工科研究生用书

杨伦标　高英仪　编著

模糊数学

·原理及应用·

（第二版）

华南理工大学出版社

·工科研究生用书·

模 糊 数 学

·原理及应用·

（第二版）

杨伦标、高英仪 编著

华南理工大学出版社

内容简介

本书是工科硕士研究生教材，简明地阐述模糊数学的基本理论和基本方法。全书共十二章，内容包括：集合及其运算、映射、格等预备知识，F集合，F模式识别，F关系与聚类分析，F映射与综合评判，扩张原理与F数，F逻辑，F语言与F推理，F控制，F积分与可能性理论，F规则。根据工科院校的特点，还介绍应用于各专业领域中较成熟的实例。各章配有习题。书后附有答案及提示。

本书也可作本科高年级的教材，或供工程技术人员自学参考。

【粤】新登字12号

华南理工大学出版社出版发行
(广州五山·邮码510641)
广东省新华书店经销
华南理工大学出版社电脑排版室排版
广东封开县人民印刷厂印刷
*
开本850×1168 1/32 印张 13.375 字数332千
1995年1月第2版 1996年12月第3次印刷
印数6001—11000
ISBN 7-5623-0440-8
O.43 定价：15.00元

前　言

模糊数学是一门新兴学科，自 1965 年发表第一篇模糊集论文开始，20 多年来发展非常迅速，它已用到国民经济和科学技术各个领域，许多高等院校把它作为研究生必修或选修课程。本书就是在我校研究生处的关心和大力支持下，由使用多年的打印教材改编而成的。

本书结合编者多年在教学实践中的经验和体会，较简明扼要地介绍了该门学科的基本理论和基本方法，并根据工科院校的特点，注意介绍应用于各领域中较成熟的实例，尽量做到内容全面、叙述清楚、说理通俗。各章都配有适量的例题和习题，书后附有习题答案及较详细的提示，便于具备有“高等数学”和“工程数学”基础知识的读者使用。因此，既可作为研究生和本科高年级的教材，也可供工程技术人员自学参考之用。书中带有 * 号的章节内容较难或专业性太强，可灵活选读。

本书在编写过程中，曾得到“广州模糊系统与知识工程研究所”的程里春副教授的热情帮助，并为本书提供了部分资料。我校数学系原系主任张正寅教授及有关同志，对本书的出版给予极大鼓励和支持，并提出了许多宝贵意见。我校自动化系毛宗源教授为本书提供了模糊控制的应用实例。在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中一定存在不少缺点，恳请广大读者批评指正。

编　者

1992 年 8 月

出 版 说 明

研究生教材建设是研究生教育的基础工程，是提高研究生教学质量的重要环节。自1978年恢复招收研究生以来，我校先后编写了多种供研究生使用的教材和教学参考书，有的已正式出版，但更多的是采用讲义形式逐年印发。为满足研究生教育事业发展的需要，我校决定出版“工科研究生用书”系列教材。

“工科研究生用书”以公共课和部分学术专著为主，专业学位课程将根据学科设置和国内相同学科的需求情况有计划地分批出版。我们希望，本系列教材能从研究生的教学需要出发，根据各门课程在教学过程中的地位和作用，既包含本门课程的基本内容，又反映我校工科研究生的特点，并在该学科领域内求新、求深、求精，使学生掌握必需的基础理论和专门知识。学位课教材还应包含学科前沿和交叉学科的丰富内容，反映国内外最新研究成果，学术思想活跃，适应目前科学技术发展的形势。学术专著要充分反映作者的研究成果和学术水平，阐述自己的学术见解，对实现研究生培养目标、提高教育质量起重大作用。

“工科研究生用书”的内容结构和阐述方法，力求条理清楚，论证严谨，具有科学性、系统性和先进性。

由于我校研究生教材建设起步较晚，限于我们的水平和经验，本系列教材难免有错误和不足之处，恳请读者指正，我们将非常感谢。

华南理工大学研究生处

1992年3月

目　录

第一章　预备知识

模糊数学是描述模糊现象的数学。本章首先简述了模糊数学与经典数学的区别，特别是与概率、数理统计的区别；其次是简介学习模糊数学的必备的基础知识，如集合论、映射、格等基本概念。

若读者学过离散数学，或已了解有关内容，则本章可略去不读。

§1.1　引　言

科学研究的不断深入，人们需要研究的关系越来越复杂，对系统的判别和推理的精确性要求也越高。为了精确地描述复杂的现实对象，各类新的数学分支就不断地产生和发展起来。迄今为止，处理现实对象的数学模型可分为三大类：

一类是确定性数学模型。这类模型的背景对象具有确定性或固定性，对象间具有必然的关系。

二类是随机性数学模型。这类模型的背景对象具有或然性或随机性。

三类是模糊性数学模型。这类模型的背景对象及其关系均具有模糊性。

前两种模型的共同特点是所描述的事物本身的含义是确定的，它们赖以存在的基石——集合论。它满足互补律就是这种非此即彼的清晰概念的抽象。

模糊性的数学模型所描述的事物本身的含义是不确定的，例如：

(1) 所有远远大于1的实数的集合。(25是这集合的一员吗?)

(2) 健康人的集合。(我是这集合的一员吗?)

(3) 动物的集合。(细菌是这集合的成员吗?)

事实上，现实世界中遇到的对象很多是这种模糊的、不精确定义的类型，它们的成员没有精确定义的判别准则。模糊集正反映了这类“亦此亦彼”的模糊性。它是不满足互补律的。

应当指出：随机性与模糊性的数学模型，虽然都具有不确定性，但它们是有区别的：

随机性，是指事件的某种结果的机会而言，由于条件不充分，而导致各种可能的结果，这是因果律的破缺而造成的不确定性。概率与统计数学就是处理这类随机现象的数学。

模糊性，是指存在于现实中的不分明现象。如“稳定”与“不稳定”、“健康”与“不健康”之间找不到明确的边界。从差异的一方到另一方，中间经历了一个从量变到质变的连续过渡过程。这是由于排中律的破缺而造成的不确定性。于是，作为研究模糊现象的定量处理方法——模糊数学便出现了。

可见，如果说概率与统计数学将数学的应用范围从必然现象扩大到随机现象的领域，那么，模糊数学则将数学的应用范围从清晰现象扩大到模糊现象的领域。

下面，简单地介绍一些必要的基础知识。

§1.2 集合及其运算

近代数学中一个最基本的概念——集合，指的是具有确切含

义的一堆东西，集合常用大写字母 $A,B,C,D,\cdots\cdots$ 表示。这堆东西中的每一个成员，叫做这个集合的元素，简称为元，常用小写字母 $a,b,c,d,x,y,\cdots\cdots$ 表示。x 是集合 A 的元素，用 $x\in A$ 表示，读作"x 属于 A"；x 不是集合 A 的元素，用 $x\overline{\in} A$ 表示，读作"x 不属于 A"。为简洁起见，常以"$\forall x\in A$"表示"集 A 中的任意元素 x"；以"$\exists x\in A$"表示"集 A 中存在一个元 x"。有时为了描述集合 A 的元素所具有的性质，将 A 记为

$$A=\{x\mid p(x)\}$$

式中，$p(x)$ 是元 x 所具有的性质。

由有限个元素构成的集合叫有穷集，否则叫无穷集。一个集合的元素个数叫这个集合的基数。

如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或 B 包含 A，记为 $A\subseteq B$；如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 和 B 相等，记为 $A=B$。

不含任何元素的集合叫空集，用 $\varnothing$ 表示。所论对象的全体，称为全集或论域，用 U(或 X) 表示。

设 U 为全集，以 U 的所有子集为元素的集，称为 U 的幂集，记为 $\mathscr{P}(U)$。任集 A 的最小子集是 $\varnothing$，最大子集是 A。

设 U 为全集，$A,B,C\in\mathscr{P}(U)$。集的运算定义如下：

并集　$A\cup B\triangleq\{x|x\in A\ 或\ x\in B\}$；

交集　$A\cap B\triangleq\{x|x\in A\ 且\ x\in B\}$；

补集　$\overline{A}\triangleq\{x|x\overline{\in} A\}$；

差集　$A-B\triangleq\{x|x\in A\ 且\ x\overline{\in} B\}$

上述运算可用文氏图(图 1-1)表示。

设 $A,B,C\subseteq U$，其并、交、补运算有如下性质：

① 幂等律　$A\cup A=A$，　$A\cap A=A$；

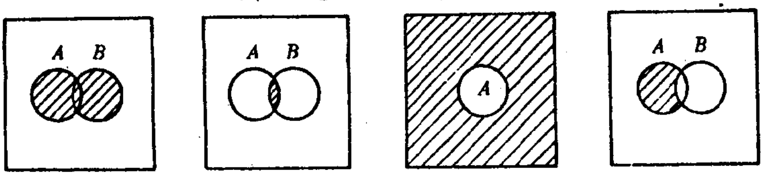
② 交换律　$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$；

③　结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

④　吸收律　$A \cup (A \cap B) = A$,

$A \cap (A \cup B) = A$;



a) $A \cup B$　b) $A \cap B$　c) $\overline{A}$　d) $A - B$

图 1-1

⑤　分配律　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

⑥　复原律　$\overline{\overline{A}} = A$;

⑦　对偶律(或德·摩尔根(De·Morgan)律)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

⑧　互补律　$A \cup \overline{A} = U$,　$A \cap \overline{A} = \varnothing$;

⑨　零壹律　$A \cup U = U$,　$A \cap U = A$,

$A \cup \varnothing = A$,　$A \cap \varnothing = \varnothing$

设 A、B 为任意两集,若 $x \in A$, $y \in B$,将元素 x、y 搭配成元素对(x,y),称(x,y)为 x 与 y 的序偶。一般$(x,y) \neq (y,x)$。而所有的序偶(x,y)构成的集合称为 A 与 B 的直积集(或笛卡儿乘积),记为

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$$

一般地,$A \times B \neq B \times A$。

设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是 n 个集合,则称

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots x_n) | x_i \in A_i,\ i = 1,2,\cdots,n\}$$

为 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 的直积。

§1.3 映　　射

在两个集 X、Y 之间，如果有一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，在 Y 中都有唯一元素 y 与之对应，则称 f 是 X 到 Y 的映射。实际上，映射就是函数概念的推广。

对于元素来说，映射记为

$$y = f(x) \quad (\text{或 } x \xrightarrow{f} y)$$

它指出了具体的对应规则，这时称 y 是 x 在映射 f 下的象，而 x 称为 y 的一个原象。

对于集合来说，映射又可记为

$$f : X \longrightarrow Y \quad (\text{或 } X \xrightarrow{f} Y) \qquad (*)$$

并称 X 为映射 f 的定义域。而称

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$$

为映射 f 的值域。但（ * ）式中的记号并不指明具体对应规则。

显然，$f(X) \subseteq Y$。

例　论域 U 中的子集 A，可表示为映射

$$C_A : U \longrightarrow \{0,1\}$$

其具体对应规则是：

$$C_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{当 } u \in A \\ 0 & \text{当 } u \overline{\in} A \end{cases}$$

称 C_A 为 A 的特征函数（隶属函数）。

由此例可见，U 的子集与其特征函数之间建立了一一对应关系，从这种意义来说，“子集就是特征函数”。

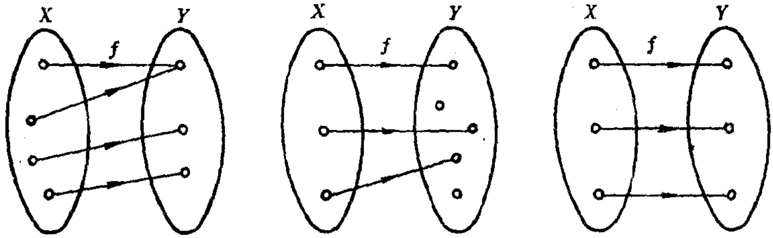
如果 $f(X) = Y$，则称 f 是 X 到 Y 上的映射，或全射（满射）。

如果 $x, x' \in X$，且当 $x \neq x'$ 时

$$f(x) \neq f(x')$$

则称 f 为 X 到 Y 的一对一的映射，或称为单射。

既是全射又是单射的映射，则称为全单射或双射。图 1-2 为全射、单射及双射的示意图。



a) 全射　　b) 单射　　c) 双射

图 1-2

对于映射 $f: X \longrightarrow Y$ 来说，令 $f^{-1}(y)=\{x \mid f(x)=y\}$，则称 $f^{-1}(y)$ 为由 f 确定的元素 y 的逆象。

当 $B \subset Y$ 时，令 $f^{-1}(B)=\{f^{-1}(y) \mid y \in B\}$，则称 $f^{-1}(B)$ 为由 f 确定的 B 的逆象集。

若 f 为双射，则由 $y=f(x)$ 确定 Y 到 X 的映射，称为 f 的逆映射，记为 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$。

若 $A_1, A_2 \in \mathscr{P}(X)$，$B_1, B_2 \in \mathscr{P}(Y)$，映射 $f: X \longrightarrow Y$ 具有如下性质：

① 若 $A_1 \subseteq A_2$，则 $f(A_1) \subseteq f(A_2)$；

② $f(A_1 \cup A_2)=f(A_1) \cup f(A_2)$；

③ $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$，当 f 是单射时两边相等；

④ $f(A_1-A_2) \supseteq f(A_1)-f(A_2)$，当 f 是单射时两边相等；

⑤ 若 $B_1 \subseteq B_2$，则 $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$；

⑥ $f^{-1}(B_1 \cup B_2)=f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$；

⑦ $f^{-1}(B_1 \cap B_2)=f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$；

⑧ $f^{-1}(\overline{B}_1)=\overline{f^{-1}(B_1)}$；

⑨ $f^{-1}(f(A_1)) \supseteq A_1$，当 f 是单射时两边相等；

⑩　$f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$，当 f 是全射时两边相等。

设 $f: X \longrightarrow Y$，$g: Y \longrightarrow Z$，定义映射 $h: X \longrightarrow Z$ 为

$$h(x) = g(f(x)) \qquad \forall\, x \in X$$

称 h 为 f 与 g 的合成映射，记为 $h = g \circ f$

显然，　$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

映射 $f: X \times Y \longrightarrow Z$，称为 $X \times Y$ 到 Z 的代数运算。当我们只限于考虑从 $X \times X$ 到 X 的运算时，又将这种运算称为 X 上的二元运算。定义了代数运算的集与运算一起统称为代数系。

设在两个非空集 X 和 Y 上分别定义了二元运算"$\circ$"和"$\bar{\circ}$"，g 是由 X 到 Y 的映射。若对任意 $x_1, x_2 \in X$，都有

$$g(x_1 \circ x_2) = g(x_1) \,\bar{\circ}\, g(x_2)$$

则称 g 为由代数系 $(X, \circ)$ 到代数系 $(Y, \bar{\circ})$ 的同态映射，并称 $(X, \circ)$ 与 $(Y, \bar{\circ})$ 同态，记为 $(X, \circ) \sim (Y, \bar{\circ})$。

如果 g 是全射，则称 g 为满同态映射。

如果 g 是一对一的，则称 g 为单值的同态映射。

单值的满同态映射称为同构映射。

如果 $(X, \circ)$ 与 $(Y, \bar{\circ})$ 之间存在同构映射，则称 $(X, \circ)$ 与 $(Y, \bar{\circ})$ 同构，记为 $(X, \circ) \cong (Y, \bar{\circ})$。

§1.4　关　系　与　格

对于集合 X、Y，直积 $X \times Y$ 的子集 R 称为 X 与 Y 之间的二元关系，简称为关系。若 $X = Y$，则 $X \times X$ 的子集 R 称为 X 上的二元关系。若 $(x, y) \in R$，则称"x 对 y 具有关系 R"，也记作 $x\mathrm{R}y$。若 $(x, y) \notin R$，则记作 $x \bar{\mathrm{R}} y$。

类似地，$\overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^{n}$ 的子集 R 称为 X 上的 n 元关系。

集合 X 上的几个重要的二元关系：

① 自反关系 R　　$\forall x \in X$，恒有 $x\,R\,x$。

② 对称关系 R　　若 $x\,R\,y$，则 $y\,R\,x$。

③ 反对称关系 R　若 $x\,R\,y$，且 $y\,R\,x$，则 $x = y$。

④ 传递关系 R　　若 $x\,R\,y$，且 $y\,R\,z$，则 $x\,R\,z$。

具有自反、对称、传递三种性质的关系叫等价关系。由等价关系 R 可定义集合 $[x] = \{y \mid x\,R\,y\}$，称 $[x]$ 为 x 的等价类。

具有自反、反对称、传递三种性质的关系 R，称为半序关系。通常将半序关系 R 记成“$\leqslant$”。

给了某个半序关系“$\leqslant$”的集 X，称为半序集，记为 $(X, \leqslant)$。

若 $(X, \leqslant)$ 是半序集，且对任 $x, y \in X$，必有 $x \leqslant y$ 或者 $y \leqslant x$，则称 $(X, \leqslant)$ 为全序集，这时称“$\leqslant$”为 X 上的全序。

设 $(\mathscr{P}, \leqslant)$ 是半序集，若存在 $a \in \mathscr{P}$，使对任 $x \in \mathscr{P}$ 有 $x \leqslant a$（或 $\geqslant a$），则称 a 为 $\mathscr{P}$ 的最大（小）元。

设 $(\mathscr{P}, \leqslant)$ 是半序集，$A \subseteq \mathscr{P}$。若存在 $a \in \mathscr{P}$，使对 A 中任意元 x，均有 $x \leqslant a$（或 $\geqslant a$），则称 a 为 A 的上界（下界）。上界中的最小元素称为 A 的上限，记为 $\sup A$；下界中的最大元素称为 A 的下限，记为 $\inf A$。对于 $\mathscr{P}$ 中的元素 x、y 来说，若 x、y 的上限（下限）存在，则记为 $x \vee y$ $(x \wedge y)$。

在半序集 $(L, \leqslant)$ 中，对任 $x, y \in L$，若 $x \vee y$，$x \wedge y$ 均存在，则称 $(L, \leqslant)$ 为格。

在格 $(L, \leqslant)$ 中，三个条件 $x \leqslant y$，$x \vee y = y$，$x \wedge y = x$ 是相互等价的。若将“$\vee$”、“$\wedge$”看成是在集 L 上定义的二元运算，则这二种运算具有如下性质：

① 交换律　$x \vee y = y \vee x$，　$x \wedge y = y \wedge x$；

② 结合律　$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$，

　　　　　$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$；

③ 吸收律　$x \vee (x \wedge y) = x$，