

弹塑性稳定理论

梁炳文 胡世光 编

国防工业出版社

52.53

弹 塑 性 稳 定 理 论

梁炳文 胡世光 编



国防工业出版社

内 容 简 介

本书由两部分组成：第一部分为受压失稳理论；第二部分为受拉失稳理论。在第一部分中，主要介绍立柱的临界载荷；稳定问题的基本原理与解题方法；薄板的基本理论；环、曲杆、管和曲板条的稳定问题；薄板的失稳；薄壁管筒的稳定性；板与壳的塑性失稳；压延失稳问题；几种板金件受压及成形失稳问题；扭转失稳的变分解法。在第二部分中，主要介绍分散性失稳；集中性失稳；厚向异性对拉伸变形稳定性的影响；板料拉伸变形的成形极限。

本书可供科研人员、高等院校教师、研究生、大学生、其他有关的工程技术人员参考。

弹 塑 性 稳 定 理 论

梁炳文 胡世光 编

责任编辑 余发棣

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168¹/₃₂ 印张12¹/₄ 310千字

1983年11月第一版 1983年11月第一次印刷 印数：0,001—4,000册

统一书号：15034·2541 定价：1.80元

序

本书分为两部分。第一部分为受压失稳理论，第二部分为受拉失稳理论。其中着重阐述板金类零件在成形及使用中的变形稳定性问题。

过去提到失稳问题，一般都是指的受压失稳，但受拉失稳问题，近十余年来，也日益受到重视。从失稳的意义来看，两者本质上有共同之处，都用到求载荷极值的概念，即把方程 $\partial P / \partial \delta = 0$ ，作为判定开始失稳的条件。不过在受压失稳中，把失稳载荷称为临界载荷，在受拉失稳中，把该载荷称为极限载荷而已，其实都是指的稳定状态的最大载荷。对简单零件而言是如此。对于复杂的零部件，两者都有在局部失稳后，将续加的载荷转移到其余稳定部分的性质，这时往往需要求局部失稳与整体失稳两种载荷。

当然，受压与受拉失稳，也有不同之处。例如受压失稳是刚度问题，其主要影响因素是刚度参数。受拉失稳是强度问题，其主要影响因素是强度参数。受压失稳，弹塑性兼而有之，受拉失稳则完全限于塑性范围。此外，失稳现象也迥然不同；在理论处理方法上，也有差异。

在使用中，受压和受拉是两个主要受力方式。在成形中更是如此。如板金件的弯曲和翻孔极限值，主要受材料拉伸性能的限制，内外起皱则完全是受压变形引起的。在性质复杂的成形工序例如压延中，两种失稳现象兼而有之：凸缘的收缩，受失稳起皱的限制；筒壁的传拉能力，受危险断面失稳颈缩的限制。总之，拉、压变形的稳定性，是板金件在成形及使用中所面临的两个重要问题。

但是，目前对于受拉失稳，并没有受到应有的重视。如讲强度问题的文献和专著很多，但多限于受拉失稳点即开始发生颈缩这个门槛之前。目前讲材料破坏问题的文献也不少，又皆限于颈缩发展终了这个门槛之后。而对颈缩本身的发生发展问题，却较少研究。部分原因是由于强度问题多属弹性范围，即远在颈缩开始之前。而一旦破坏，即已远远超过开始颈缩之后了。在构件上也往往难以看到颈缩的痕迹。但在板金成形中却不是这样，因为板金成形是零件的一个定形过程，其指定的变形范围都在开始屈服之后和破坏之前，往往会在成形零件或半成品上，保留颈缩的痕迹。这虽不妨碍特定成形工序的完成，却会影响后续工序的顺利完成和零件的使用，因而对于颈缩即受拉失稳，在对材料成形极限的研究中，具有重要意义。编者有鉴于此，认为将受压及受拉失稳理论放在一起，加以有系统地阐述，是有必要的。由于编者水平有限，遗漏谬误之处在所难免，还望读者予以指正，以便修正提高。

编 者

目 录

第一部分 受压失稳理论

引言	2
第一章 立柱的临界载荷	4
§ 1-1 立柱受压折损的类型	4
§ 1-2 用力的平衡式求临界载荷	6
§ 1-3 临界载荷存在的证明	11
§ 1-4 用能量法求临界载荷	14
§ 1-5 缩减弹性模数	19
§ 1-6 薄板的立柱作用	21
第二章 稳定问题的基本原理与解题方法	24
§ 2-1 莫氏定律与虚功原理	24
§ 2-2 梁变位的三角函数方程	27
§ 2-3 立柱在弹性物质中的临界载荷	31
§ 2-4 梁柱	35
第三章 薄板的基本理论	39
§ 3-1 薄板弯曲问题	39
§ 3-2 曲率莫尔圆	48
§ 3-3 应力与弯矩	49
§ 3-4 板受弯矩、受拉或受压	53
§ 3-5 板在弯曲中的应变能	56
§ 3-6 矩形简支板的变位	63
§ 3-7 有初始小曲率的板的弯曲	67
§ 3-8 板的大变位	69
第四章 环、曲杆、管和曲板条的稳定问题	72
§ 4-1 薄曲杆的弯曲	72
§ 4-2 三角级数在薄圆环弯曲中的应用	75
§ 4-3 轴向压力或拉力对环弯曲的影响	80
§ 4-4 圆环和管在均匀外压下的失稳	82

§ 4-5	受均匀外压的带椭圆度管	86
§ 4-6	圆拱在均匀压力下的失稳	88
§ 4-7	小曲率曲杆的失稳	91
§ 4-8	双金属板条的热膨胀失稳	97
§ 4-9	圆弧形板条的侧向失稳	100
第五章	薄板的失稳	108
§ 5-1	求临界载荷的方法	108
§ 5-2	在一个方向受均匀压缩的简支矩形板	110
§ 5-3	在两个方向受压缩的简支矩形板	115
§ 5-4	两简支对边受均匀压缩, 另两对边有各种支承的矩形板	120
§ 5-5	简支矩形板在弯曲和压缩下的失稳	133
§ 5-6	矩形板在剪应力作用下的失稳	139
§ 5-7	其他情况的矩形板	144
§ 5-8	圆板的失稳	147
§ 5-9	板超过比例极限后的失稳	154
§ 5-10	失稳板的大变形	159
第六章	薄壁管筒的稳定性	166
§ 6-1	平衡方程	166
§ 6-2	多尼尔方程及其应用	171
(A)	受侧向压力作用的筒	172
(B)	轴向压缩的筒	174
(C)	内液压作用下的封闭筒	176
(D)	长曲条的轴向压缩	177
第七章	板与壳的塑性失稳	179
§ 7-1	失稳时用中层应变表示的力与弯矩	179
§ 7-2	板壳的稳定性	189
§ 7-3	板稳定问题的近似解	194
§ 7-4	圆筒的稳定性	206
§ 7-5	卡曼试验与几种方法的比较	212
第八章	压延失稳问题	216
§ 8-1	解析能量法	216
§ 8-2	能量法	224
第九章	几种板金件受压及成形失稳问题	235

§ 9-1 橡皮压制件的凸缘失稳问题	235
§ 9-2 筒形件受轴向压缩的失稳	249
§ 9-3 椭圆旋转体容器在内压下的失稳	254
§ 9-4 锥形件旋压失稳问题	255
第十章 扭转失稳的变分法	262
§ 10-1 变分法的应用	262
§ 10-2 变分法用的符号和名词	263
§ 10-3 变分法对铰接柱的应用	266
§ 10-4 薄板的扭曲	269
§ 10-5 单位扭曲量的方程	272
§ 10-6 应力及应变与扭曲的关系	277
§ 10-7 立柱弯曲与扭转的总储能	279
§ 10-8 立柱的一般微分方程, 旋转轴位置仍为未知数	283
§ 10-9 剖面有两个对称轴的立柱	285
§ 10-10 剖面有一个对称轴的立柱	287
§ 10-11 剖面不对称的立柱	290
§ 10-12 立柱有已知旋转轴的一般方程	293
§ 10-13 扭曲矩及扭曲常数的计算	295
§ 10-14 理论式的适用范围	303
I. 附录	305
I-1 求临界载荷的几个通式	305
I-2 弹性与塑性失稳的差异与共性	311
I-3 薄壁筒稳定问题研究的发展	315
参考文献	317

第二部分 板料塑性变形的拉伸失稳理论

引言	320
第十一章 分散性失稳	321
§ 11-1 斯威夫特准则 (Swift criterion)	323
§ 11-2 板料双向拉伸的分散性失稳	324
§ 11-3 薄壁筒拉伸胀形的分散性失稳	331
§ 11-4 球形容器的分散性失稳	335

VI

§ 11-5 圆板胀形的分散性失稳	336
第十二章 集中性失稳	340
§ 12-1 希尔准则 (Hill Criterion)	340
§ 12-2 集中性细颈的方位	342
§ 12-3 马辛尼克、库祖斯基假说及其微-积分方程	343
§ 12-4 M-K理论的实验验证和讨论	349
第十三章 厚向异性对拉伸变形稳定性的影响	353
§ 13-1 厚向异性板塑性变形应力应变关系的基本方程	353
§ 13-2 厚向异性指数对板料抗拉强度的影响	356
§ 13-3 厚向异性指数对分散性失稳的影响	358
§ 13-4 厚向异性指数对集中性失稳的影响	365
§ 13-5 几点归纳	370
第十四章 板料拉伸变形的成形极限	371
§ 14-1 板料成型的基本变形方式与成形极限	371
§ 14-2 坐标网技术简介	372
§ 14-3 基勒-古德文成形极限图 (FLD)	374
§ 14-4 FLD的计算曲线	379
参考文献	381

第一部分 受压失稳理论

引 言

由板金件（板、管、型材等）构成的板壳结构，例如飞机及火箭等，在成形过程中以及受载情况下，都有稳定性问题。在成形过程中，成形的方法虽然多种多样，但基本方式不外“放”和“收”两种形式。所谓“放”就是在外力作用下，毛料被延伸，甚至断裂破坏，是强度问题。所谓“收”就是在外力作用下，毛料被压缩，因而失稳起皱，是刚度问题。

板金件及板壳结构，受力情况不外拉、压、弯、扭四种形式。压与弯有受压失稳问题。在纯剪中也有压应力分量存在。有压应力分量存在的板壳结构，都有可能发生失稳问题。在胀力作用下的一些薄壳结构，像扁圆皿器，其赤道部分也会由于引起周向压应力而失稳起皱。

论述强度问题的专著与专题报告资料，是相当丰富的，谈稳定性问题的书刊资料比较少。有关稳定性问题的论著中，研究弹性稳定问题的多，而研究塑性稳定的，尤其是生产中的稳定问题，就较少了。这些塑性稳定专题报告，散落在一些文献中，往往只局限于讨论具体问题，不涉及基本原理。

弹性及塑性稳定问题的求解，其基本原理和方法是相同的。弹性稳定问题的解，往往可以用来解决塑性稳定问题。但塑性稳定问题有其独特之处，如板金加工中出现的稳定问题，主要是塑性失稳问题。但两者的共同点是主要的。为此，本书将弹性及塑性稳定问题，加以系统化，先从基本原理开始，然后分析各种典型的弹性及塑性稳定问题。

本部分共十章。前三章阐述稳定问题的基本原理与处理问题的基本方法，这对弹性及塑性稳定问题，都是共同的基础。第三

章是板与壳的基本理论,是分析弹性及塑性稳定问题所常用的一些平衡方程,是力、弯矩与变形功等的表达式。第四、五、六章是板、曲条、环与薄壁管筒的弹性稳定问题,可以用来解决同类的塑性问题。第七、八、九章主要是对塑性稳定问题的分析,论及各种受力构件的稳定性,更多的是在钣金加工中所常见的问题,如压延、橡皮压制及旋压失稳等问题。在各种具体题例中,受压弯曲是失稳的主要表现形式,但有些已经牵涉到扭转现象;宇航结构中常用的薄壁型材,如薄壁梁、压延件的失稳,就是这样。第十章集中分析了开口管筒及各种型材在轴向载荷下的扭转现象,分析了失稳的作用与相应的计算方法。最后一篇是附录,讨论了立柱与薄板失稳问题,弹性与塑性失稳问题。在附录里还列举了一些常用的简易公式和数据。

本书既着重对原理的阐述与重要方程的推导,又注意收集典型例子与有用的数据。

第一章 立柱的临界载荷

苏

§ 1-1 立柱受压折损的类型

立柱在受压以后，缩短的数值与外力的增量成正比；与外力保持平衡的内力，即平衡力，亦即立柱的抵抗力。如果外力增加太快，则抵抗力与外力失去平衡，将像弹簧那样发生振动现象，这一点在下面再讨论。现在只讨论逐渐增加的外力与变位的关系。

立柱受力后，产生应力，其值与立柱的变形情况、弹性模数及尺寸大小等有关。

首先讲理想立柱，即（1）绝对直的；（2）材料绝对均匀；（3）外力作用线正通过各横剖面的重心。这种立柱的平衡力与变位的关系，如图 1-1 中的曲线 A 所示。在比例限度内，即 01 段，是一条直线，和材料实验所得的曲线相同。超过了这个限度，即产生塑流现象；起初外力增加慢，变位增加快。但后来由于立柱变粗，平衡力增加快，变位增加慢。这种现象，除立柱变粗的原因外，还有应变刚[●]的原因。

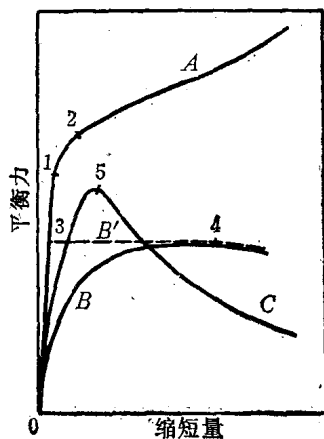


图 1-1

以上是指韧性材料而言。至于脆性材料，塑流程度有限，如

- 硬度主要是应力应变曲线上点的位置高低的标志，即硬度与强度有密切关系。而刚度则与曲线的斜率有关。故应变刚比冷作硬化更能确切说明材料随应变增加而强化的趋势。

到2点,就损坏了。所以在各种薄板结构中,一般不用脆性材料。

但实际上立柱不会压缩到破坏而不弯曲。因为:(1)立柱本身的轴线可能就不是直的;(2)外力不一定正好加在重心线上;(3)材料不均匀,各剖面应力的合力作用线,不与几何重心线重合又因各剖面力矩不同,又产生了剪力。如果这些剪力的合力不通过剪心,又会使立柱发生扭转。这样立柱不仅受到了压力,又受到弯矩与扭矩。

短立柱压应力在各剖面是均布的,立柱的损坏,都是由于塑流的关系。

长立柱受压后有弯曲,如曲线B所示。愈趋近理想状态,该曲线亦愈趋近034的曲折线,即A与B'的综合曲线。因理想的长立柱,在一定限度(即点3)内是一条直线。如受到很小的侧力,立柱弯曲,侧力去后,仍能恢复原形。但稍为超过点3就不行了,这时即使受到极其微小的侧力,就会弯曲;如果载荷不减小,即使将侧力去掉,弯曲程度还照样沿3-4线继续增加。即使抗压应力达到无限大也要继续弯曲。立柱这种折损,是由于弹性不稳定的缘故。理想立柱的最大载荷,只能到达3-4线,故实际立柱不能超过这个限度。因为弯曲关系,一边的压应力超过了屈服点后,发生塑流现象,平衡力不但不因变位的增加而增加,反而减小,如点4所示。故一般立柱的设计,3-4线的高度与屈服点,都不能超过点3的数值,该数值称为临界载荷。这一点的高低,与材料的强度无关,只与弹性模数和惯性矩有关,称弹性失稳折损。

常用的立柱其性质如曲线C所示。其变位也和长柱一样,既有缩短,又有弯曲。但在弯曲还未到达很显著的程度以前,一边的应力已超过了屈服点,发生塑流现象,抵抗力减少。如外力不减小,就会突然折损。这种折损,称塑流失稳折损。因为和短柱的折损原因相同,所以还属于短柱折损类型。

以上所谈都是实心立柱。对于板件,受压力后,常会部分的

发生弹性失稳现象，因而起皱或扭转，将其载荷传递给其他部分来承受，有扩大折损范围的趋势。故对于薄板件，应避免发生局部失稳。在规定的载荷下，还应避免发生整体的折损。

§ 1-2 用力的平衡式求临界载荷

求受压失稳的临界载荷，一般有两种方法。一种是用力的微分平衡式，直接求解；另一种是用能量法求解。本节先讲用力的平衡关系求解的方法。

上节曾提到理想立柱，当压力在一定限度内，如受很小的侧力作用，就会弯曲；但侧力去掉后，仍恢复直立状态。超过这个限度，如稍有弯曲，就继续弯曲不止。介于这两种状态之间的，是中立状态，在这种状态下，给它任何曲度，都能保持平衡。因为这时载荷稍有增加，即失去平衡，这种载荷称为临界载荷，长柱的最高载荷，是判断立柱稳定与否的依据。

一个立柱如图 1-2 所示，下端是固定的，上端是自由的。当 P 的数值逐渐增加到某一个数量时，设有侧力使其摆动 δ 的距离；如果侧力去掉后，仍保持这种状态，则 P 之值即是临界值。而图 1-2 所示的，正是这种状态。可以根据这种状态，写出以下方程式：

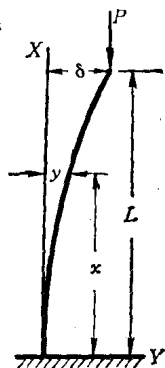


图 1-2

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta - y). \quad (a)$$

立柱的弯曲方向，当然是在 EI 最小的一侧。设 $j^2 = EI/P$ ，则式 (a) 变为：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{j^2} y = \frac{1}{j^2} \delta. \quad (b)$$

由式 (b) 解得：

$$y = \delta + C_1 \cos \frac{x}{j} + C_2 \sin \frac{x}{j}. \quad (c)$$

当 $x = 0$ 时, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, 解得 $C_1 = -\delta$, $C_2 = 0$ 。故得

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{x}{j} \right) \quad (d)$$

当 $x = L$ 时, $y = \delta$, 这只有使 $\cos \frac{L}{j} = 0$, 式 (d) 才能成立, 因而

$$\frac{L}{j} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad (e)$$

n 为整数; L/j 的最小值, 亦即 P 的最小值, 是令 $n = 0$, 故

$$\frac{L}{j} = L \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2} \circ$$

得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \circ \quad (1-1)$$

如 $n = 1$, 则

$$P_{cr} = \frac{9EI\pi^2}{4L^2},$$

这是图1-3(a)所示的情形。

如 $n = 2$, 则

$$P_{cr} = \frac{25EI\pi^2}{4L^2},$$

这是图1-3(b)所示的情形。

如果立柱侧面没有支承力来限制其变形状态, 是不会发生如图1-3(a)和(b)的情况的。故式(1-1)即是图1-2所示立柱的临界载荷。

两端铰接的立柱, 如图1-4(a)所示, $L/2$ 相当图1-2的立柱整长, 故其临界载荷为:

$$P_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2} \circ \quad (1-2)$$

式(1-2)是最基本的立柱方程。如果两端都是固定的, 如图

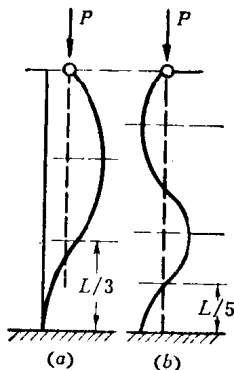


图 1-3

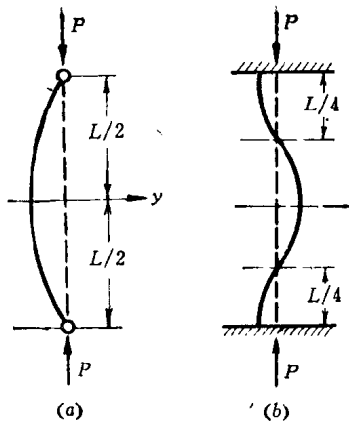


图 1-4

1-4(b) 所示, 这里 $L/4$ 相当图 1-2 的整长, 故其临界载荷为:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (1-3)$$

由以上这些方程可以看出, 长柱的临界载荷只与 EI 有关, 与材料的强度无关。可用铁作长立柱, 而不必用钢, 因为铁和钢的 E 值, 相差有限。

临界载荷最初由尤拉所求得, 故又叫尤拉载荷, 其基本方程可写成:

$$P_{cr} = \frac{C\pi^2 EI}{L^2} \quad (1-4)$$

两端铰接时, $C = 1$; 一端自由一端固定时, $C = 1/4$; 两端固定时, $C = 4$ 。固定性大的, C 值亦大, C 又叫固定系数。在实际结构中, 立柱两端, 没有完全铰接的, 也没有十分固定的。 C 值很难确定; 为安全计, C 值最大为 2, 最小为 1。

临界应力由式 (1-4) 可写成:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 E \left(\frac{\sqrt{C} \rho}{L} \right)^2 = \pi^2 E \left(\frac{\rho}{L'} \right)^2 \quad (1-5)$$