离散数学题解
屈婉玲 耿素云 张立昂 编著
清华大学出版社

离散数学
题解

屈婉玲 耿素云 张立昂 编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

离散数学题解

屈婉玲　耿素云　张立昂　编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书是《离散数学(第二版)》(耿素云,屈婉玲,张立昂编著,清华大学出版社出版)一书的配套题解.

全书含 6 个部分:1. 数理逻辑;2. 集合论;3. 代数结构;4. 图论;5. 组合分析初步;6. 形式语言和自动机初步. 每部分均包含三方面内容:(1) 内容提要;(2) 与本部分配套的习题;(3) 习题解答. 对每道题都作了较详细的解答与分析. 对某些题还给出了不同的解法或指出容易犯的错误及犯错误的原因.

本书可作为与配套的《离散数学》的辅助教材,也可以作为其他《离散数学》教材的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学题解/屈婉玲等编著. 一北京: 清华大学出版社,1999
ISBN 7-302-03398-6

Ⅰ. 离… Ⅱ. 屈… Ⅲ. 离散数学-高等学校: 高校-教材 Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 25742 号

出版者: 清华大学出版社(北京清华大学学研楼,邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者: 北京市通州区大中印刷厂
发行者: 新华书店总店北京发行所
开 本: 787×1092 1/16 **印张**: 11.75 **字数**: 275 千字
版 次: 1999 年 9 月第 1 版 2000 年 1 月第 2 次印刷
书 号: ISBN 7-302-03398-6/TP · 1842
印 数: 8001~19000
定 价: 13.00 元

前　言

本书是《离散数学(第二版)》,耿素云,屈婉玲,张立昂编著,清华大学出版社出版的配套参考书. 在本书中凡提到《离散数学》均指上述配套教材.

本书的出版经过较长时间的酝酿. 离散数学在我国作为计算机专业的基础课仅有20多年的历史. 随着高等院校计算机本科和专科教育规模的不断扩大,特别是计算机的广泛应用以及社会上对计算机继续教育的迫切需求,使得《离散数学》教育由浅入深,从少到多,越来越受到人们的重视. 近10年来,各种离散数学教材相继问世,无疑对离散数学的教学起到了很大的推动作用. 但与有着悠久历史的传统的成熟的高等数学教育相比,离散数学毕竟是太年轻了. 仅就教材而言,表现在适合于不同层次、不同需求的教材少,尤其是对离散数学复习和习题指导的书就更少. 这对于学习,特别是自学离散数学的人来说确实是一个很大的困难. 在我们的教学实践中经常听到下面的反映:

(1) 离散数学的特点是,概念多、内容散、抓不住知识之间的内在联系,复习时不知道哪里是重点.

(2) 对书上的例题一看就懂,但自己拿到题以后却不知从何处下手,没有解题思路.

(3) 知道解题的大致思路,但不了解解题的规范和要求,不会表达,一写出来常常是漏洞百出.

这些问题经常困扰着初学者,特别是自学者. 我们深切感到他们需要一本难度适当的离散数学习题指导用书,并曾就这样一本书的指导思想和内容进行过讨论和准备.

1998年下半年清华大学出版社决定将我们于1992年出版的《离散数学》一书进行修订,并同时出版一本配套的《离散数学题解》,这一决定推动了我们的设想成为现实. 根据《离散数学》一书的体系,这本题解按章安排,每章主要包含以下内容:

(1) 内容提要. 将本章的主要概念和定理按知识体系进行概括和小结,并说明本章的复习要点和应该达到的要求.

(2) 和本章内容配套的习题.

(3) 习题解答. 配合习题解答针对一些普遍性的分析方法、解题技巧、求解步骤和规范,以及应该避免的错误进行详尽的论述.

和配套教材《离散数学》一致,本题解包含六个方面的内容:(1) 数理逻辑;(2) 集合论;(3) 代数结构;(4) 图论;(5) 组合分析初步;(6) 形式语言和自动机初步. 其中第1,2,7,8,9章由耿素云撰写;第3,4,5,6,10章由屈婉玲撰写;第11章由张立昂撰写.

本书是《离散数学》的配套参考书,但并不限于只与上述《离散数学》教材配套时才能使用. 采用其他教材学习离散数学的人也可以用它作为参考书.

作　者

1999年4月

目　录

第1章 命题逻辑

内容提要

1. 命题符号化及联结词

命题与真值

称能判断真假，但不会既能真又能假的陈述句为命题，命题的判断结果称为命题的真值，真值只取两个值：真和假，称真值为真的命题为真命题，真值为假的命题为假命题. 称由简单陈述句构成的命题为简单命题或原子命题，用 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$ 表示命题，称为命题符号化. 用数字 1 表示真，用 0 表示假，则任何命题的真值不是 1 就是 0，但决不可能既可以为 1 又可以为 0. 称由简单命题用联结词联结而成的命题为复合命题. 常用的联结词(逻辑**联结词**)及它们所联结的复合命题有以下 6 种：

否定式 设 p 为一命题，复合命题"非 p"(或"p 的否定")称为 p 的否定式，记作 $\neg p$. $\neg$为否定联结词，$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

合取式 设 p,q 为两命题，复合命题"p 并且 q"(或"p 和 q")称作 p 与 q 的合取式，记作 $p\wedge q$. $\wedge$ 称作合取联结词，$p\wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真.

析取式 设 p,q 为两命题，复合命题"p 或 q"称作 p 与 q 的析取式，记作 $p\vee q$. $\vee$ 称作析取联结词，$p\vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.

蕴含式 设 p,q 为两命题，复合命题"如果 p，则 q"称作 p 与 q 的蕴含式，记作 $p\rightarrow q$. 称 p 为蕴含式的前件，q 为蕴含式的后件. $\rightarrow$称作蕴含联结词，$p\rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假.

等价式 设 p,q 为两命题，复合命题"p 当且仅当 q"称作 p 与 q 的等价式，记作 $p\leftrightarrow q$. $\leftrightarrow$称作等价联结词，$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 的真值相同.

异或式 设 p,q 为两命题，复合命题"p,q 之中仅一个成立"称做 p 与 q 的异或式(或排斥式)，记作 $p\bar{\vee} q$，$\bar{\vee}$ 称做异或联结词，$p\bar{\vee} q$ 为真当且仅当 p 与 q 中仅一个为真.

2. 命题公式及分类

命题常项及命题变项 若用 $p,q,r,\cdots$表示确定的简单命题，则称 $p,q,r,\cdots$为命题常项，命题常项的真值是确定不变的. 若用 $p,q,r,\cdots$泛指简单的陈述句，则称 $p,q,r,\cdots$为命题变项，此时 $p,q,r,\cdots$是变量，它们的取值为 1 或 0.

合式公式 (1) 单个的命题变项或常项(含 1 和 0)是合式公式；

(2) 若 A 是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式；

(3) 若 A,B 都是合式公式，则$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$，$(A\leftrightarrow B)$，$(p\bar{\vee} q)$也是合式公式；

(4) 只有有限次地应用(1)～(3)形成的符号串才是合式公式. 合式公式也称命题公

式，简称合式或公式.

对以上定义的两点说明：

(1) 定义中出现的字母 $A,B,\cdots$ 代表任意的公式，称它们为**元语言**符号，所谓**元语言**，是用来说明**对象语言**的语言，而对象语言是指用来描述所研究的对象(此处是指数理逻辑)的语言.

(2) 公式的最外层括号有时可以省去.

公式的层次 (1) 若 A 是单个的命题常项或变项，则称 A 为 0 层公式.

(2) 称 A 是 $n+1(n\geqslant 0)$ 层公式是指下列诸情况之一：

① $A=\neg B$，B 为 n 层公式；

② $A=B\wedge C$，其中 B,C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n=\max(i,j)$；

③ $A=B\vee C$，其中 B,C 的层次同②；

④ $A=B\rightarrow C$，其中 B,C 的层次同②；

⑤ $A=B\leftrightarrow C$，其中 B,C 的层次同②；

⑥ $A=B\overline{\vee} C$，其中 B,C 的层次同②.

(3) 若 A 的层次为 k，则称 A 为 k 层公式.

以上定义中所用"＝"为通常意义下的等于，这里"＝"为元语言符号.

赋值或解释 设 A 为一公式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是出现在 A 中的全部命题变项，给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 各指定一个真值(0 或 1)，称为对 A 的一个赋值或解释. 若赋值使 A 的真值为 1，则称该赋值为 A 的成真赋值，若赋值使 A 的真值为 0，则称该赋值为 A 的成假赋值.

对以上定义的两点说明：

(1) 含命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的公式 A 的赋值是由二进制数字组成的长为 n 的符号串，例如，101 是含命题变项 p_1,p_2,p_3 的公式 A 的一个赋值，其含义为指定 p_1,p_3 的真值为 1，p_2 的真值为 0；

(2) 若公式中命题变项由 $p,q,r,\cdots$ 给出，则它们的顺序由英文字母顺序给出；

真值表 设公式 A 含 $n(n\geqslant 1)$ 个命题变项，将 A 在 2^n 个赋值下的取值情况列成表，称为 A 的真值表.

公式的分类 设 A 为一个公式.

(1) 若 A 无成假赋值，则称 A 为重言式或永真式；

(2) 若 A 无成真赋值，则称 A 为矛盾式或永假式；

(3) 若 A 至少有一个成真赋值，则称 A 为可满足式；

(4) 若 A 至少有一个成真赋值，又至少有一个成假赋值，则称 A 为非重言式的可满足式.

3. 等值演算

等值式 若等价式 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 等值，记作 $A\Leftrightarrow B$.

上述定义中，"$\Leftrightarrow$"为元语言符号，用它来说明 $A\leftrightarrow B$ 为重言式.

基本的等值式

(1) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$.		双重否定律
(2) $A \Leftrightarrow A \vee A$.		等幂律
(3) $A \Leftrightarrow A \wedge A$.		
(4) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.		交换律
(5) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.		
(6) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$.		结合律
(7) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$.		
(8) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.		分配律
(9) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.		
(10) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.		德·摩根律
(11) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.		
(12) $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$.		吸收律
(13) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$.		
(14) $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$.		零律
(15) $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$.		
(16) $A \vee 0 \Leftrightarrow A$.		同一律
(17) $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$.		
(18) $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$.		排中律
(19) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$.		矛盾律
(20) $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$.		蕴含等值式
(21) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$.		等价等值式
(22) $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$.		假言易位
(23) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$.		等价否定等值式
(24) $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$.		归谬论

等值演算 由已知等值式推演出新的等值式的过程称为等值演算.

置换规则 设 $\Phi(A)$是含公式 A 的公式,$\Phi(B)$是用 B 置换了 $\Phi(A)$中的 A 之后的公式,若 $A \Leftrightarrow B$,则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

联结词的优先顺序 在演算中,$\neg$最优先,其次为$\wedge$与$\vee$及$\overline{\vee}$($\wedge$,$\vee$,$\overline{\vee}$同级),再其次为$\to$与$\leftrightarrow$($\to$与$\leftrightarrow$同级).若有括号(圆括号),则括号最优先.同级按从左至右的顺序演算.

4. 联结词全功能集

真值函数 记$\{0,1\}^n=\{0\cdots0,\cdots,1\cdots1\}$,即$\{0,1\}^n$是由 0,1 组成的全体长为 n 的符号串集合.称定义域为$\{0,1\}^n$,值域为$\{0,1\}$的函数为 n 元真值函数.$\{0,1\}^n$到$\{0,1\}$共有2^{2^n}个不同的真值函数.

联结词全功能集　设 S 为一个联结词集合，若任意真值函数都可以仅用 S 中的联结词表示的公式所表示，则称 S 为联结词全功能集.

与非式　设 p,q 为两命题，复合命题"p 与 q 的否定"称为 p 与 q 的与非式，记作 $p\uparrow q$，$\uparrow$ 称为与非联结词. $p\uparrow q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为真.

或非式　设 p,q 为两命题，复合命题"p 或 q 的否定"称为 p 与 q 的或非式，记作 $p\downarrow q$，$\downarrow$ 称为或非联结词. $p\downarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为假.

$\{\neg,\wedge,\vee,\overline{\vee},\rightarrow,\leftrightarrow\}$，$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$，$\{\neg,\wedge,\vee\}$，$\{\neg,\wedge\}$，$\{\neg,\vee\}$，$\{\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$，$\{\neg,\rightarrow\}$等都是联结词全功能集.

5. 对偶与范式

对偶式　设公式 A 为仅含$\{\neg,\wedge,\vee\}$中联结词的公式，将 $\vee$ 换成 $\wedge$，$\wedge$ 换成 $\vee$，若含 0，换成 1，若含 1，换成 0，所得公式记为 A^*，称 A^* 为 A 的**对偶式**.

文字　称命题变项或其否定为文字.

简单析取式　由有限个文字组成的析取式称为简单析取式.

简单合取式　由有限个文字组成的合取式称为简单合取式.

极小项　在含 n 个命题变项的简单合取式中，若每个命题变项以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第 i 个命题变项以文字的形式出现在左起的第 i 位上，则称这样的简单合取式为极小项. n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极小项，分别记为 $m_0,m_1,\cdots,m_{2^n-1}$，其中 $i(0\leqslant i\leqslant 2^n-1)$的二进制表示即为 m_i 的成真赋值.

极大项　在含 n 个命题变项的简单析取式中，若每个命题变项以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第 i 个命题变项以文字的形式出现在左起的第 i 位上，称这样的简单析取式为极大项，n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极大项，分别记为 $M_0,M_1,\cdots,M_{2^n-1}$，其中，$i(0\leqslant i\leqslant 2^n-1)$的二进制表示即为 M_i 的成假赋值.

析取范式　仅由有限个简单合取式组成的析取式，称为析取范式.

主析取范式　由有限个极小项组成的析取式称为主析取范式.

合取范式　仅由有限个简单析取式组成的合取式称为合取范式.

主合取范式　由有限个极大项组成的合取式，称为主合取范式.

主要定理

定理 1.1　任一命题公式都存在着与其等值的析取范式和合取范式.

定理 1.2　任一命题公式都唯一地存在着与其等值的主析取范式与主合取范式.

6. 推理理论

推理的形式结构

设 $A_1,A_2,\cdots,A_k,B$ 为命题公式，称

$$(A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k)\rightarrow B \qquad (*)$$

为推理的形式结构. $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为推理的前提，B 为推理的结论. 若$(*)$为重言式，则称推理正确，此时称 B 是 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的逻辑结论或有效结论，并可将$(*)$记为

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B.$$

这里,“$\Rightarrow$”为元语言符号,用它来说明(*)为重言式,即推理正确的符号.

推理定律 称重言蕴含式为推理定律.主要的推理定律有:

(1) $A \Rightarrow (A \vee B)$; 附加

(2) $(A \wedge B) \Rightarrow A$; 化简

(3) $((A \to B) \wedge A) \Rightarrow B$; 假言推理

(4) $((A \to B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$; 拒取式

(5) $((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$; 析取三段论

(6) $((A \to B) \wedge (B \to C)) \Rightarrow (A \to C)$; 假言三段论

(7) $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$; 等价三段论

$\vdots$

判断推理是否正确的方法

判断推理是否正确,就是判断推理的形式结构(*)是否为重言式.其主要方法有:

(1) 真值表法;

(2) 等值演算法;

(3) 主析取(主合取)范式法.

构造证明法

证明 证明是一个描述推理过程的命题公式序列,其中的每个命题公式或者为已知的前提,或者是由某些前提应用推理规则得到的结论或中间结论.

推理规则

(1) 前提引入规则.

(2) 结论引用规则.

(3) 置换规则.

以下推理规则用推理图式形式给出,每个图式横线上面为前提,横线下面为结论.

(4) 假言推理规则

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \hline \text{所以} \quad B \end{array}.$$

(5) 附加规则

$$\begin{array}{l} A \\ \hline \text{所以} \quad A \vee B \end{array}.$$

(6) 化简规则

$$\begin{array}{l} A \wedge B \\ \hline \text{所以} \quad A \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{l} A \wedge B \\ \hline \text{所以} \quad B \end{array}.$$

(7) 拒取式规则

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \neg B \\ \hline \text{所以} \quad \neg A \end{array}.$$

(8) 假言三段论规则

$$\begin{array}{l} \quad A \to B \\ \quad B \to C \\ \hline \text{所以} \quad A \to C \end{array}$$

(9) 析取三段论规则

$$\begin{array}{l} \quad A \vee B \\ \quad \neg A \\ \hline \text{所以} \quad B \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{l} \quad A \vee B \\ \quad \neg B \\ \hline \text{所以} \quad A \end{array}$$

(10) 合取引入规则

$$\begin{array}{l} \quad A \\ \quad B \\ \hline \text{所以} \quad A \wedge B \end{array}$$

(11) 构造性二难规则

$$\begin{array}{l} \quad A \to B \\ \quad C \to D \\ \quad A \vee C \\ \hline \text{所以} \quad B \vee D \end{array}$$

推理规则(4)～(11)也可以以其他形式给出(见配套的离散数学教材).

7. 小结

学习第1章(命题逻辑)要注意以下几点.

(1) 要弄清命题与陈述句的关系.命题都是陈述句,但陈述句不都是命题.只有陈述句所表达的判断结果是唯一确定的(正确的或错误的),它才是命题.

(2) 弄清由6种基本联结词联结的复合命题的逻辑关系及其真值.特别是要弄清蕴含式“$p \to q$”的逻辑关系及其真值.这里,q 是 p 的必要条件.无论蕴含关系如何表述,都要仔细地区分出蕴含式的前件和后件,否则会将必要条件当成充分条件,当然就有可能将假命题变成真命题,或将真命题变成假命题.

(3) 记住24个基本的等值式,这是学好命题逻辑的关键问题.这是因为,在等值演算过程中,在求主析取范式和主合取范式过程中,在将公式化成等值的某个全功能联结词集中公式的过程中都要用到基本的等值式.

(4) 要会准确地求出给定公式的主析取范式和主合取范式.掌握主析取范式与真值表的关系,主析取范式与成真赋值的关系,主析取范式与主合取范式的关系.公式的主合取范式与真值表及成假赋值的关系.还要弄清不同类型公式的主析取范式及主合取范式的特点,特别是要知道,重言式的主析取范式含 2^n(n 为公式中含的命题变项数)个极小项,重言式的主合取范式为1.而矛盾式的主析取范式为0,主合取范式含 2^n 个极大项.

(5) 会用多种方法(如真值表法,等值演算法,主析取范式法等)判断公式的类型及判断两个公式是否等值.

(6) 会用等值演算法将一个联结词集中的公式等值地化为另一个联结词全功能集中

的公式.

(7) 要弄清楚推理的形式结构，掌握判断推理是否正确的方法，以及对某些正确的推理会构造它的证明.

以上各点注意事项，在习题解答中均可找到具体说明的实例.

习　题

1.1 判断下列语句是否为命题，若是命题请指出是简单命题还是复合命题.

(1) $\sqrt{2}$是无理数.

(2) 5 能被 2 整除.

(3) 现在开会吗?

(4) $x+5>0$.

(5) 这朵花真好看呀!

(6) 2 是素数当且仅当三角形有 3 条边.

(7) 雪是黑色的当且仅当太阳从东方升起.

(8) 2000 年 10 月 1 日天气晴好.

(9) 太阳系以外的星球上有生物.

(10) 小李在宿舍里.

(11) 全体起立!

(12) 4 是 2 的倍数或是 3 的倍数.

(13) 4 是偶数且是奇数.

(14) 李明与王华是同学.

(15) 蓝色和黄色可以调配成绿色.

1.2 将上题中的命题符号化，并讨论它们的真值.

1.3 判断下列各命题的真值.

(1) 若 $2+2=4$，则 $3+3=6$;

(2) 若 $2+2=4$，则 $3+3\neq 6$;

(3) 若 $2+2\neq 4$，则 $3+3=6$;

(4) 若 $2+2\neq 4$，则 $3+3\neq 6$;

(5) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3=6$;

(6) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3\neq 6$;

(7) $2+2\neq 4$ 当且仅当 $3+3=6$;

(8) $2+2\neq 4$ 当且仅当 $3+3\neq 6$.

1.4 将下列命题符号化，并讨论其真值.

(1) 如果今天是 1 号，则明天是 2 号;

(2) 如果今天是 1 号，则明天是 3 号.

1.5 将下列命题符号化.

(1) 2 是偶数又是素数.

(2) 小王不但聪明而且用功.

(3) 虽然天气很冷,老王还是来了.

(4) 他一边吃饭,一边看电视.

(5) 如果天下大雨,他就乘公共汽车上班.

(6) 只有天下大雨,他才乘公共汽车上班.

(7) 除非天下大雨,否则他不乘公共汽车上班.

(8) 不经一事,不长一智.

1.6 设 p,q 的真值为 0;r,s 的真值为 1,求下列各命题公式的真值.

(1) $p\lor(q\land r)$;

(2) $(p\leftrightarrow r)\land(\neg q\lor s)$;

(3) $(p\land(q\lor r))\to((p\lor q)\land(r\land s))$;

(4) $\neg(p\lor(q\to(r\land\neg p)))\to(r\lor\neg s)$.

1.7 判断下列命题公式的类型,方法不限.

(1) $p\to(p\lor q\lor r)$;

(2) $(p\to\neg p)\to\neg p$;

(3) $\neg(q\to p)\land p$;

(4) $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$;

(5) $(\neg p\to q)\to(q\to\neg p)$;

(6) $(p\land\neg p)\leftrightarrow q$;

(7) $(p\lor\neg p)\to((q\land\neg q)\land\neg r)$;

(8) $(p\leftrightarrow q)\to\neg(p\lor q)$;

(9) $((p\to q)\land(q\to r))\to(p\to r)$;

(10) $((p\lor q)\to r)\leftrightarrow s$.

1.8 用等值演算法证明下列等值式.

(1) $(p\land q)\lor(p\land\neg q)\Leftrightarrow p$;

(2) $((p\to q)\land(p\to r))\Leftrightarrow(p\to(q\land r))$;

(3) $\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow((p\lor q)\land\neg(p\land q))$.

1.9 用等值演算法判断下列公式的类型.

(1) $\neg((p\land q)\to p)$;

(2) $((p\to q)\land(q\to p))\leftrightarrow(p\leftrightarrow q)$;

(3) $(\neg p\to q)\to(q\to\neg p)$.

1.10 已知真值函数 F,G,H,R 的真值表如表 1.1 所示.分别给出用下列联结词集合中的联结词表示的与 F,G,H,R 等值的一个命题公式.

表 1.1

p	q	F	G	H	R
0	0	0	0	1	1

续表

p	q	F	G	H	R
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0

(1) $\{\neg,\rightarrow\}$；(2) $\{\neg,\wedge\}$；(3) $\{\neg,\vee\}$；(4) $\{\uparrow\}$；(5) $\{\downarrow\}$.

1.11 设 A,B,C 为任意的命题公式.

(1) 已知 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C$，问 $A\Leftrightarrow B$ 吗？

(2) 已知 $A\wedge C\Leftrightarrow B\wedge C$，问 $A\Leftrightarrow B$ 吗？

(3) 已知 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$，问 $A\Leftrightarrow B$ 吗？

1.12 求下列命题公式的主析取范式，主合取范式，成真赋值，成假赋值.

(1) $(p\vee(q\wedge r))\rightarrow(p\wedge q\wedge r)$；

(2) $(\neg p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\vee p)$；

(3) $\neg(p\rightarrow q)\wedge q\wedge r$.

1.13 通过求主析取范式判断下列各组命题公式是否等值.

(1) ① $p\rightarrow(q\rightarrow r)$；② $q\rightarrow(p\rightarrow r)$.

(2) ① $p\uparrow q$；② $p\downarrow q$.

1.14 一个排队线路，输入为 A,B,C，其输出分别为 F_A,F_B,F_C. 在同一时间内只能有一个信号通过. 如果同时有两个或两个以上信号通过时，则按 A,B,C 的顺序输出. 例如，A,B,C 同时输入时，只能 A 有输出. 写出 F_A,F_B,F_C 的逻辑表达式，并化成全功能集 $\{\downarrow\}$ 中的表达式.

1.15 某勘探队有 3 名队员. 有一天取得一块矿样，3 人的判断如下：

甲说：这不是铁，也不是铜；

乙说：这不是铁，是锡；

丙说：这不是锡，是铁.

经实验室鉴定后发现，其中一人两个判断都正确，一个人判对一半，另一个人全错了. 根据以上情况判断矿样的种类.

1.16 判断下列推理是否正确. 先将命题符号化，再写出前提和结论，然后进行判断.

(1) 如果今天是 1 号，则明天是 5 号. 今天是 1 号. 所以明天是 5 号.

(2) 如果今天是 1 号，则明天是 5 号. 明天是 5 号. 所以今天是 1 号.

(3) 如果今天是 1 号，则明天是 5 号. 明天不是 5 号. 所以今天不是 1 号.

(4) 如果今天是 1 号，则明天是 5 号. 今天不是 1 号. 所以明天不是 5 号.

1.17 构造下面推理的证明.

(1) 前提：$\neg(p\wedge\neg q)$，$\neg q\vee r$，$\neg r$.

结论：$\neg p$.

(2) 前提：$p\rightarrow(q\rightarrow s)$，$q$，$p\vee\neg r$.

结论：$r \to s$.

(3) 前提：$p \to q$.

结论：$p \to (p \wedge q)$.

(4) 前提：$q \to p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r$.

结论：$p \wedge q \wedge s \wedge r$.

1.18 如果他是理科学生，他必学好数学.如果他不是文科学生，他必是理科学生.他没学好数学.所以他是文科学生.

判断上面推理是否正确，并证明你的结论.

以下各题是填充题.题目要求均为从供选择的答案中选出应填入叙述中的$\boxed{}$内的正确答案.

1.19 给定命题公式如下：

$$p \vee (q \wedge \neg r).$$

上述公式的成真赋值为$\boxed{A}$，成假赋值为$\boxed{B}$，公式的类型为$\boxed{C}$.

供选择的答案

A：① 无；② 全体赋值；③ 010,100,101,111；④ 010,100,101,110,111.

B：① 无；② 全体赋值；③ 000,001,011；④ 000,010,110.

C：① 重言式；② 矛盾式；③ 可满足式.

1.20 给定命题公式如下：

$$\neg(p \wedge q) \to r.$$

上述公式的主析取范式中含极小项的个数为$\boxed{A}$，主合取范式中含极大项的个数为$\boxed{B}$，成真赋值为$\boxed{C}$.

供选择的答案

A：① 2；② 3；③ 5；④ 0；⑤ 8.

B：① 0；② 8；③ 5；④ 3.

C：① 000,001,110；② 001,011,101,110,111；③ 全体赋值；④ 无.

1.21 给定下列 3 组前提.

(1) $\neg(p \wedge \neg q), \neg q \vee r, \neg r$；

(2) $(p \wedge q) \to r, \neg r \vee s, \neg s$；

(3) $\neg p \vee q, \neg q \vee r, r \to s$.

上述各前提中，(1)的逻辑结论(有效结论)为$\boxed{A}$，(2)的逻辑结论为$\boxed{B}$，(3)的逻辑结论为$\boxed{C}$.

供选择的答案

A,B,C：① r；② q；③ $\neg p$；④ s；⑤ $\neg p \vee \neg q$；⑥ $p \to s$；⑦ $p \wedge q$.

1.22 设计一个符合如下要求的室内照明控制线路：在房间的门外、门内及床头分别装有控制同一个电灯 F 的 3 个开关 A,B,C.当且仅当一个开关的扳键向上或 3 个开关的扳键都向上时电灯亮.则 F 的逻辑关系式可化简为$\boxed{A}$.

供选择的答案

A：① $A \vee B \vee C$；② $A \vee B \vee C \vee (A \wedge B \wedge C)$；

③ $\neg A \forall (B \forall C)$；④ $A \forall (B \forall C)$.

习题解答

1.1　除(3),(4),(5),(11)外全是命题.其中,(1),(2),(8),(9),(10),(14),(15)是简单命题,(6),(7),(12),(13)是复合命题.

分析　首先应该注意到,命题是陈述句,因而不是陈述句的句子都不是命题.本题中,(3)为疑问句,(5)为感叹句,(11)为祈使句,它们都不是陈述句,所以它们都不是命题.

其次,(4)这个句子是陈述句,但它表示的判断结果是不确定的,也就是说,它可真(如取 x 为 2),它也可能为假(如取 $x=-10$),于是(4)不是命题.

其余的句子都是有确定判断结果的陈述句,因而它们都是命题.又因为(1),(2),(8),(9),(10),(14),(15)都是简单的陈述句,因而作为命题,它们都是简单命题.(6)和(7)各为由联结词"当且仅当"联结起来的复合命题,(12)是由联结词"或"联结的复合命题,而(13)是由联结词"且"联结起来的复合命题.这里的"且"为"合取"联结词.在日常生活中,合取联结词有许多表述法,例如,"虽然……,但是……"、"不仅……,而且……"、"一面……,一面……"、"……和……"、"……与……"等.但要注意,有时"和"或"与"联结的是主语,构成简单命题,例如,(14),(15)中的"与"与"和"就是联结的主语,这两个命题均为简单命题,而不是复合命题.希望读者在遇到"和"或"与"出现的命题时,要根据命题所陈述的含义加以区分.

1.2　(1) p：$\sqrt{2}$是无理数.p 为真命题.

(2) p：5 能被 2 整除.p 为假命题.

(6) $p \leftrightarrow q$.其中,p:2 是素数,q:三角形有三条边.由于 p 与 q 都是真命题,所以,$p \leftrightarrow q$ 为真命题.

(7) $p \leftrightarrow q$.其中,P:雪是黑色的,q:太阳从东方升起.由于 p 为假命题,q 为真命题,因而 $p \leftrightarrow q$ 为假命题.

(8) p:2000 年 10 月 1 日天气晴好.今日(1999 年 2 月 13 日)我们还不知道 p 的真假,但 p 的真值是确定的(客观存在的),只是现在不知道而已.

(9) p:太阳系外的星球上有生物.它的真值情况同(8)的讨论.

(10) p:小李在宿舍里.p 的真值由具体情况而定,是确定的.

(12) $p \vee q$.其中,p:4 是 2 的倍数,q：4 是 3 的倍数.p 为真命题,q 为假命题.$p \vee q$ 为真命题.

(13) $p \wedge q$.其中,p:4 是偶数,q:4 是奇数.由于 q 是假命题,所以,$p \wedge q$ 为假命题.

(14) p:李明与王华是同学.真值由具体情况而定(是确定的).

(15) p:蓝色和黄色可以调配成绿色.这是真命题.

分析　命题的真值是唯一确定的.有些命题的真值我们立即可知,有些则不能马上知道,但它们的真值不会变化,是客观存在的.

1.3　令 p:2+2=4,q:3+3=6,则以下命题分别符号化为

(1) $p \rightarrow q$.