广义函数

I

广义函数及其运算

〔苏〕И. М. 盖尔芳特
Г. Е. 希洛夫 著

科学出版社

广 义 函 数

I

广义函数及其运算

[苏] И. М. 盖尔芳特
Г. Е. 希 洛 夫 著

林 坚 冰 译

科 学 出 版 社

1 9 8 4

内 容 簡 介

广义函数理论是泛函分析的一个领域，它是由于数学物理的需要而产生的。人们运用这一有力工具，正确地提出并解决了一系列具有实际意义的古典问题。

本卷主要叙述广义函数定义、广义函数运算等基本概念。前两章初步介绍这一理论，第三章则较为专门，介绍特殊类型的广义函数。

И. М. ГЕЛЬФАНД и Г. Е. ШИЛОВ

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

I

Физматгиз Москва 1959

广 义 函 数

I

广义函数及其运算

И. М. 盖尔芳特

~~〔苏〕~~ 著

Г. Е. 希 洛 夫

林 坚 冰 译

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1965年11月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1984年 5月第二次印刷　印张：12 1/2

印数：2,701—7,350　字数：325,000

统一书号：13031·2561

本社书号：3522·13—1

定价：2.30 元

序　言

目前,广义函数在各个不同的数学分支得到日益广泛的传播.实际上,以不严密形式来表示的广义函数,已经很早为物理学家所采用.

由于研究波动方程的基本解,阿达玛(J. Hadamard)曾经探讨发散的积分. 他的工作和黎斯(M. Riesz)的某些工作都对这一门广义函数理论的形成起了很重要的作用. 这里我们没有谈到更早的一些数学文献,这些文献也蕴含形成广义函数理论的因素.

索伯列夫(С. Л. Соболев)于 1936 年首先以明确而又是目前广泛采用的形式引入了广义函数. 他用广义函数来说明线性双曲型方程哥西问题的解的唯一性问题.

另一方面,按幂式增长函数的富里埃变换的勃赫纳尔(C. Bochner)理论与广义函数理论也有紧密的联系. 这些富里埃变换实质上就是广义函数. 在勃赫讷尔的理论中,它们是当作连续函数的形式上的导数而出现的.

在 1950—1951 年间,出版了舒瓦兹(L. Schwartz)的专著"分布函数理论"("Theorie des distributions"). 在这本书里,舒瓦兹把广义函数理论系统化,把以前的种种方法统一起来,用线性拓扑空间理论作为基础,而且得到一系列重要且具有深远意义的结果.分布函数理论问世之后,广义函数迅速地(可以说在二、三年内)得到了极其广泛的普及. 这只要指出下面的事实就够了: 涉及 δ-函数的文章的数量增加了很多.

在这几卷书中,我们将系统地叙述广义函数理论以及一系列与它有关的分析上的问题. 作者并不打算把涉及广义函数的材料全部收罗起来;另一方面,这里考虑的问题,有很多即使不用广义函数也可以阐述. 可是广义函数概念却是一个很方便的环节,它

把分析、泛函分析、微分方程理论、局部致密李群的表示论以及概率论等各方面的一系列问题联系起来．因此，对这套泛函分析丛书来说，用总标题“广义函数”可能是最恰当的了．

现在对这套书的前四卷内容简短介绍如下：

第一卷基本上是讨论广义函数论中的基本运算．前两章是广义函数论的基本引论．在这一卷中，读者会接触到广义函数在不同分析问题上的应用．某些地方只引述第二卷的一些定理而不加以证明．在这一卷中，除了舒瓦兹的专著外，也广泛应用了盖尔芳特(И. М. Гельфанд)和沙皮罗 (З. Я. Шапиро) 的文章“齐次函数”(УМН 1955 № 3)．沙皮罗也为本卷撰写了几段．

在第二卷中，我们发展了第一卷引进的概念并且利用拓扑工具把第一卷没有证明的那些定理加以论证．此外，建立了大量具体的广义函数空间，并且加以研究．这一切都以第二卷第一章的内容为基础．这一章谈的是线性拓扑空间一般理论中（对分析数学家来说）最基本、最有用的部分，也就是可数赋范空间理论．

第三卷叙述广义函数在微分方程理论上的某些应用，也就是用它来建立偏微分方程哥西问题解的各类唯一性和适定性，以及依微分算子的特征函数展开的理论．这里将系统地利用第二卷中得到的结果．

第四卷考虑的是与广义函数论有联系的概率论（广义的随机过程）和李群表示论的问题．在这里起联系作用的是广义函数调和分析(类似于富里埃积分理论)的一些问题，特别是那些正定函数的表示问题．对于在其构成中起重要作用的关于核的舒瓦兹定理，本卷也将论及．

第一卷到第三卷是由希洛夫(Г. Е. Шилов) 和我合写的，第四卷是由维连金 (Н. Я. Виленкин) 和我合写的．

第五卷将要论及广义函数论中复函数论方法的进一步发展．第一卷已经告诉我们，可以把广义函数当作解析函数的泛函，第五卷打算周密地发展这一观点并且讨论它与勒雷 (J. Leray) 工作的联系．

当然,所有这些内容远远不能包括广义函数一切可能的应用.无疑地可以看出,很需要深入研究它和微分方程(边值问题,变系数方程,一系列拟线性方程的问题)的联系.此外,广义函数论对于建立李群表示的一般理论,特别是球函数和广义自守函数的一般理论,是一个最方便的基础.我们希望这些问题最后也会得到解决.

第一卷的作者谨向协助编写的同事和学生表示谢意,特别是鲍罗维柯夫(В. А. Боровиков),维连金 (Н. Я. Виленкин),格拉也夫(М. И. Граев)以及沙皮罗(З. Я. Шапиро)同志.作者也向阿格兰诺维奇(М. С. Агранович)表示感谢,他校阅了全部原稿并作了一系列的改进.

盖尔芳特

第一卷第二版序言

为了便于阅读，在第一卷第二版中，我们对材料重新加以安排. 前两章"广义函数的定义及其简单性质"及"广义函数的富里埃变换"可以推荐给初学的读者. 这两章的内容是最基本的,对于一切和广义函数打交道的数学家和物理学家来说,都是必要的.

后面几章读者可根据个人需要选读. 如果读者对运算有兴趣，可以看第一卷第三章. 第三章讨论的是某些特殊的广义函数类：不同维数曲面上的 δ-函数，和多维(任意符号的)二次型有关的广义函数,齐次函数以及与齐次函数等价的函数. 此外,还可以看第四卷第四章前一部分,其中讨论到复数域中的齐次广义函数. 对一般理论有兴趣的读者，我们建议学好这一卷前两章以后再学第二卷前三章，这一章特别介绍了线性拓扑空间理论中的必要知识. 然后学习第四卷第一章，其中谈到核空间及其中的测度. 如果读者希望了解广义函数对偏微分方程理论的应用，那末先读了关于 S 型和W型空间两章（第二卷第四章和第三卷第一章）之后，就可以看第三卷第二、三章. 谱论及其应用在第三卷第四章和第四卷第一章谈到，但首先需要熟悉第二卷前两章的内容. 也可能有其他的阅读计划，比如围绕广义函数富里埃变换的应用的一些问题,在第一卷第二章,第二卷第三章和第四章,第三卷前三章,第四卷第二章以及后面几章得到发展. 关于在表示论和群上的富里埃变换理论中广义函数的作用问题,则在第四卷后三章予以论述,只要熟悉第一卷前两章就可阅读这三章.

为了阅读方便,我们在第一卷末综述了基本定义和公式,并且还列出了广义函数的富里埃变换总表.

作　者

目　录

第二章　广义函数的富里埃变换

第三章　特殊类型的广义函数

第一章　广义函数的定义及其最简单的性质

§1. 基本函数与广义函数

1. 引言. 在物理学中很早就应用所谓奇异函数，而奇异函数在古典函数论范围内是不能具体地加以定义的.

最简单的奇异函数是 δ-函数 $\delta(x-x_0)$. 按物理学家的定义，这函数"除了点 x_0 以外到处为零，而在这个点等于无限大，并且积分值为 1". 不言自明，从函数和积分的古典定义的观点来看，这些条件是互不相容的.

可是，我们还可以对奇异函数概念试加分析，以阐明其实际内容.

首先，我们注意到在解决具体的数学物理问题时，δ-函数（以及其它的奇异函数）照例只在中间过程中出现；在最后的答案中，奇异函数或者完全消失，或者只在积分号下以与某一个相当"好"函数的乘积的形式出现. 因此，沒有必要直接回答奇异函数自身是什么？我们只要回答这样的问题：奇异函数和相当"好"函数乘积的积分表示什么？例如，我们不必回答什么是 δ-函数，而只要指出对于相当好函数 $\varphi(x)$，下面的等式成立即可：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\varphi(x)dx = \varphi(x_0).$$

换句话说，我们把每一个奇异函数和泛函联系起来，这个泛函使得这一个奇异函数和每一个相当"好"函数对应着某一个完全确定的数值. 例如，对于 δ-函数 $\delta(x-x_0)$ 来说，对应于每一个相当"好"函数 $\varphi(x)$ 的数值是 $\varphi(x_0)$.

这样，我们就可以不必再多考虑"奇异函数"这个概念. 因此，现在我们可以把"奇异函数"和能够具体讨论的泛函等同起来，而

这将成为奇异函数完全充分的定义（当然要假设这泛函在其上所定义的相当“好”的函数类是明确指定的）.

显然，通常的可积函数也可以列入这个定义的范围. 即对于每一个这种函数 $f(x)$，我们能够回答 $f(x)$ 与“好的函数”的乘积的积分等于多少. 因此，作为泛函来处理的广义函数概念既包括“奇异函数”又包括通常的函数.

现在我们来叙述严格的定义.

2. 基本函数. 首先要给定那些所谓相当“好”的函数的集合，然后我们的泛函将定义在它的上面.

我们可以取具有各阶的连续导数而且是有穷的（финитная），即将有限区域之外等于零（对每一个有穷函数，这区域可以不同）的实函数 $\varphi(x)$[1] 的全体 K 当作这一集合.

这些函数称为基本函数，其全体 K 称为基本空间.

基本函数可以相加，也可以与实数相乘，其结果还是基本函数. 因此，函数集合 K 是线性空间.

其次，如果基本函数序列 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_\nu(x), \cdots$ 在同一有限区域外等于零，并且连同其各阶连续导数一致收敛于零（在通常的意义下），我们就称这序列在空间 K 中趋于零.

函数

$$\varphi(x, a)=\begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-r^2}}, & \text{当 } r<a, \\ 0, & \text{当 } r\geqslant a \end{cases} \tag{1}$$

可以作为在 $r\equiv|x| = \sqrt{\sum x_i^2} \geqslant a$ 等于零的基本函数的例子.

函数序列 $\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu}\varphi(x, a)$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ 在空间 K 中趋于零. 函数序列 $\varphi_\nu(x) = \frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{x}{\nu}, a\right)$ 连同其各阶导数一致地趋于零，但它并不是在 K 中趋于零，因为这里沒有一个共同的有限区域使得在这区域之外这些函数全为零.

存在着各种各样的基本函数，例如（参考本章补充第一段），对于给定的

1) 照例，以 $x = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 表示 n 维空间 R_n 的点，开始时读者可以把它当作直线上的点 x.

有穷连续函数 $f(x)$，常常可以找到一个与它任意接近的基本函数 $\varphi(x)$，即对于一切 x 和给定的 $\varepsilon>0$，

$$|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon.$$

3. 广义函数. 如果在空间 K 中给定这样的规则而使得其中每一个基本函数 $\varphi(x)$ 都对应着一个实数 (f, φ)，并且满足如下的条件：

(i) 对于任意两个实数 α_1，α_2 和任意两个基本函数 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，等式

$$(f, \alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1(f, \varphi_1)+\alpha_2(f, \varphi_2)$$

成立（泛函的线性性质）.

(ii) 如果基本函数列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_\nu$ 在空间 K 中趋于零，则对应的数列 (f,φ_1)，(f, φ_2)，$\cdots$，(f, φ_ν)，$\cdots$ 收敛于零（泛函的连续性性质）. 于是我们说，在空间 K 上给定了一个线性连续的泛函 f. 举例说，给定一个函数 $f(x)$，它在空间 R_n 中每一有限区域内可积（今后称之为局部可积的）. 借助这个函数，对于每一个基本函数 $\varphi(x)$，我们可以定义相应的数值

$$(f, \varphi)=\int_{R_n} f(x)\varphi(x)dx, \tag{1}$$

其中的积分只在有限区域中进行，因为 $\varphi(x)$ 在某一个有界区域之外等于零. 容易检证，对于泛函 f，条件 (i)(ii) 成立；特别是条件 (ii)，可以由如下的结论得到：如果在有限区域中被积函数列一致收敛，则极限可以移到积分号之后.

形如 (1) 的泛函是空间 K 上线性泛函的极特殊的例子. 还可以很容易地指出许多类型的泛函. 例如，对于每一个函数 $\varphi(x)$，取它在 $x_0=0$ 点的值，与之相应的泛函显然是线性的和连续的. 可是很容易证明，不管怎样来取局部可积的函数 $f(x)$，这泛函都不可能用(1)的形式来表示.

事实上，我们先假定，对于某一局部可积的函数 $f(x)$ 和任意一个基本函数 $\varphi(x)$，下面的等式成立：

$$\int_{R_n} f(x)\varphi(x)dx=\varphi(0).$$

特别取上节所考虑的函数 $\varphi(x, a)$ (即当 $r < a$ 时等于 $e^{-\frac{a^2}{a^2-r^2}}$; 当 $r \geqslant a$ 时等于零),有

$$\int_{R_n} f(x)\varphi(x, a)dx = \varphi(0, a) = e^{-1}. \qquad (2)$$

可是当 $a \to 0$ 时,左方积分趋于零,这与等式(2)矛盾.

我们称这个泛函为 δ-函数,以符合已有的术语(由于 δ-函数并不是古典意义下的函数,所以这样称呼是不确切的),并以符号 $\delta(x)$ 来表示. 于是

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0).$$

常常碰到所谓"平移"的 δ-函数,即由下面等式所定义的泛函 $\delta(x - x_0)$:

$$(\delta(x-x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0).$$

现在,我们把每一个定义在基本空间 K 上的线性连续泛函称为广义函数. 形式如(1)的广义函数称为正则的,其余的(包括 δ-函数在内)则称为奇异的.

按公式[1)]

$$(f, \varphi) = C\int \varphi(x)dx = \int C\varphi(x)dx$$

定义的正则广义函数 f 称为常数 C. 例如,广义函数"1"定义如下:

$$(1, \varphi) = \int \varphi(x)dx.$$

可以证明,根据定义在基本函数之上的那些正则泛函的值,除了在一个零测度集上的值之外,可以唯一地确定相应的函数 $f(x)$ (参考第二卷第二章 §1 第 5 段). 这表示不同的函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 对应着不同的广义函数(即对于某些基本函数有不同的值). 因此,通常的局部可积函数的集合全体可以看作广义函数全体的一部分.

正是由于这个原因,有时为了方便,我们也用记号 $f(x)$ 来表示广义函数(象表示 δ-函数一样),虽然这时已经不能够谈到在个

---

1) 今后我们规定:若对全空间求积分,则积分号下的符号 R_n 略去.

别点上广义函数的值（因此，$f(x_0)$ 这样的写法，对于广义函数来说，一般是没有意义的）．此外，我们有时常用 $\int f(x)\varphi(x)dx$ 来代替 (f, φ)，虽然从通常的分析观点来看，这种写法一般是没有意义的．例如，我们有时就以 $\int \delta(x)\varphi(x)dx$ 来代替 $(\delta(x), \varphi(x))$，于是 $\int \delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$．

我们以 K' 表示广义函数集合的全体．

4. 广义函数的局部性质． 我们已经知道，在个别点广义函数的值是不存在的．例如，不能说广义函数 $f(x)$"在点 x_0 取零值"．可是，"广义函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 U 中等于零"这样的说法却给出了完全明确的意义．亦即它表示，对于每一个仅在邻域 U 内不等零的基本函数 $\varphi(x)$ 来说，等式 $(f, \varphi)=0$ 成立．

因此，当通常的函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 U 中（几乎处处）等于零时，对应于这个 $f(x)$ 的广义函数 f 在这个邻域中也等于零．奇异广义函数 $\delta(x-x_1)$ 在任何点 $x_0 \neq x_1$ 的某一邻域中都等于零．

如果广义函数 f 在一个开域 G 的每一点的某一邻域中等于零，那末我们就说 f 在 G 中等于零．

可以证明（参考补充 1），在任意一点的邻域中等于零的广义函数，在整个空间也等于零，即对于任意的基本函数 $\varphi(x)$，有

$$(f, \varphi)=0.$$

如果广义函数在点 x_0 的任意一邻域中都不等于零，则 x_0 称为泛函 f 的**质点**．例如，在直线上点 $x_0=0$ 就是泛函 $f(x)=x^2$ 的质点（虽然函数本身在这一点等于零）．当然，x 轴上其余的点也都是 $f(x)=x^2$ 的质点．质点的全体称为广义函数 f 的**支集**．通常的连续（或分段连续）函数 $f(x)$ 所对应的广义函数 f 的支集就是使 $f(x)\neq 0$ 的点集的闭包．广义函数 $\delta(x-x_0)$ 的支集是一个点 x_0．如果集合 F 包含泛函 f 的支集，那末我们也可以说，泛函 f **集中作用在集合** F **上**．

由于下述性质，才称之为"质点"（其证明见补充 1 的第 3 段）：

如果基本函数 $\varphi(x)$ 在泛函 f 的支集的某一邻域等于零，那末 $(f, \varphi)=0$. 从而，在广义函数 f 的支集的邻域之外，任意改变基本函数 $\varphi(x)$ 的结果，并不影响 (f, φ) 的值. 实际上，上述变动可以看作是基本函数 $\varphi(x)$ 加上另一个在 f 支集的邻域等于零的函数 ψ，因此 $(f, \psi)=0$. 于是有 $(f, \varphi+\psi)=(f, \varphi)$.

现在来比较两个任意广义函数的局部性质. 如果两个广义函数 f 与 g 的差 $f-g$ 在一开域 G 中等于零，那末就说 f 与 g **在域 G 中相等**. 可以证明，如果 f 与 g 在每一点的邻域都相等，那末他们在全空间也相等，即对于任意的 φ，$(f, \varphi)=(g, \varphi)$. 从而可知，广义函数 f 是由它本身的局部性质唯一确定的. 不但如此，我们还可以依据给定的局部函数值来建立一个广义函数（见补充 1 第 3 段).

特别是在一个区域 G 中，如果广义函数与一个通常的局部可积函数相等，那末我们就说这个 f **在域 G 中是正则的**.

例如，在点 x_0 之外，δ-函数 $\delta(x-x_0)$ 到处是正则的（并且等于零).

广义函数论的重要问题之一可叙述如下：设给定一个（通常的)函数，一般地说它不一定是局部可积的，例如直线上的 $1/x$. 现在要问，是否存在一个广义函数 f，使得在一切 $f(x)$ 的局部可积点上 f 与 $f(x)$ 相等? 是否可以建立这样的对应：$f(x)\to f$，使得通常的加法，与函数的乘法以及今后要定义的广义函数的微分运算在这个对应下仍然保持? 显然，对于这类问题，肯定的回答是极其重要的，因为这就使得具不可积奇点的通常函数可以包括到广义函数这一范畴来.

目前，这些问题的解决还只是零星的，可参考 §1 第 7 段以及 §3.

5. 加法运算以及与数或与函数的乘法运算. 给定两个广义函数 f 及 g，其和 $f+g$ 定义为由公式

$$(f+g, \varphi)=(f, \varphi)+(g, \varphi)$$

确定在空间 K 上的泛函.