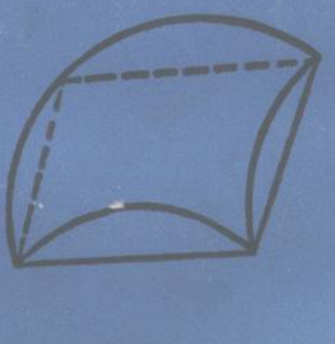
结构力学的样条函数方法

秦荣 著



广西人民出版社

结构力学的样条函数方法

秦 荣 著

广 西 人 民 出 版 社

结构力学的样条函数方法

秦 荣 著

☆

广西人民出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行 广西民族印刷厂印刷
*
开本850×1168 1/32 15.125印张 402千字
1985年12月第1版 1985年12月第1次印刷
印数：1－2,500册
书号：13113·40 定价：3.45元

内 容 简 介

本书阐述结构力学的样条函数方法，共十二章。内容包括：样条函数的基本原理及基本方法，样条有限点法，样条有限元法，样条子域法，样条配点法，样条矩量配点法，样条伽辽金配点法，样条最小二乘配点法，样条能量配点法，样条子域配点法，样条边界元法，结构振动，结构稳定性，结构动力反应问题的样条函数方法及扇形薄板的样条函数方法。书中既有理论分析，又有实际应用。大量计算结果证明，结构力学的样条函数方法是结构分析的有力工具，它们不仅适用于结构的静力分析，也适用于结构的稳定分析和动力分析。

本书对固体力学专业、结构力学专业、计算力学专业、土建专业、水建专业、桥梁专业、航空专业、造船专业以及工科有关专业的研究生、高年级大学生及教师、研究人员、工程技术人员都适用。同时对从事流体力学、传热学、计算数学、计算物理工作的有关人员也有参考价值。

目　录

前　　言

样条函数是现代函数逼近的一个十分活跃的分支，是计算方法的一个重要基础，应用很广泛，可以利用它创造出一些新的结构分析方法。

目前，有限元法是结构分析的一个有力工具，但也有缺点，对于规则区域的结构，有限元法的解题效率不如差分法，工作量很大；有些问题用有限元法也难以解决。显然，需要另外创造一些新的数值方法，因此又产生了有限条法、边界元法、样条函数方法以及新的加权残数法。近几年来，作者在这方面做过一些研究工作，把样条函数与变分原理、加权残数法、拉格朗日乘子法及边界积分方程结合起来，提出了一些新的计算方法，如样条有限点法、样条加权残数法、样条能量配点法、样条子域法及样条边界元法。这些方法对于规则区域的结构，解题比有限元法方便，效率高，而且样条边界元法对任意区域的结构都适用，能解决有限元法难以解决的问题。它们不仅适用于结构的静力分析，也适用于结构的稳定分析和动力分析。这些方法应用方便，采用电子计算机进行计算时，编制程序简单，输入数据少，内存少。解题时对电子计算机要求不高，一般中小型计算机就能满足，适应小机解大题，精确度比较高，能符合工程上的要求。因此，这些方法对结构分析是一些经济有效的数值方法。

本书以弹性结构为例来介绍样条函数方法的原理及其应用，共有十二章。第一章主要介绍B样条函数一些基本的理论及方法，作为掌握本书所述方法的一个基础。

第二章主要介绍样条有限点法，一个方向用B样条函数，另一个方向用正交函数。除了介绍基本原理以外，还以薄板、双曲扁壳、圆柱薄壳、考虑剪切变形的板、斜板及深梁为例，介绍这

个方法的实际应用。本法对非规则结构的分析也可以用。

第三章主要介绍样条有限元法，两个方向都用B样条函数。除了介绍基本原理外，还以板壳及弹性地基梁板为例介绍这个方法的实际应用，并介绍了如何建立半平面体和半空间体的地基刚度矩阵。

第四章主要介绍样条子域法的基本原理及应用。这个方法既有样条有限元法和样条有限点法的优点，又有普通有限元法和有限条法的特点。实际上，有限条法是单样条子域法的特例，矩形单元及扇形单元的有限元法是双样条子域法的特例。样条子域法对于连续板、变厚度板、带孔板、箱型桥板、组合结构、剪力墙结构、筒体结构、非规则板壳以及拱坝的计算都很方便。

第五章主要以板壳为例介绍样条加权残数法的基本原理及应用。这个方法不依赖变分原理，对泛函未知的问题仍能解题，并且用来解非线性力学问题也比有限元法经济。

第六章主要以板壳为例介绍结构振动分析的样条有限点法，它是结构振动分析的一个经济有效的数值方法。

第七章主要介绍求结构动力反应的样条函数方法。这个方法的应用效果很好。

第八章主要以板壳为例介绍结构稳定分析的样条有限点法，并利用正交条件进行简化计算，效果很好。

第九章主要以板壳为例介绍样条边界元法的原理及其应用。这个方法对任意区域的结构都适用，能解决有限元法难以解决的问题。

第十章主要以扇形薄板为例介绍求解极坐标中各类问题的样条函数方法。这些方法对圆柱薄壳、圆锥形薄壳及旋转薄壳的分析也很方便。利用这个方法可以建立样条三角形子域。

第十一章介绍了一个求解非规则区域板壳的分析方法。

第十二章主要介绍样条函数方法的收敛性。

本书取材主要是作者自己的研究成果。这些成果大多数在国际、国内学术会议上宣读过，或在国际学术会议论文集或在全国

学术会议论文集或在全国学术刊物上发表过，反应很好，有的还获得优秀科研成果奖。

这些样条函数方法，不仅适用于建筑结构、桥梁结构、水利水电工程结构，同时对机械、造船、航空、化工、矿山及国防各方面的力学分析也适用。

为了便于推广使用，这本书尽量避免引入高深的数学，对有关的数学定理不从数学观点出发去证明，而从力学观点出发去旁证，强调应用，尽量采用一些简化的措施和方法。

在本书的写作出版过程中，得到国内许多老前辈和同志们的热情关怀和大力支持，我校计算力学专业研究生林肇信、苏华晶两位同志为本书制作全部插图，现借此机会一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，时间仓促，错误和缺点在所难免，请读者帮助指正。

秦　荣

1983年9月于广西大学

第一章 样 条 函 数

样条函数是现代函数逼近的一个十分活跃的分支，是计算方法的一个重要基础。它应用很广泛，对计算力学和计算数学的发展有着很重要的作用。那么，什么叫做样条函数呢？

§1.1 样条函数的概念

样条函数来源于实际中的样条曲线。这一节我们从梁的微分方程出发来定义样条函数。

梁的微分方程为

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = q(x) \tag{1.1}$$

式中 $q(x)$——梁上的分布荷载；

w——梁的挠度函数。

梁上荷载 q 与剪力 Q 有下列关系

$$q = \frac{dQ}{dx}$$

现以悬臂梁为例，如果悬臂梁在 $x = 0$ 处受一个单位集中荷载 ($P = 1$) 作用(图1.1)，则这个梁的剪力方程为

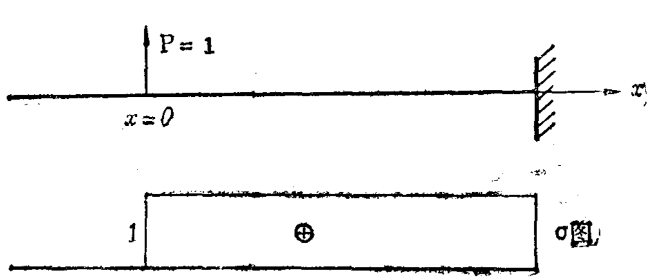


图 1.1

$$\sigma(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0 \text{ 时}\\ 1, & \text{当 } x>0 \text{ 时}\end{cases} \tag{1.2}$$

在 $x=0$ 处的左极限为零，右极限为 1 。因此，这个悬臂梁的剪力图在集中荷载作用点($x=0$)发生一个突变。描述这种突变现象的函数 $\sigma(x)$ 叫做单位跳跃函数。 $x=0$ 是 $\sigma(x)$ 的间断点。

如果悬臂梁在 $x=0$ 处作用一个集中荷载 P，则这个梁的剪力方程为

$$Q(x)=P\sigma(x)$$

这时，式(1.1)中的 $q(x)$ 为

$$q(x)=\frac{dQ}{dx}=P\frac{d\sigma(x)}{dx}=P\sigma'(x) \tag{a}$$

在古典意义下，$\sigma(x)$ 在 $x=0$ 处的导数不存在。但是导数是差商的极限，因此可以从研究 $\sigma(x)$ 的差商入手。

规定 $\bar{\Delta}$ 代表以步长为 h 的对称差分算子，则

$$\bar{\Delta}\sigma(x)=\sigma\left(x+\frac{h}{2}\right)-\sigma\left(x-\frac{h}{2}\right)=\begin{cases}0, & \text{当} |x|>\dfrac{h}{2}\text{时}\\ 1, & \text{当} |x|<\dfrac{h}{2}\text{时}\end{cases}$$

因此，$\sigma(x)$ 的差商为

$$\delta_h(x)=\frac{\bar{\Delta}}{h}\sigma(x)=\begin{cases}0, & \text{当} |x|>\dfrac{h}{2}\text{时}\\ \dfrac{1}{h}, & \text{当} |x|<\dfrac{h}{2}\text{时}\end{cases}$$

当 h 趋于零($h\longrightarrow 0$)时，上式便变为

$$\delta(x)=\sigma'(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}\\ \infty, & \text{当 } x=0 \text{ 时}\end{cases} \tag{1.3}$$

这就是 $\sigma(x)$ 对 x 的导数。$\delta_h(x)$ 和 $\delta(x)$ 的图形如图 1.2 所示。

因为在古典意义下，$\sigma'(x)$ 在 $x=0$ 处没有意义，因此式(1.3) 是一种形式导数。这个导数叫做狄拉克 (Dirac) 的 δ 函

数。由此可知，δ函数是单位跳跃函数的广义导数。考虑到微分与积分互为逆运算，则δ(x)的积分为

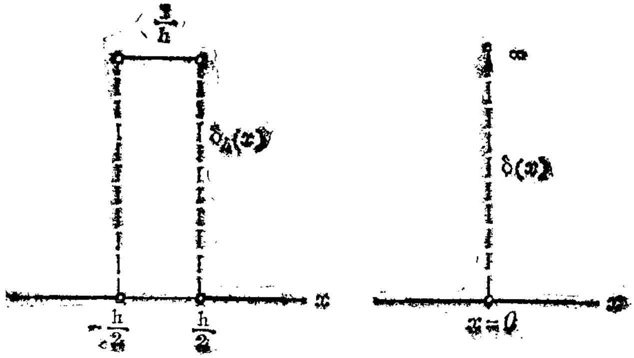


图 1.2

$$\sigma(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(x)dx \tag{1.4}$$

把式(1.4)代入式(a)便得

$$q(x)=P\delta(x) \tag{b}$$

由此可知，如果梁上作用几个集中荷载(图1.3)，则

$$q(x)=\sum_{i=1}^{N-1}P_i\delta(x-x_i)$$

这时梁的剪力方程Q(x)是一个按段为常数的阶梯函数(图1.3)，即

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{N-1}P_i\sigma(x-x_i)$$

其中 x_i 为Q(x)的间断点。在间断点处，Q(x)的左、右极限都存在，但不相等。它们之差叫做剪力的跳跃量，即

$$[Q(x_i)]=Q(x_i+0)-Q(x_i-0)=P_i$$

式中 $$\sigma(x-x_i)=(x-x_i)_+^0=\begin{cases}1, & 当x-x_i>0\\0, & 当x-x_i<0\end{cases}$$

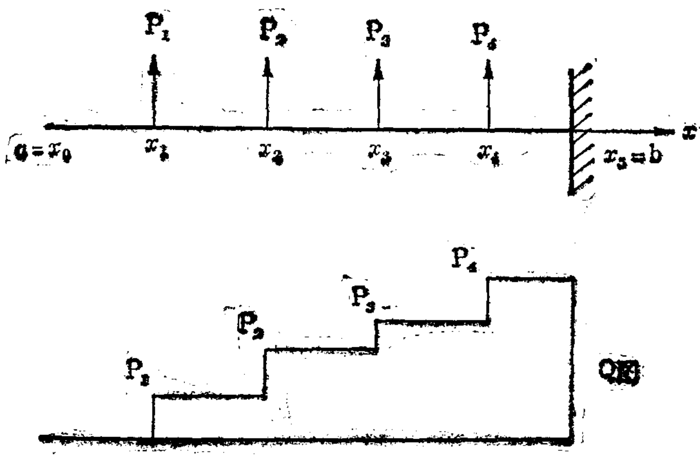


图 1.3

设 $EI=1$，$w=S(x)$，则式(1.1)便变为

$$S^{(4)}(x)=\sum_{i=1}^{N-1}P_i\delta(x-x_i) \tag{1.5}$$

式中$S^{(4)}(x)$是$S(x)$对x的四阶导数。P_i向上为正，向下为负。

式(1.5)是一个四阶常微分方程，它的一般解为

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2/2!+a_3x^3/3!+\sum_{i=1}^{N-1}b_i(x-x_i)_+^3/3! \tag{1.6}$$

式中，$b_i=P_i$；$(x-x_i)_+^n$称为截断单项式，对于任一正整数n，定义为

$$(x-x_i)_+^n=\begin{cases}(x-x_i)^n, & 当\ x-x_i\geqslant 0\\ 0, & 当\ x-x_i<0\end{cases} \tag{1.7}$$

如果以悬臂梁全跨为给定区间[a，b]，则式(1.6)有下列性质：

（1）在每个子区间(x_i, x_{i+1})上，它是三次多项式。

（2）$S(x)\in C^2(-\infty,\infty)$；这里$C^2(-\infty,\infty)$表示整个实轴

上具有二阶连续导数的全体函数的集合，符号∈表示属于的意思。

（3）在 x_i 处，$S(x)$的三阶导数的左、右极限存在，但不相等，它们之差为

$$b_i = S^{(3)}(x_i + 0) - S^{(3)}(x_i - 0)$$

式中 b_i 称为 $S(x)$在 x_i 处三阶导数的跳跃量。

（4）当 $b_i = 0$（$i = 1, 2, \cdots, N - 1$）时，则式(1.6)就退化为普通的三次多项式。

因此，式（1.6）与普通的三次多项式不同，是一个分段光滑函数。根据这些特性，人们提出一个样条函数。

样条函数在数学上有严格的定义：对于给定区间$[a, b]$的一个分划

$$\Delta: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_N = b$$

如果 $S(x)$满足下列条件：

（1）$S(x)$在每个子区间(x_i, x_{i+1})是 n 次多项式；

（2）$S(x)$及其 1，2，…，$(n-1)$阶导数在$[a, b]$上连续，

则称 $S(x)$是对应于分划Δ的 n 次多项式样条函数，简称 n 次样条函数。其中 x_i 称为样条结点。

由上述可知，式(1.6)是一个三次样条函数。因此在集中荷载作用下，梁的挠度函数就是我们定义的三次样条函数。

前面，对给定区间$[a, b]$的一个分划，我们由四阶微分方程(1.5)建立了三次样条函数。由此可知，对于给定区间$[a, b]$的一个分划Δ，我们由 $n+1$ 阶微分方程

$$S^{(n+1)}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} b_i \delta(x - x_i) \tag{1.8}$$

可以建立 n 次样条函数，即

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^k}{k!} + \sum_{i=1}^{N-1} b_i (x - x_i)_+^n / n! \tag{1.9}$$

式(1.9)有下列性质：

（1） 在每个子区间(x_i, x_{i+1})上它是n次多项式。

（2） $S(x) \in C^{n-1}(-\infty, \infty)$。这里$C^{n-1}(-\infty, \infty)$表示整个实轴上具有$n-1$阶连续导数的全体函数的集合。

（3） $S^{(n)}(x)$在x_i点的左、右极限存在，但不相等，有跳跃量：

$$[S^{(n)}(x_i)] = S^{(n)}(x_i+0) - S^{(n)}(x_i-0) = b_i \tag{1.10}$$

式中 $S^{(n)}(x)$是$S(x)$对x的n阶导数。

（4） 当$b_i = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, N-1)$时，则式（1.9）退化为普通的$n$次多项式。

因此，式(1.9)符合样条函数的定义，是一个n次样条函数。由于样条函数是一个分段多项式，利用这样的函数去逼近任意函数，自然具有更大的灵活适应性，使许多问题获得了满意的解决。

样条函数也可以利用基本样条函数的线性组合来构造，即

$$S(x) = \sum_{i=-P+1}^{N+P-1} C_i \varphi_n\left(\frac{x}{h} - i\right)$$

式中C_i是样条结点参数，$P = (n+1)/2$，$\varphi_n\left(\frac{x}{h} - i\right)$是$n$次基本样条函数，简称$B$样条函数。

在计算力学中，利用B样条函数来构造位移函数及应力函数是一个行之有效的方法。利用B样条函数可以创造出新的计算方法，因此本书着重阐述B样条函数方法。

§1.2 B样条函数的构造方法

如何构造B样条函数呢？因为样条函数与δ函数有着密切的内在联系，因此我们可以利用δ函数来构造B样条函数。为此，先介绍一些δ函数的性质。

（一）δ 函数的一些性质

（1） δ函数是一个偶函数，即$\delta(-x) = \delta(x)$。