弹塑性稳定理论

梁炳文　胡世光　编

国防工业出版社

弹塑性稳定理论

梁炳文　胡世光　编

国防工业出版社

内容简介

本书由两部分组成：第一部分为受压失稳理论；第二部分为受拉失稳理论。在第一部分中，主要介绍立柱的临界载荷；稳定问题的基本原理与解题方法；薄板的基本理论；环、曲杆、管和曲板条的稳定问题；薄板的失稳；薄壁管筒的稳定性；板与壳的塑性失稳；压延失稳问题；几种板金件受压及成形失稳问题；扭转失稳的变分解法。在第二部分中，主要介绍分散性失稳；集中性失稳；厚向异性对拉伸变形稳定性的影响；板料拉伸变形的成形极限。

本书可供科研人员、高等院校教师、研究生、大学生、其他有关的工程技术人员参考。

弹塑性稳定理论

梁炳文　胡世光　编

责任编辑　余发棣

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$850\times1168^{1}/_{32}$　印张$12^{1}/_{4}$　310千字

1983年11月第一版　1983年11月第一次印刷　印数：0,001—4,000册

统一书号：15034·2541　　定价：1.80元

序

本书分为两部分。第一部分为受压失稳理论，第二部分为受拉失稳理论。其中着重阐述板金类零件在成形及使用中的变形稳定性问题。

过去提到失稳问题，一般都是指的受压失稳，但受拉失稳问题，近十余年来，也日益受到重视。从失稳的意义来看，两者本质上有共同之处，都用到求载荷极值的概念，即把方程 $\partial P/\partial\delta=0$，作为判定开始失稳的条件。不过在受压失稳中，把失稳载荷称为临界载荷，在受拉失稳中，把该载荷称为极限载荷而已，其实都是指的稳定状态的最大载荷。对简单零件而言是如此。对于复杂的零部件，两者都有在局部失稳后，将续加的载荷转移到其余稳定部分的性质，这时往往需要求局部失稳与整体失稳两种载荷。

当然，受压与受拉失稳，也有不同之处。例如受压失稳是刚度问题，其主要影响因素是刚度参数。受拉失稳是强度问题，其主要影响因素是强度参数。受压失稳，弹塑性兼而有之，受拉失稳则完全限于塑性范围。此外，失稳现象也迥然不同；在理论处理方法上，也有差异。

在使用中，受压和受拉是两个主要受力方式。在成形中更是如此。如板金件的弯曲和翻孔极限值，主要受材料拉伸性能的限制，内外起皱则完全是受压变形引起的。在性质复杂的成形工序例如压延中，两种失稳现象兼而有之：凸缘的收缩，受失稳起皱的限制；筒壁的传拉能力，受危险断面失稳颈缩的限制。总之，拉、压变形的稳定性，是板金件在成形及使用中所面临的两个重要问题。

但是，目前对于受拉失稳，并没有受到应有的重视。如讲强度问题的文献和专著很多，但多限于受拉失稳点即开始发生颈缩这个门槛之前。目前讲材料破坏问题的文献也不少，又皆限于颈缩发展终了这个门槛之后。而对颈缩本身的发生发展问题，却较少研究。部分原因是由于强度问题多属弹性范围，即远在颈缩开始之前。而一旦破坏，即已远远超过开始颈缩之后了。在构件上也往往难以看到颈缩的痕迹。但在板金成形中却不是这样，因为板金成形是零件的一个定形过程，其指定的变形范围都在开始屈服之后和破坏之前，往往会在成形零件或半成品上，保留颈缩的痕迹。这虽不妨碍特定成形工序的完成，却会影响后续工序的顺利完成和零件的使用，因而对于颈缩即受拉失稳，在对材料成形极限的研究中，具有重要意义。编者有鉴于此，认为将受压及受拉失稳理论放在一起，加以有系统地阐述，是有必要的。由于编者水平有限，遗漏谬误之处在所难免，还望读者予以指正，以便修正提高。

编　者

目　录

第一部分　受压失稳理论

第二部分 板料塑性变形的拉伸失稳理论

第一部分　受压失稳理论

引　言

由板金件（板、管、型材等）构成的板壳结构，例如飞机及火箭等，在成形过程中以及受载情况下，都有稳定性问题。在成形过程中，成形的方法虽然多种多样，但基本方式不外“放”和“收”两种形式。所谓“放”就是在外力作用下，毛料被延伸，甚至断裂破坏，是强度问题。所谓“收”就是在外力作用下，毛料被压缩，因而失稳起皱，是刚度问题。

板金件及板壳结构，受力情况不外拉、压、弯、扭四种形式。压与弯有受压失稳问题。在纯剪中也有压应力分量存在。有压应力分量存在的板壳结构，都有可能发生失稳问题。在胀力作用下的一些薄壳结构，像扁圆皿器，其赤道部分也会由于引起周向压应力而失稳起皱。

论述强度问题的专著与专题报告资料，是相当丰富的，谈稳定性问题的书刊资料比较少。有关稳定性问题的论著中，研究弹性稳定问题的多，而研究塑性稳定的，尤其是生产中的稳定问题，就较少了。这些塑性稳定专题报告，散落在一些文献中，往往只局限于讨论具体问题，不涉及基本原理。

弹性及塑性稳定问题的求解，其基本原理和方法是相同的。弹性稳定问题的解，往往可以用来解决塑性稳定问题。但塑性稳定问题有其独特之处，如板金加工中出现的稳定问题，主要是塑性失稳问题。但两者的共同点是主要的。为此，本书将弹性及塑性稳定问题，加以系统化，先从基本原理开始，然后分析各种典型的弹性及塑性稳定问题。

本部分共十章。前三章阐述稳定问题的基本原理与处理问题的基本方法，这对弹性及塑性稳定问题，都是共同的基础。第三

章是板与壳的基本理论，是分析弹性及塑性稳定问题所常用的一些平衡方程，是力、弯矩与变形功等的表达式。第四、五、六章是板、曲条、环与薄壁管筒的弹性稳定问题，可以用来解决同类的塑性问题。第七、八、九章主要是对塑性稳定问题的分析，论及各种受力构件的稳定性，更多的是在板金加工中所常见的问题，如压延、橡皮压制及旋压失稳等问题。在各种具体题例中，受压弯曲是失稳的主要表现形式，但有些已经牵涉到扭转现象；宇航结构中常用的薄壁型材，如薄壁梁、压延件的失稳，就是这样。第十章集中分析了开口管筒及各种型材在轴向载荷下的扭转现象，分析了失稳的作用与相应的计算方法。最后一篇是附录，讨论了立柱与薄板失稳问题，弹性与塑性失稳问题。在附录里还列举了一些常用的简易公式和数据。

本书既着重对原理的阐述与重要方程的推导，又注意收集典型例子与有用的数据。

第一章　立柱的临界载荷

苏

§1-1　立柱受压折损的类型

立柱在受压以后，缩短的数值与外力的增量成正比；与外力保持平衡的内力，即平衡力，亦即立柱的抵抗力。如果外力增加太快，则抵抗力与外力失去平衡，将像弹簧那样发生振动现象，这一点在下面再讨论。现在只讨论逐渐增加的外力与变位的关系。

立柱受力后，产生应力，其值与立柱的变形情况、弹性模数及尺寸大小等有关。

首先讲理想立柱，即（1）绝对直的；（2）材料绝对均匀；（3）外力作用线正通过各横剖面的重心。这种立柱的平衡力与变位的关系，如图1-1中的曲线A所示。在比例限度内，即01段，是一条直线，和材料实验所得的曲线相同。超过了这个限度，即产生塑流现象；起初外力增加慢，变位增加快。但后来由于立柱变粗，平衡力增加快，变位增加慢。这种现象，除立柱变粗的原因外，还有应变刚●的原因。

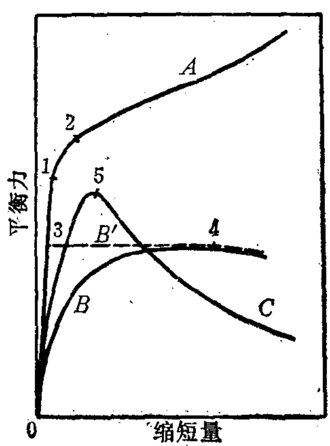

图　1-1

以上是指韧性材料而言。至于脆性材料，塑流程度有限，如

● 硬度主要是应力应变曲线上点的位置高低的标志，即硬度与强度有密切关系。而刚度则与曲线的斜率有关。故应变刚比冷作硬化更能确切说明材料随应变增加而强化的趋势。

到2点，就损坏了。所以在各种薄板结构中，一般不用脆性材料。

但实际上立柱不会压缩到破坏而不弯曲。因为：（1）立柱本身的轴线可能就不是直的；（2）外力不一定正好加在重心线上；（3）材料不均匀，各剖面应力的合力作用线，不与几何重心线重合又因各剖面力矩不同，又产生了剪力。如果这些剪力的合力不通过剪心，又会使立柱发生扭转。这样立柱不仅受到了压力，又受到弯矩与扭矩。

短立柱压应力在各剖面是均布的，立柱的损坏，都是由于塑流的关系。

长立柱受压后有弯曲，如曲线B所示。愈趋近理想状态，该曲线亦愈趋近034的曲折线，即A与B'的综合曲线。因理想的长立柱，在一定限度（即点3）内是一条直线。如受到很小的侧力，立柱弯曲，侧力去后，仍能恢复原形。但稍为超过点3就不行了，这时即使受到极其微小的侧力，就会弯曲；如果载荷不减小，即使将侧力去掉，弯曲程度还照样沿3-4线继续增加。即使抗压应力达到无限大也要继续弯曲。立柱这种折损，是由于弹性不稳定的缘故。理想立柱的最大载荷，只能到达3-4线，故实际立柱不能超过这个限度。因为弯曲关系，一边的压应力超过了屈服点后，发生塑流现象，平衡力不但不因变位的增加而增加，反而减小，如点4所示。故一般立柱的设计，3-4线的高度与屈服点，都不能超过点3的数值，该数值称为临界载荷。这一点的高低，与材料的强度无关，只与弹性模数和惯性矩有关，称弹性失稳折损。

常用的立柱其性质如曲线C所示。其变位也和长柱一样，既有缩短，又有弯曲。但在弯曲还未到达很显著的程度以前，一边的应力已超过了屈服点，发生塑流现象，抵抗力减少。如外力不减小，就会突然折损。这种折损，称塑流失稳折损。因为和短柱的折损原因相同，所以还属于短柱折损类型。

以上所谈都是实心立柱。对于板件，受压力后，常会部分的

发生弹性失稳现象，因而起皱或扭转，将其载荷传递给其他部分来承受，有扩大折损范围的趋势。故对于薄板件，应避免发生局部失稳。在规定的载荷下，还应避免发生整体的折损。

§1-2 用力的平衡式求临界载荷

求受压失稳的临界载荷，一般有两种方法。一种是用力的微分平衡式，直接求解；另一种是用能量法求解。本节先讲用力的平衡关系求解的方法。

上节曾提到理想立柱，当压力在一定限度内，如受很小的侧力作用，就会弯曲；但侧力去掉后，仍恢复直立状态。超过这个限度，如稍有弯曲，就继续弯曲不止。介于这两种状态之间的，是中立状态，在这种状态下，给它任何曲度，都能保持平衡。因为这时载荷稍有增加，即失去平衡，这种载荷称为临界载荷，长柱的最高载荷，是判断立柱稳定与否的依据。

一个立柱如图 1-2 所示，下端是固定的，上端是自由的。当 P 的数值逐渐增加到某一个数量时，设有侧力使其摆动 δ 的距离；如果侧力去掉后，仍保持这种状态，则 P 之值即是临界值。而图 1-2 所示的，正是这种状态。可以根据这种状态，写出以下方程式：

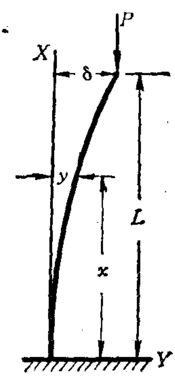

图 1-2

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=P(\delta-y)。 \tag{a}$$

立柱的弯曲方向，当然是在 EI 最小的一侧。设 $j^2=EI/P$，则式（a）变为：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{j^2}y=\frac{1}{j^2}\delta。 \tag{b}$$

由式（b）解得：

$$y=\delta+C_1\cos\frac{x}{j}+C_2\sin\frac{x}{j}。 \tag{c}$$

当$x=0$时，$y=0$，$\frac{dy}{dx}=0$，解得$C_1=-\delta$，$C_2=0$。故得

$$y=\delta\left(1-\cos\frac{x}{j}\right)。\tag{d}$$

当$x=L$时，$y=\delta$，这只有使$\cos\frac{L}{j}=0$，式（d）才能成立，因而

$$\frac{L}{j}=(2n+1)\frac{\pi}{2}。\tag{e}$$

n为整数；L/j的最小值，亦即P的最小值，是令$n=0$，故

$$\frac{L}{j}=L\sqrt{\frac{P}{EI}}=\frac{\pi}{2}。$$

得

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{4L^2}。\tag{1-1}$$

如$n=1$，则

$$P_{cr}=\frac{9EI\pi^2}{4L^2},$$

这是图1-3（a）所示的情形。

如$n=2$，则

$$P_{cr}=\frac{25EI\pi^2}{4L^2},$$

这是图1-3（b）所示的情形。

如果立柱侧面没有支承力来限制其变形状态，是不会发生如图1-3（a）和（b）的情况的。故式（1-1）即是图1-2所示立柱的临界载荷。

两端铰接的立柱，如图1-4（a）所示，$L/2$相当图1-2的立柱整长，故其临界载荷为：

$$P_{cr}=\frac{EI\pi^2}{L^2}。\tag{1-2}$$

式（1-2）是最基本的立柱方程。如果两端都是固定的，如图

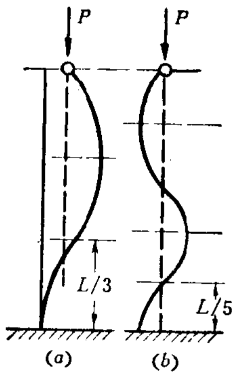

图 1-3

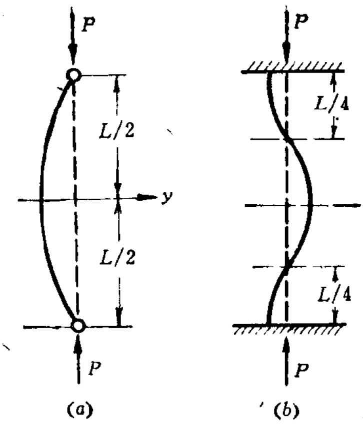

图 1-4

1-4（b）所示，这里$L/4$相当图 1-2 的整长，故其临界载荷为：

$$P_{cr}=\frac{4\pi^2EI}{L^2}。\tag{1-3}$$

由以上这些方程可以看出，长柱的临界载荷只与EI有关，与材料的强度无关。可用铁作长立柱，而不必用钢，因为铁和钢的E值，相差有限。

临界载荷最初由尤拉所求得，故又叫尤拉载荷，其基本方程可写成：

$$P_{cr}=\frac{C\pi^2EI}{L^2}。\tag{1-4}$$

两端铰接时，$C=1$；一端自由一端固定时，$C=1/4$；两端固定时，$C=4$。固定性大的，C值亦大，C又叫固定系数。在实际结构中，立柱两端，没有完全铰接的，也没有十分固定的。C值很难确定；为安全计，C值最大为 2，最小为 1。

临界应力由式（1-4）可写成：

$$\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=\pi^2E\left(\frac{\sqrt{C}\,\rho}{L}\right)^2=\pi^2E\left(\frac{\rho}{L'}\right)^2。\tag{1-5}$$