# Banach空间结构理论

赵俊峰 著

Banach空间理论是现代泛函分析最重要的组成部分。目前Banach空间理论的研究相当活跃，引出许多新的研究方向。Banach空间结构理论是其重要的研究方向之一。

武汉大学学术丛书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY

武汉大学出版社

# Banach 空间结构理论

赵俊峰　著

国家自然科学基金资助项目
高等学校博士学科点专项科研基金资助课题

武 汉 大 学 出 版 社
1991

EN88/07

Banach空间结构理论

赵俊峰 著

*

武汉大学出版社出版
(430072 武昌 珞珈山)
新华书店湖北发行所发行
武汉正加数据处理部文字处理
武汉大学出版社印刷总厂印刷

*

850×1168毫米 1/32 15.5印张 插页2 400千字
1991年12月第1版 1991年12月第1次印刷
印数:1—2200(内含精装200册)
ISBN 7-307-01139-5/O·94(平)
ISBN 7-307-01140-9/O·95(精)
定价:(平) 7.60元
(精) 10.00元

# 序　言

这本书是作者在 1985 年—1990 年期间六次为武汉大学数学系研究生、华中师范大学数学系研究生及云南大学数学系泛函研究生班授课讲稿基础上形成的. Banach 空间结构理论是近代泛函分析活跃发展的分支之一，内容十分丰富. 为了反映这一分支发展的脉络和核心内容，本书在研究经典 Banach 空间和具体 Banach 空间结构性质和几何性质的基础上，在本人多年研究工作的基础上，着意从经典 Banach 空间和无穷维 Banach 空间结构的关系上来刻画一般的 Banach 空间，用有限维子空间与无穷维子空间的特殊联系来刻画一般的 Banach 空间.

本书由四部分组成. 第一部分（第一章）是本书的预备知识，介绍泛函分析中一些重要的概念和结果. 第二部分（第二章和第三章）包括 Banach 空间的基理论、Banach 空间结构的三分法问题、$c_0$-副本、$l_p$-副本、Banach 空间类的序结构、Banach 空间的自同构、延拓性质、提升性质和 $C(K)$空间的几何结构等. 第三部分（第四章）反映新近发展起来的 Banach 空间的局部理论，包括局部自反原理、Banach-Mazur 距离、Banach 空间的型与余型、Banach 空间的 $w$-型与 $w$-余型以及新的一类 Banach 空间——弱 Hilbert 空间等. 书的末尾有两个附录，附录 1 提供一些拓扑工具，附录 2 关于 Banach 空间子空间结构研究的若干重要问题的最新结果和最新文献，使读者能够尽快地接近这一课题的前沿.

在写作过程中与林伯禄(B. L. Lin)，P. Casazza 和 A. Pelczynski 等泛函分析学者的讨论给本人很大的启发. 另外还参考了 J. Lindenstrauss & L. Tzafriri 的"Classical Banach Spaces Ⅰ，Ⅱ"，I. Singer 的"Bases in Banach Spaces Ⅰ，Ⅱ"，G. Pisier 的"The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry"以 Nicole Tomczak-Jaegermann 的"Banach-Mazur Distance and Finite Dimensional Operator Ideals"等著作，丰富了本书的内容. 作者还得到了武汉大学李国平教授，复旦大学严绍宗教授及南京大学马吉溥教授的支持和鼓励.

由于笔者水平和条件所限，加之该领域内容博大，许多专题没有涉及，例如 Banach 空间的同构理论，$p$-和算子理论和弱紧生成空间等. 缺点和不足之处在所难免，敬请读者批评指正.

**赵俊峰**

于武汉大学 1991 年 6 月

# 目　录

# 第一章　预备知识

## §1　Banach 空间中的紧集构造，Eberlein-Šmulian 定理和 Helly 定理

我们从介绍大家熟悉的且在泛函分析中有着广泛应用的 Riesz 引理开始，进而讨论近年来对这一定理深化的结果.

设 $X$ 是赋范线性空间. 用 $S_X$ 表示单位球面，即 $S_X=\{x\in X;\ \|x\|=1\}$；用 $B_X$ 表示闭单位球，即 $B_X=\{x\in X;\ \|x\|\leqslant 1\}$；用 $U_X$ 表示开单位球，即 $U_X=\{x\in X;\ \|x\|<1\}$. 如果 $E$ 是 $X$ 的子集，用 $\operatorname{span}E$ 表示 $E$ 中元素的有限线性组合的全体，$[E]$ 表示 $\operatorname{span}E$ 的闭包.

1. **Riesz 引理**(F. Riesz, 1918)　设 $Y$ 是赋范线性空间 $X$ 的闭线性真子空间. 设 $0<\varepsilon<1$. 则存在 $x_\varepsilon\in S_X$，使得对于每个 $y\in Y$，

$$\|x_\varepsilon-y\|>\varepsilon.$$

**证明**　任取 $x\in X\backslash Y$. 因为 $Y$ 是闭的，所以由 $x$ 到 $Y$ 之间的距离 $d$ 是正的，即

$$0<d=\inf\{\|x-y\|;\quad y\in Y\}<\frac{d}{\varepsilon}.$$

因此，存在一元素 $y_0\in Y$ 使得 $\|x-y_0\|<\frac{d}{\varepsilon}$. 令 $x_\varepsilon=\frac{x-y_0}{\|x-y_0\|}$. 显然 $x_\varepsilon\in S_X$. 如果 $y\in Y$，则

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon-y\|&=\left\|\frac{x-y_0}{\|x-y_0\|}-y\right\|\\&=\left\|\frac{x}{\|x-y_0\|}-\frac{y_0}{\|x-y_0\|}-\frac{\|x-y_0\|y}{\|x-y_0\|}\right\|\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\| x-y_0 \|} \| x-y_0- \| x-y_0 \| y \|$$

$$= \frac{1}{\| x-y_0 \|} \| x-(y_0+ \| x-y_0 \| y) \|$$

$$> \frac{\varepsilon}{d} d=\varepsilon \quad (\text{因为} (y_0+ \| x-y_0 \| y_0) \in Y). \qquad \square$$

作为这一引理的直接结果，有下列定理.

**2. 定理** 赋范线性空间 $X$ 的每一个有界闭集是紧的当且仅当 $X$ 是有限维空间.

**证明** 假设 $X$ 的维数是 $n(<\infty)$. 则 $X$ 同胚于 $n$ 维欧氏空间 $l_2^n$. 由经典的 Heine-Borel 定理得知 $X$ 中任意有界闭集是紧的.

反之，假设 $X$ 是无穷维空间. 单位球面 $S_X$ 虽然是有界闭集但不是紧集. 事实上，对于任意 $\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, 可以找到序列 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset S_X$ 使得 $\| x_m - x_k \| > \varepsilon, m \neq k, m, k=1,2,\cdots$. 首先取 $x_1 \in S_X$, 令 $M_1 = \text{span}\{x_1\}$. 显然 $M_1$ 是 $X$ 的闭的真子空间. 由 Riesz 引理知存在 $x_2 \in S_X$ 使得 $\| x_2 - x_1 \| > \varepsilon$. 令 $M_2 = \text{span}\{x_1, x_2\}$. 显然 $M_2$ 是 $X$ 的闭的真子空间. 由 Riesz 引理存在 $x_3 \in S_X$ 使得 $\| x_3 - x_2 \| > \varepsilon$ 及 $\| x_3 - x_1 \| > \varepsilon$. 依此下去所得之序列便为所求. $\square$

**注** Riesz 引理也以如下方式叙述：

**Riesz 引理'** 设 $Y$ 是赋范线性空间 $X$ 的闭线性真子空间. 则对任何 $\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, 存在 $x \in S_X$ 使得 $\rho(x,Y) \geq \varepsilon$, 其中

$$\rho(x,Y) = \inf\{ \| x - y \| ; y \in Y\}.$$

C. A. Kottman 把 Riesz 引理向前大大推进了一步.

**3. 定理**(C. A. Kottman[263], 1975) 设 $X$ 是无穷维赋范线性空间. 则在 $S_X$ 中存在序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得当 $m \neq n$ 有 $\| x_m - x_n \| > 1$.

**证明** 任取 $x_1 \in S_X$, 由 Hahn-Banach 定理知存在 $x_1^* \in S_{X^*}$ 使得

$$x_1^*(x_1) = 1.$$

假设 $x_1^*, \cdots, x_k^*$ (线性无关且 $x_i^* \in S_{X^*}, i=1,2,\cdots,k$) 和 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ ($x_i \in S_X, i=1,2,\cdots,k$) 已经取定. 选取 $y \in X, y \neq 0$ 使得 $x_i^*(y) < 0, i=1,2,\cdots,k$. 任取一非零元素 $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \ker x_i^*$ ($\ker x_i^* = \{x \in X;$

$x_i^*(x)=0\}$),并选取 $K>0$ 充分大使得

$$\|y\| < \|y+Kx\|.$$

那么对于 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*$ 的任一非平凡线性组合 $\sum_{i=1}^k a_i x_i^*$ 有

$$\left|\sum_{i=1}^k a_i x_i^*(y+Kx)\right| = \left|\sum_{i=1}^k a_i x_i^*(y)\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^k a_i x_i^*\right\| \|y\|$$
$$< \left\|\sum_{i=1}^k a_i x_i^*\right\| \|y+Kx\|.$$

令 $x_{k+1}=(y+Kx)/\|y+Kx\|$,显然 $x_{k+1}\in S_X$. 由 Hahn-Banach 定理取 $x_{k+1}^*\in S_{X^*}$ 使得 $x_{k+1}^*(x_{k+1})=1$. 由于

$$\left|\sum_{i=1}^k a_i x_i^*(y+Kx)\right| < \left\|\sum_{i=1}^k a_i x_i^*\right\| \|y+Kx\|,$$

故 $x_{k+1}^*$ 不是 $x_1^*, \cdots, x_k^*$ 的线性组合. 如果 $1\leqslant i\leqslant k$,则

$$\|x_{k+1}-x_i\| \geqslant |x_i^*(x_{k+1}-x_i)| = |x_i^*(x_{k+1})-x_i^*(x_i)| > 1,$$

因为 $x_i^*(x_i)=1$ 和 $x_i^*(x_{k+1})<0$. □

C. A. Kottman 的这一定理在 Banach 空间局部理论的研究中有重要作用. 特别是在填球问题(Parking Problem)中扮演重要角色. J. Elton 和 E. Odell 把 Kottman 定理又向前推进一步得出了单位球面的$(1+\varepsilon)$隔离定理. 由于证明中需用其他工具,故只将定理的结论在此给出,对此定理有兴趣的读者可去查阅文献[271]和[177].

4. **定理**(J. Elton & E. Odell[177]) 设 $X$ 是无穷维赋范线性空间. 则存在一 $\varepsilon>0$ 和 $S_X$ 中一序列 $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ 使得当 $m\neq n$ 时

$$\|x_m - x_n\| \geqslant 1+\varepsilon.$$

下面的定理给出赋范线性空间的紧子集的结构. 在一定程度上反映了紧集的代数和拓扑特性.

5. **定理**(A. Grothendieck[217], 1955) 设 $K$ 是赋范线性空间 $X$ 中的紧集. 则在 $X$ 中存在依范数趋向于零的序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 使得

$$K \subset \overline{\mathrm{co}}\{0, x_1, x_2, \cdots\}.$$

**证明** 由于非零数乘运算是同胚的,故紧集 $K$ 的二倍集 $2K$

也为紧集．从而在 $2K$ 中存在有限多个点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n(1)}$ 是 $2K$ 的 $\frac{1}{4}$-网，即 $2K$ 中的每一点必在某一球 $B(x_i, \frac{1}{4})$ 中，$1 \leqslant i \leqslant n$．其中 $B\left(x_i, \frac{1}{4}\right) = \left\{x \in X;\ \| x - x_i \| \leqslant \frac{1}{4}\right\}$．考虑交集：

$$2K \cap B(x_1, \frac{1}{4}), 2K \cap B(x_2, \frac{1}{4}), \cdots, 2K \cap B(x_{n(1)}, \frac{1}{4}).$$

显然它们都是紧集．由于平移也是同胚运算．上述集合平移至原点后所得的集合：

$$\left[2K \cap B(x_1, \frac{1}{4})\right] - x_1, \left[2K \cap B(x_2, \frac{1}{4})\right] - x_2, \cdots,$$

$$\left[2K \cap B(x_{n(1)}, \frac{1}{4})\right] - x_{n(1)}$$

仍为紧集．现在令

$$K_2 = \bigcup_{i=1}^{n(1)} \left[2K \cap B(x_i, \frac{1}{4}) - x_i\right].$$

显然 $K_2$ 是紧集．那么 $2K_2$ 亦是紧集．取 $2K_2$ 中点

$$x_{n(1)+1}, x_{n(1)+2}, \cdots, x_{n(2)}$$

构成 $2K_2$ 的 $\frac{1}{4^2}$-网．把紧集

$$2K_2 \cap B\left(x_{n(1)+1}, \frac{1}{4^2}\right), 2K_2 \cap B\left(x_{n(1)+2}, \frac{1}{4^2}\right), \cdots, 2K_2 \cap B\left(x_{n(2)}, \frac{1}{4^2}\right)$$

平移至原点后得紧集：

$$2K_2 \cap B(x_{n(1)+1}, \frac{1}{4^2}) - x_{n(1)+1}, 2K_2 \cap B(x_{n(1)+2}, \frac{1}{4^2}) - x_{n(1)+2}, \cdots,$$

$$2K_2 \cap B(x_{n(2)}, \frac{1}{4^2}) - x_{n(2)}.$$

令

$$K_3 = \bigcup_{i=n(1)+1}^{n(2)} \left[2K_2 \cap B\left(x_i, \frac{1}{4^2}\right) - x_i\right].$$

显然 $K_3$ 为紧集．按照同样方式进行下去．

注意，如果 $x \in K$，那么 $2x \in 2K$．对于某一 $i(1)$，$1 \leqslant i(1) \leqslant n(1)$，有 $2x - x_{i(1)} \in K_2$，所以

$$4x - 2x_{i(1)} \in 2K_2.$$

存在一 $i(2)$，$n(1)+1\leqslant i(2)\leqslant n(2)$，有 $4x-2x_{i(1)}-x_{i(2)}\in K_3$，故

$$8x - 4x_{i(1)} - 2x_{i(2)} \in 2K_3.$$

存在一 $i(3)$，$n(2)+1\leqslant i(3)\leqslant n(3)$，有

$$8x - 4x_{i(1)} - 2x_{i(2)} - x_{i(3)} \in K_4,$$

所以

$$16x - 8x_{i(1)} - 4x_{i(2)} - 2x_{i(3)} \in 2K_4,$$

等等. 即有

$$x-\frac{x_{i(1)}}{2}\in\frac{1}{2}K_2,$$

$$x-\frac{x_{i(1)}}{2}-\frac{x_{i(2)}}{4}\in\frac{1}{4}K_3,$$

$$x-\frac{x_{i(1)}}{2}-\frac{x_{i(2)}}{4}-\frac{x_{i(3)}}{8}\in\frac{1}{8}K_4,$$

等等. 由此得到

$$x = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_{i(j)}}{2^j},$$

和 $x\in\overline{\mathrm{co}}(0,x_{i(1)},x_{i(2)},\cdots)\subseteq\overline{\mathrm{co}}(0,x_1,x_2,\cdots)$. □

这一定理说明赋范线性空间的紧子集，不论从代数的观点来看，还是从拓扑的观点来看，它都是很小的. 换言之，这个定理说明了赋范线性空间的“小性”. 定理中记号 $\mathrm{co}(E)$ 表示集合 $E$ 的点的凸组合的全体. 有时称 $\mathrm{co}(E)$ 为 $E$ 的**凸壳**.

6. Mazur **定理**　Banach 空间范数紧集的闭凸壳仍为范数紧集.

**证明**　由 W. Rudin 著《Functional Analysis》[13]定理 3.24，局部凸拓扑向量空间中全有界集的凸壳仍为全有界集. 而 Banach 空间是局部凸拓扑向量空间，定理便得证. □

这里主要引进各种弱紧性(记为 $w$-紧性)以及 Banach 空间 $w$-紧集的特征.

7. **定义**　设 $X$ 是赋范线性空间，$\{x_\alpha\}$ 是 $X$ 中的网. 如果存在

点 $x\in X$ 且对于每个 $x^*\in X^*$ 都有 $\langle x^*,x\rangle=\lim\limits_{\alpha}\langle x^*,x_\alpha\rangle$，称 $\{x_\alpha\}$ 是 **$w$-收敛的**，点 $x$ 叫做网 $\{x_\alpha\}$ 的 **$w$-极限**，且称网 $\{x_\alpha\}$ 是 $w$-收敛于 $x$. 集合 $A\subset X$ 叫 **$w$-序列紧**，如果 $A$ 中每个序列含有 $w$-收敛于 $X$ 中点的子序列. 若序列 $\{x_n\}$ 使得对于每个 $x^*\in X^*$，数列 $\{\langle x^*,x_n\rangle\}$ 是 Cauchy 序列，称 $\{x_n\}$ 为 **$w$-Cauchy 序列**. 空间 $X$ 叫做 **$w$-完备**，如果 $X$ 的每个 $w$-Cauchy 序列有极限点.

下面是一些简单性质.

**8. 命题** 赋范线性空间 $X$ 中每个 $w$-收敛网有唯一极限点.

极限点的唯一性由 Hahn-Banach 定理的推论立即得出. □

**9. 命题** 赋范线性空间的 $w$-收敛序列是有界的. 它的极限 $x\in\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}$ 而且 $\|x\|\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$.

把共鸣定理应用于由 $x_n: X^*\to\Phi$（系数域）的算子序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 上便得.

**10. 定理** 自反空间中集合是 $w$-序列紧的当且仅当它是有界的.

**证明** 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是自反空间 $X$ 中有界序列. 设 $\|x_n\|\leqslant K$，$n=1,2,\cdots$. 设 $Y=\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 由[157] Ⅰ. 3. 定理 23，$Y$ 是自反的. 从而 $Y\cong Y^{**}$ 是可分的. 由[157] Ⅰ. 3. 16 知 $Y^*$ 也可分. 设 $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $Y^*$ 中稠密. 由于 $\{y_1^*x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，存在一收敛子序列 $\{y_1^*x_{n_1,i}\}_{i=1}^{\infty}$. 由于 $\{y_2^*x_{n_1,i}\}_{i=1}^{\infty}$ 有界，存在一收敛子序列 $\{y_2^*x_{n_2,i}\}_{i=1}^{\infty}$. 依此作下去，得到序列 $\{n_k,i\}$ 是 $\{n_{k-1},i\}$ 的子序列，且序列 $\{y_n^*x_{n_n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ 收敛. 令 $y_i=x_{n_i,i}$，则序列 $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使得对于每个 $n$，$\lim\limits_{i\to\infty}y_n^*(y_i)=\lim\limits_{i\to\infty}\hat{y}_iy_n^*$ 存在. 因为 $\{y_n^*\}$ 在 $Y^*$ 中稠密，$\|\hat{y}_i\|\leqslant K$，由共鸣定理存在 $y^*\in Y^*$ 使得

$$\lim_i y^*y_i=y^{**}y^*,\quad y^*\in Y^*.$$

因为 $Y^*$ 自反，存在 $y\in Y$ 使得 $y^*y_i\to y^*y$，对于每个 $y^*\in Y^*$. 现在任一 $x^*\in X^*$ 确定一点 $y^*\in Y^*$ 使得对于 $y\in Y$ 有 $x^*y=y^*y$. 因此，因为 $y_n\in Y$，$x^*y_i\to x^*y$ 对于 $x^*\in X^*$，故 $y_i\xrightarrow{w}y$. 所以有界集为 $w$-序列紧集.

其逆由命题 9 可得. □

**11. 推论** 自反空间是 $w$-完备的.

**证明** 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是自反空间 $X$ 中的序列. 假设对于每个 $x^* \in X^*$, $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n)$ 存在. 由共鸣定理知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界. 由定理 10, 存在子序列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $w$-收敛于点 $x \in X$ 的. 因此 $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = \lim_{n\to\infty} x^*(x_{n_i}) = x^*(x)$, $x^* \in X^*$. 这证明了 $X$ 是 $w$-完备的. □

Alaoglu 定理告诉我们:赋范线性空间 $X$ 的共轭空间 $X^*$ 中范数有界的 $w^*$-闭集必为 $w^*$-紧集. 另外我们知道 Banach 空间的紧集必为有界闭集. 那么 Banach 空间的 $w$-紧集与这些性质有些什么联系呢?

假设 $K$ 是赋范线性空间 $X$ 中的 $w$-紧集. 对于任意 $x^* \in X^*$, $x^*$ 必为 $w$-连续. 故 $x^*(K)$ 是系数域 $\Phi$ 中的紧集. 那么对于任意 $x^* \in X^*$, $x^*(K)$ 是 $\Phi$ 中有界集. 所以 $K$ 是有界集. 又因 $K$ 是 $w$-紧的, 故 $K$ 是 $w$-闭的. 从而 $K$ 是范数闭的. 由此可知:$w$-紧集必范数有界和范数闭. 但其逆不成立. 现在我们来看两个例子.

**例 1** $c_0$ 空间的闭单位球 $B_{c_0}$ 不是 $w$-紧集. $c_0$ 是赋以 sup 范数收敛于 0 的序列空间. 假设 $B_{c_0}$ 是 $w$-紧集. 则 $B_{c_0}$ 中任一序列在 $B_{c_0}$ 中有一 $w$-闭包点. 考虑 $B_{c_0}$ 中序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其中

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i, \quad e_i = (0,0,\cdots,0,\overset{i\text{-th}}{1},0,\cdots),\ i = 1,2,\cdots.$$

显然 $\|x_n\| = 1$, $n = 1,2,\cdots$. 什么是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的可能的闭包点呢?假设 $z \in B_{c_0}$ 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 $w$-闭包点. 即对于任意 $x^* \in X^*$, $x^*(x_n)$ 与 $x^*(z)$ 可任意接近, 当 $n$ 充分大时. $c_0$ 中的点以它的第 $k$ 个坐标赋值的泛函是 $c_0$ 上的有界线性泛函, 用 $e_k^*$ 表示它. 注意当 $n \geqslant k$ 时, $e_k^*(x_n) = 1$, 因此 $e_k^*(z) = 1$, 这对任意的自然数 $k$ 都成立. 因此 $z = (1,1,1,\cdots) \notin c_0$. 所以 $B_{c_0}$ 不是 $w$-紧集.

**例 2** $l_1$ 空间的闭单位球 $B_{l_1}$ 不是 $w$-紧集. $l_1$ 是赋以范数 $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < +\infty$ 的序列 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 所组成的空间. 假若 $B_{l_1}$ 是 $w$-紧的. 由

于 $l_1=c_0^*$，$B_{l_1}$ 上的 $w$-拓扑显然包含 $B_{l_1}$ 上的 $w^*$-拓扑. 而 $B_{l_1}$ 上的 $w^*$-拓扑是 Hausdorff 的，$B_{l_1}$ 上的 $w$-拓扑是紧的. 由 W. Rudin 著泛函分析 3.8(a)和 $B_{l_1}$ 上的 $w$-拓扑必与 $B_{l_1}$ 上的 $w^*$-拓扑相同. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $l_1$ 中单位向量序列. 设 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}\in c_0$，那么 $e_n(x)=\xi_n\to 0(n\to\infty)$. 故 $e_n\xrightarrow{w^*}0(n\to\infty)$. 从而 $e_n\xrightarrow{w}0(n\to\infty)$. 再根据 W. Rudin[13] 定理 3.13，有 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的有限凸组合序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\|z_n\|_{l_1}\to 0(n\to\infty)$. 但 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任何有限凸组合所生成的元素的 $l_1$ 范数总是 1，即 $\|z_n\|_{l_1}=1, n=1,2,\cdots$. 所以 $\|z_n\|_{l_1}\to 0(n\to\infty)$ 是不可能的. 所以 $B_{l_1}$ 不是 $w$-紧集.

第一个例子中，我们看到 $B_{c_0}$ 的 $w$-闭包点不在 $c_0$ 中而是在 $B_{l_\infty}$ 中. 如果 $B_{c_0}=B_{l_\infty}$，这才有足够的点保证 $B_{c_0}$ 的 $w$-紧性. 第二个例子中，$B_{l_1}$ 的 $w$-紧性被否定是因为 $B_{l_1}$ 上的 $w$-拓扑与 $w^*$-拓扑不一致. 也就是说，存在比 $x$ 要多的 $x^{**}$ 需要验证其收敛性. 因此我们有如下命题.

**12. 命题** Banach 空间 $X$ 是自反的当且仅当 $B_X$ 是 $w$-紧的.

**证明** 设 $X$ 是自反的. 那么 $B_X=B_{X^{**}}$. 又由 Alaoglu 定理 $B_{X^{**}}$ 是 $w^*$-紧. 从而 $B_X$ 是 $w$-紧的. 反之，设 $B_X$ 是 $w$-紧的. 由于典则映射 $\varphi: X\to X^{**}$ 是 $w$-$w^*$ 连续的，所以 $B_X$ 在 $x^{**}$ 是 $w^*$-紧的. 从而 $B_X$ 是 $w^*$-闭的. 由 Goldstein 定理 $B_X$ 在 $B_{X^{**}}$ 中 $w^*$-稠密，故 $B_X=B_{X^{**}}$，$\varphi$ 是到上的. 因此 $X$ 是自反的. □

当我们需要证明 Banach 空间 $X$ 中的有界集 $A$ 为相对 $w$-紧集时，借助于 Alaoglu 定理，可以把 $A$ 看作 $X^{**}$ 中集合来考察 $\overline{A}^{w^*}$. 由于 $\overline{A}^{w^*}$ 总是 $w^*$-紧的，因此只要能判明 $\overline{A}^{w^*}\subset X$，这说明 $\overline{A}^{w^*}$ 正好是集合 $\overline{A}^{w}$. 此时的 $w^*$-拓扑与 $w$-拓扑相同. 从而 $\overline{A}^{w}$ 是 $w$-紧的. 即证明了集合 $A$ 的相对 $w$-紧性. 下面定理的证明将要用到这一点.

**13. 定理**(Eberlein-Šmulian, 1947) Banach 空间的子集是相对 $w$-紧的当且仅当它是相对 $w$-序列紧. 特别地，Banach 空间的子集是 $w$-紧的当且仅当它是 $w$-序列紧.

**证明** 首先证明 Banach 空间 $X$ 的相对 $w$-紧子集是相对 $w$-序

列紧的. 我们注意到由 Rudin 著"泛函分析"[13]的 3.8(c)、如果集合 $A$ 是 $X$ 的相对 $w$-紧集并且 $X^*$ 含有 $X$ 上的可数可分点集，则 $\overline{A}^w$ 是可度量的.

现在假设 $A$ 是 $X$ 的相对 $w$-紧集. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $A$ 中序列. 令 $[a_n]=\overline{\text{span}}\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 由于 $[a_n]$ 是闭线性子空间，故 $[a_n]$ 是 $w$-闭的（见 Rudin[13]3.12 推论）. 从而 $A\cap[a_n]$ 是 $[a_n]$ 中的相对 $w$-紧集. 由于 $[a_n]$ 是可分的，则 $[a_n]$ 的共轭空间包含可数可分点集. 事实上，假若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $[a_n]$ 的单位球面的可数稠密集. 由 Hahn-Banach 定理可选取 $[a_n]$ 的共轭空间中元素 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x_n^*(x_n)=1, n=1,2,\cdots$. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 便是 $[a_n]$ 上的可数可分点集. 因此 $\overline{A\cap[a_n]}^w$ 在 $[a_n]$ 中关于 $w$-拓扑是可度量的. 由于在度量空间中紧性与序列紧性是等价的，故 $\overline{A\cap[a_n]}^w$ 是 $[a_n]$ 中 $w$-序列紧集. 如果点 $a$ 是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一 $w$-极限点，则有 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{a_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a_n]$ 中 $w$-收敛于 $a$. 显然 $\{a_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $X$ 中也 $w$-收敛于 $a$.

下面证明其逆. 让我们先观察这一事实：如果 $E$ 是 $X^{**}$ 的有限维子空间，则在 $S_{X^*}$ 中存在一有限集 $E'$ 使得对于 $E$ 中每个 $x^{**}$ 有

$$\frac{\|x^{**}\|}{2}\leqslant \max\{|x^{**}(x^*)|;x^*\in E'\}.$$

因为 $S_E$ 是范数紧的，故有有限 1/4 -网 $F=\{x_1^{**},x_2^{**},\cdots,x_n^{**}\}\subset S_E$. 选取 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\in S_{X^*}$ 使得 $x_k^{**}(x_k^*)>3/4, k=1,2,\cdots,n$. 则当 $x^{**}\in S_E$ 时，对于某一 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 有

$$x_k^{**}(x_k^*)=x_k^{**}(x_k^*)-(x_k^{**}(x_k^*)-x^{**}(x_k^*))\geqslant\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

下面的证明中将多次运用这一事实.

现在设 $A$ 是 $X$ 的相对 $w$-序列紧集. 为了要证明 $A$ 是相对 $w$-紧的，只要证明 $\overline{A}^{w^*}\subset X$ 便可.

任取 $x^*\in\overline{A}^{w^*}$. 设 $x_1^*\in S_{X^*}$. 由于 $x^*\in\overline{A}^{w^*}$，所以 $x^{**}$ 的每个 $w^*$-邻域含有 $A$ 中元素. 特别地，对于由 $x_1^*$ 和 $\varepsilon=1$ 所生成的 $w^*$-邻域 $W^*(x^{**};x_1^*;1)$ 也是如此. 故有 $a_1\in A$ 使得

$$|(x^{**}-a_1)(x_1^*)|<1.$$

令 $M_1=\mathrm{span}\{x^{**},x^{**}-a_1\}\subset X^{**}$ 且 $\dim M_1<+\infty$，应用前面所证的事实，存在 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_{n(2)}^*\in S_{X^*}$ 使得对于每个 $y^{**}\in M_1$ 有

$$\frac{\|y^{**}\|}{2}\leqslant\max\{|y^{**}(x_k^*)|;1\leqslant k\leqslant n(2)\}.$$

再由 $x^{**}\in\overline{A}^{w^*}$，$x^{**}$ 的 $w^*$-邻域 $W^*(x^{**};x_1^*,\cdots,x_{n(2)}^*;1/2)$ 必含 $A$ 中元素，设 $a_2\in A\cap W^*(x^{**};x_1^*,\cdots,x_{n(2)}^*;1/2)$. 即

$$|(x^{**}-a_2)(x_1^*)|<\frac{1}{2},|(x^{**}-a_2)(x_2^*)|<\frac{1}{2},\cdots$$

$$|(x^{**}-a_2)(x_{n(2)}^*)|<\frac{1}{2}.$$

令 $M_2=\mathrm{span}\{x^{**},x^{**}-a_1,x^{**}-a_2\}$，$M_2\subset X^{**}$ 且 $\dim M_2<+\infty$. 由同样的理由，存在 $x_{n(2)+1}^*,\cdots,x_{n(3)}^*\in S_{X^*}$ 使得对于每个 $y^{**}\in M_2$ 有

$$\frac{\|y^{**}\|}{2}\leqslant\max\{|y^{**}(x_k^*)|;1\leqslant k\leqslant n(3)-n(2)\}.$$

类似地有 $a_3\in A\cap W^*(x^{**};x_{n(2)+1}^*,x_{n(2)+2}^*,\cdots,x_{n(3)}^*;1/3)$，即有

$$|(x^{**}-a_3)(x_{n(2)+1}^*)|<\frac{1}{3},|(x^{**}-a_3)(x_{n(2)+2}^*)|<\frac{1}{3},\cdots,$$

$$|(x^{**}-a_3)(x_{n(3)}^*)|<\frac{1}{3}.$$

依此法继续下去.

由于我们假定 $A$ 是相对 $w$-序列紧的，故我们可找到一点 $x\in X$ 是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 $w$-闭包点. 由于 $[a_n]$ 也是 $w$-闭的，所以 $x\in[a_n]$. 由此可知 $x^{**}-x\in\overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{x^{**},x^{**}-a_1,x^{**}-a_2,\cdots\}$. 根据 $x_i^*$ 和 $a_i$ 的取法，保证对于任一 $y^{**}\in\mathrm{span}\{x^{**},x^{**}-a_1,x^{**}-a_2,\cdots\}$ 有

$$\frac{\|y^{**}\|}{2}\leqslant\sup_m|y^{**}(x_m^*)|.$$

根据连续性，容易证明上式对于任何

$$y^{**}\in\overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{x^{**},x^{**}-a_1,x^{**}-a_2,\cdots\}$$

也成立. 特别地，我们可以把上述不等式应用于 $x^{**}-x$. 如果 $m\leqslant n(p)$，$p\leqslant k$，再利用 $x$ 是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 $w$-闭包点这一事实，有