿给予很大帮助，固体力学教研组许多同志对本书的关心，对此均深表谢意。关于非线性振动和随机振动的研究，在全国很多单位已进行了许多卓有成效的工作，他们提供的各种资料无疑对本书有很大参考价值。但不可能一一引出，在此也一并致谢。

鉴于我国出版的这方面著作还较少，在各方面的大力支持下，我们大胆尝试编写了本书，由于这方面理论的复杂性，这些学科还在发展之中，此外限于我们的水平和能力，本书无疑会有很多缺点和不足之处，我们诚恳希望各有关单位的同志批评指正。

编者 1983.12

目 录

第十一章 非线性振动的定性方法	1
11.1 引言	1
11.2 非线性特性	1
(1) 非线性弹性	2
(2) 非线性阻尼	8
11.3 精确解	16
(1) 能量积分	16
(2) 周期积分	17
(3) 分段线性系统的缝接法	21
11.4 运动稳定性的基本概念	26
(1) 位形空间和相空间	27
(2) 受扰运动微分方程	30
(3) 运动稳定性定义	32
11.5 相平面上奇点的性质	33
(1) 相平面	33
(2) 奇点及奇点邻近的运动	38
11.6 相平面上相迹的性质	49
(1) 保守系统	49
(2) 耗散系统	56
11.7 极限环	65
(1) 自激振动的基本性质	65
(2) 张弛振动	69
(3) 极限环的存在性	72
11.8 李亚普诺夫直接方法	77
(1) 常号函数和定号函数	78
(2) 李亚普诺夫定理	80
(3) 首次近似方程	93

(4) 按首次近似判别非线性系统的稳定性	95
(5) 罗斯-霍尔维茨 (Routh-Hurwitz) 判据	97
第十二章 非线性振动的摄动方法	100
12.1 引言	100
12.2 直接展开法(正规摄动)	102
12.3 坐标变换法	110
(1) 参数变换	110
(2) 方法的推广	118
(3) 调正法	120
12.4 常数变易及有关的平均法	121
(1) 常数变易	121
(2) 平均法	123
(3) 逐次渐近解(KBM法)	130
(4) 广义平均法	148
(5) 等效线性化法	155
(6) 定常解	160
12.5 多尺度法	164
(1) 方法的一般描述	164
(2) 多变量型(导数展开法)	166
(3) 两变量型	177
(4) 一般型	180
12.6 强迫振动	181
(1) 具有非线性恢复力的系统	182
(2) 自激振动系统	194
(3) 强迫振动的一般情况及周期解稳定性	202
12.7 慢变参数系统	211
(1) 自由振动	212
(2) 强迫振动	222
12.8 参变振动	234
(1) 典型问题	234
(2) 分界线	237
(3) 稳定性	241

12.9 弹性体的非线性振动	246
第十三章 瞬态响应的数值计算方法	256
13.1 引言	256
13.2 增量方程	258
13.3 有限差分法	265
(1) 显式格式——中心差分法	265
(2) 隐式格式——呼伯特 (Houbolt) 法	268
(3) 条件稳定和无条件稳定	270
13.4 纽马克 (Newmark) 法	274
(1) 梯形法	274
(2) 积分格式	276
(3) 方法的稳定性	278
(4) 希尔伯 (Hilber) 修正	281
13.5 威尔逊 (Wilson) 法	283
(1) 预报校正积分格式	283
(2) 希尔伯配置格式	288
13.6 各种方法的比较	292
(1) 截断误差	292
(2) 谱半径	292
(3) 振幅衰减和周期延长	295
13.7 加权余值法	298
(1) 三点格式	298
(2) 四点格式	302
13.8 自由度的减缩	307
13.9 直接积分法程序	311
13.10 算例	313
第十四章 关于概率及随机过程理论的一些知识	330
14.1 引言	330
14.2 集论的一些知识	331
(1) 集的定义	331
(2) 集的计算	332
(3) 波雷尔 (Borel) 场	335

14.3 随机事件、概率和统计规律性	336
(1) 随机事件	336
(2) 概率和统计规律性	337
(3) 概率的运算	340
14.4 随机变量	341
(1) 随机变量的概念	341
(2) 概率分布函数及概率密度函数	343
(3) 条件分布与统计独立性	348
(4) 随机变量的数字特征——矩	350
(5) 随机变量的特征函数	362
(6) 随机变量的函数	366
(7) 高斯分布与中心极限定理	374
14.5 随机过程的定义及其描述	388
(1) 随机过程的定义	389
(2) 随机过程的概率结构	391
(3) 随机过程的特征函数	392
(4) 随机过程的矩函数	393
(5) 相关函数的性质	395
14.6 随机极限的收敛型式与均方计算	396
(1) 四种收敛型式	396
(2) 随机过程的均方连续性	400
(3) 随机过程的微分	404
(4) 随机过程的积分	407
14.7 平稳随机过程	409
(1) 平稳随机过程的定义	410
(2) 平稳随机过程的相关函数的性质	416
(3) 平稳随机过程的谱分解	417
(4) 平稳随机过程的各态历经定理	428
14.8 马尔可夫过程	432
(1) 马尔可夫过程和例子	433
(2) 查普曼-柯尔莫哥洛夫-斯莫卢乔斯基方程	439
(3) 福克尔-普朗克方程	441

14.9 高斯随机过程	446
(1) 高斯随机过程的定义	446
(2) 高斯随机过程的一些重要性质	448
第十五章 线性系统对随机激励的响应	454
15.1 引言	454
15.2 线性系统的传递特性	455
(1) 时域分析——脉冲响应函数法	456
(2) 频域分析——频率响应函数法	459
(3) 脉冲响应函数与频率响应函数之间的关系	461
(4) 多自由度系统的响应分析	462
15.3 在随机激励下线性系统响应的一般表达式	467
15.4 单自由度线性系统对平稳随机激励的响应	471
(1) 不计激励起点影响的情况	472
(2) 考虑激励起点影响的情况	477
(3) 白噪声激励下的响应	480
15.5 多自由度线性系统对平稳随机激励的响应	484
15.6 平稳随机响应的模态分析法	494
15.7 随机响应分析的传递矩阵法	508
15.8 随机响应的阈值交叉问题及峰值分布问题	525
(1) 随机响应的阈值交叉问题	526
(2) 随机响应的峰值分布问题	534
15.9 线性系统对非平稳随机激励的响应	542
(1) “广义”付里叶积分	542
(2) 二重频率功率谱与渐进功率谱的定义	546
(3) 利用二重频率功率谱密度函数的激励与响应之间的关系	549
(4) 利用渐进功率谱密度函数的激励与响应之间的关系	551
第十六章 非线性系统对随机激励的响应	565
16.1 引言	565
16.2 福克尔-普朗克方程法(马尔可夫矢量法)	567
(1) 系统受高斯白噪声激励的状态矢量过程是马尔可夫的	568
(2) 单自由度非线性系统的随机响应	580
(3) 多自由度非线性系统的随机响应	591

(4) 基于福克尔-普朗克方程的迭代近似解法	595
(5) 线性福克尔-普朗克方程的求解	601
16.3 摄动法	609
(1) 单自由度非线性系统的随机响应	609
(2) 多自由度非线性系统的随机响应	618
16.4 等效线性化法	633
(1) 单自由度非线性系统的随机响应	634
(2) 多自由度非线性系统的随机响应	639
附录 用电子计算机解动态响应的数值积分过程	663
1. 直接积分法过程 DWELL	663
2. 正定矩阵三角分解及回代过程 TRIZE	669
3. 矩阵乘列矢量过程 MULTE	671
4. 算法举例	673
习题	677
习题答案	699
主要参考书目	709

第十一章 非线性振动的定性方法

11.1 引言

本书上册部分，系统地介绍了线性系统的振动理论及其在工程技术中的应用。尽管对于绝大多数机械系统而言，线性振动理论已能解释很多振动现象和解决很多的工程实际问题，但是在实际问题中往往还会遇到一些线性振动理论所不能解释的现象。随着工程技术和计算技术的发展，非线性振动理论不仅在机械系统方面，而且在无线电、自动控制等领域中已有了很大的发展和广泛的应用。例如单摆的周期随着摆幅的增大，它的响应并非按线性变化增加。由此可见，线性系统中熟知的等时性、叠加原理，是在一定条件下才成立的。关于什么是属于线性振动的问题，在未说明该系统预期的工作范围之前是没有确切答复的。这是因为系统中某些部件的响应和激励之间的关系可以依赖于这个工作范围。严格来说，几乎所有的振动问题都应该归结为非线性的微分方程，只是在微幅振动的条件下忽略非线性项，经过线性化而得到线性微分方程，但是这是要小心从事的。以后将会看到，有时非线性项将会对运动性质带来本质上的变化。

本章首先通过若干例子介绍非线性的一些基本特性，给出一些简单的非线性振动的解，而后主要是从定性理论上对非线性振动作一般讨论，采用相平面方法给出运动的几何性质，并介绍了李亚普诺夫稳定性的基本概念和直接方法。

11.2 非线性特性

构成非线性振动系统的原因很多，当振幅过大，材料超过线性弹性而进入非线性弹性，甚至超过弹性极限进入塑性，这种由于材料本身的非线性特性而使系统成为非线性系统，通常称为材

料非线性。另外由于几何上或构造上的原因，虽然材料本身仍符合线性弹性，但由于位移过大，或变形过大而使结构的几何形状发生显著改变，而必须按变形后的关系建立运动方程，这样出现的非线性，称为**几何非线性**。由于非粘性阻尼力的存在，上册 3.10 节中曾一律等效为线性阻尼。但是，实际上象干摩擦力、流体阻尼、材料内摩擦阻尼以及材料进入塑性等都是非线性阻尼。从振动系统受到非线性作用力来分析，可以归结为非线性弹性恢复力和非线性阻尼力，系统只受到非线性弹性恢复力作用时，运动过程中不消耗能量，因而属于保守系统，这是比较简单而又十分重要的情况，以后将会重点讨论。系统中一旦有阻尼力时，不论阻尼力是线性还是非线性性质，都将使系统能量不断耗散，而当能量无补偿时，则运动将不断衰减，称为耗散系统，因而是属于非保守系统。此外，在非线性振动中，还要讨论比线性振动更为广泛的一类运动。线性振动理论一般只限微幅的稳定的振动，因而假定刚度、阻尼都是正的，或刚度、阻尼矩阵是正定或半正定的。非线性振动中还要讨论有负刚度的情况，这类运动是不稳定的；此外还有负阻尼存在的运动，它与以往讨论的耗散系统相反，它不断从外界获得能量，运动不断增长，这类运动也是不稳定的；还有一类运动是系统既有能量的吸入、又有输出，最终达到能量的平衡，其运动是周期性的，这属于**自激振动**。本节将举例说明在非线性振动中可能遇到的各种恢复力、阻尼力的特性。为今后讨论打下基础。

(1) 非线性弹性

材料的非线性弹性 单自由度弹簧质量系统的无阻尼自由振动微分方程，一般可描写为

$$m\ddot{x} + F(x) = 0 \quad (11.1)$$

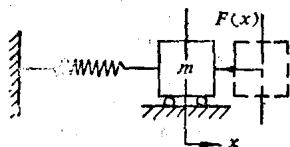


图 11-1

如图 11-1 作用于质量 m 上的弹性恢复力为 $F(x)$ ，它和位移 x 不是图 11-2 虚线所示的线性关系，而是实线所示的非线性弹性关系，这表明弹簧刚度系数不再是常数。图 11-2 a) 表示曲线的

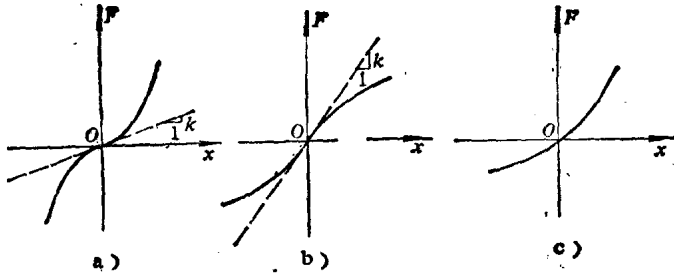


图 11-2

斜率是随位移增加而增加的，称为**硬特性非线性**，而图 11-2 b) 则表示曲线的斜率是随位移减小的，故称为**软特性非线性**。这种由于材料本身的非线性弹性，使得许多振动问题出现非线性振动的现象。由于自由振动的周期是与刚度成反比的，因此不难预计到具有硬特性非线性弹性的系统，其周期将会随振幅增加而减小；反之则会随振幅增加而增大。这是指与图 11-2 虚线所示线性弹性系统对于相同振幅进行比较而言的。

图 11-2 所示的非线性弹性，往往可用 x 的幂函数表示，最常用的是表示为

$$F(x) = kx \pm \beta x^3 \quad (11.2)$$

其中 kx 表示线性恢复力，第二项 βx^3 表示非线性恢复力，一般比第一项要小得多，表明它是对线性项的修正。正负号恰好用来区别硬特性和软特性。

另一种非线性弹性表现为 $F(x)$ 具有不对称的形式，即 $F(x) \neq -F(-x)$ ，如图 11-2 c) 所示。

分段线性 工程上有些非线性系统，往往采用分段线性的弹簧来实现，例如车辆悬架采用主弹簧和副弹簧，又如振动机械中振动筛和振动输送机等采用分组弹簧来实现非线性振动。

图 11-3 给出了这种非线性弹性的构造模型，为了得到硬特性，当 $|x| > x_0$ 时，第二组弹簧即接触而参加工作，如图 11-3 a) 所示，因而使刚度增加。图 11-3 b) 表示无重挡板受到第

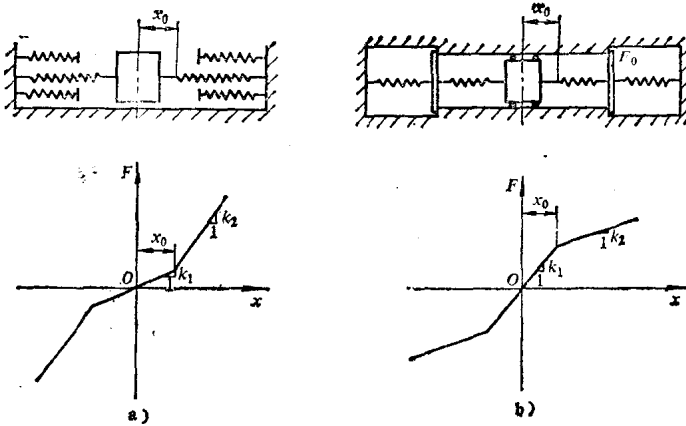


图 11-3

二组弹簧的预压力 F_0 作用后, 当 $|x| > \frac{F_0}{k_1} = x_0$ 时, 第二组弹簧开始与第一组弹簧串联工作, 因而使刚度减小, 得到软特性。这种非线性恢复力可表达为

$$F(x) = \begin{cases} k_1 x, & \text{当 } -x_0 \leq x \leq x_0 \\ k_2 x + (k_1 - k_2)x_0, & \text{当 } x_0 \leq x \\ k_2 x - (k_1 - k_2)x_0, & \text{当 } -x_0 \geq x \end{cases} \quad (11.3)$$

如果把上述分段线性弹性的段数增加, 这种不连续的线性弹簧可以作为图 11-2 中非线性弹性的一种近似。

当连接弹簧如图 11-4 a) 存在间隙 x_0 时, 其非线性恢复力可表达为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } -x_0 \leq x \leq x_0 \\ k(x - x_0), & \text{当 } x \geq x_0 \\ k(x + x_0), & \text{当 } x \leq -x_0 \end{cases} \quad (11.4)$$

当连接弹簧如图 11-4 b) 有预压力 F_0 时, 其非线性恢复力可表达为

$$F(x) = \begin{cases} F_0 + kx & x > 0 \\ -F_0 + kx & x < 0 \end{cases} \quad (11.5)$$

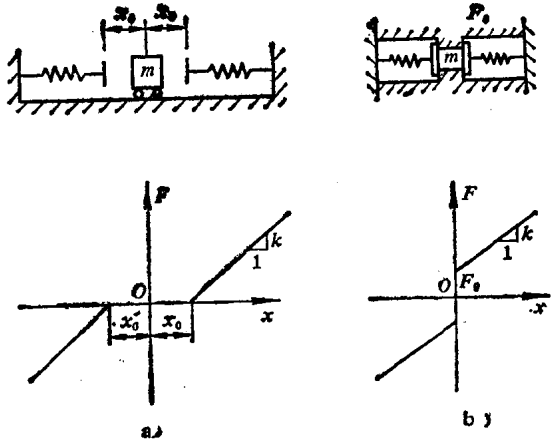


图 11-4

上述图 11-4 所示具有间隙和预压力的非线性弹性，也可以看成是图 11-3 中分段线性弹簧的一种特殊情况，即取消第一组弹簧而得到。

非线性弹簧有很多实际应用，例如在汽车振动中，从舒适性的观点来看，汽车的上下振动（跳动与俯仰）的固有频率大体上为人的步行频率或脉搏频率，即约 70~100 次/分 较好，如果采取线性弹簧时，它的固有频率将随载重量的变化而变化，特别象公共汽车、卡车那样由于载重量的变化而使其固有频率有很大差异。也就是说，如果采用线性弹簧，使得在额定载重量下具有所期望的固有频率，那么在空载情况下固有频率就会变高，这样在同样的路面条件下，也会由于弹簧过硬而使舒适性恶化，但如果把弹簧减软，使得在空载时舒适性很好，则在额定载荷或超载情况下，弹簧将产生过大的变形而导致过高的应力。为了避免这种互相矛盾的现象，汽车设计中采用了非线性弹簧，现在用最简单的单自由度系统来分析一下这一非线性弹簧应具有的特性。为了使固有频率 p 保持常数，必须满足刚度与质量的比值 $k/m = p^2$ (常数) 这一条件。设包括载重在内的汽车总重为 $W = mg$ ，设挠度为 δ ，