

理论力学教学参考丛书

陀螺力学

西北工业大学 肖尚彬 董秋泉 编



人民教育出版社

内 容 提 要

本书是《理论力学教学参考丛书》的一册。

《理论力学教学参考丛书》是为了高等学校工科理论力学课程的教学需要而编写的, 结合理论力学教材中的某些专题或内容加深加宽, 作了进一步的阐述。这套教学参考丛书可作为理论力学教材的补充, 供有关专业的大学生、研究生和教师在教学中参考选用。

本书内容包括: 刚体的定点运动、框架陀螺的运动、陀螺的运动微分方程、对称陀螺的运动和框架陀螺动力学。书末并附有习题。

2004/35 06

理论力学教学参考丛书

陀 螺 力 学

西北工业大学 肖尚彬 董秋泉 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 3.75 字数 89,000

1980年10月第1版 1981年3月第1次印刷

印数 00,001—11,000

书号 15012·0285 定价 0.40 元

编 者 的 话

高速旋转的刚体称为陀螺。广义而言，大至天体，小至儿童抽打的玩具陀螺都是实例。这种刚体具有三个主要的运动特性：定轴性、进动性和章动性。多年来，人们曾从多方面设法利用陀螺的这些特性，解决了科学技术和工程实际中的一些问题。

陀螺理论是从研究天体运动中产生的，在天文学中早已获得应用。在现代导航技术中，如飞机、舰船、导弹、宇宙航行器等各种现代导航系统内，都采用陀螺仪作为指示器和稳定器的主要元件。对于高速旋转的部件，如舰船上的汽轮机转子、航空发动机的涡轮转子等，当其转轴在空间改变方向时，也将产生不可忽视的陀螺效应。因此，研究陀螺的运动规律和特性，对实现我国四个现代化，具有重要的意义。

陀螺力学是应用陀螺的力学模型——定点运动的刚体和陀螺模型——框架陀螺来建立陀螺的运动微分方程并研究它的一般运动规律的一门学科，目的在于比较系统地研究陀螺的力学特性及其重要应用。至于陀螺的结构方面，除了有助于说明基本原理的部分外，其他部分就不再论及。本书中所涉及的刚体力学知识和数学方法，对于理工科院校有关专业的高年级学生和研究生来说，都是已经具备了。

在本书编写过程中，我们参阅了一些有关著作，其中最主要的已列在书末的参考文献中，以供读者进一步研究陀螺理论时参考。

西北工业大学理论力学教研室陀螺组的同志们，曾参加本书大纲的编写和初稿的讨论；上海交通大学理论力学教研室王熙和、

包宏稼等同志对本书作了审阅,并提出了许多宝贵的意见,在此一并表示感谢。

编者

一九七九年三月

目 录

编者的话	1
第一章 刚体的定点运动	1
§ 1-1 确定刚体位置的参数	1
§ 1-2 刚体的角速度	4
§ 1-3 无穷小转动·克雷洛夫角	6
§ 1-4 有限转动的合成	9
§ 1-5 洛蒂克-哈密顿参数	15
第二章 框架陀螺的运动	21
§ 2-1 框架陀螺位置的确定	21
§ 2-2 陀螺的角速度	25
§ 2-3 地球自转对陀螺运动的影响	26
§ 2-4 载体速度对陀螺运动的影响	30
§ 2-5 受控物体的定向	34
第三章 陀螺的运动微分方程	41
§ 3-1 刚体对任意轴的转动惯量·惯性椭球	41
§ 3-2 定点运动刚体的动矩和动能	44
§ 3-3 陀螺的规则进动	47
§ 3-4 陀螺力矩与陀螺效应	50
§ 3-5 刚体定点运动的欧拉动力学方程	54
§ 3-6 应用拉格朗日方程建立陀螺的运动微分方程	57
§ 3-7 陀螺运动的技术方程和进动方程	59
第四章 对称陀螺的运动	64
§ 4-1 自由陀螺的运动	64
§ 4-2 二自由度陀螺的主要特性	69
§ 4-3 高速对称陀螺在常力矩作用下的伪规则进动	71
§ 4-4 对称陀螺在重力作用下的运动(拉格朗日情形)	76
§ 4-5 铅直陀螺和旋转炮弹运动的稳定条件	82
§ 4-6 对称陀螺在简谐力矩作用下的运动	86

第五章 框架陀螺动力学.....90

 § 5-1 考虑框架质量时陀螺的运动微分方程.....90

 § 5-2 冲击和摩擦对高速陀螺定轴性的影响.....94

 § 5-3 运动基座上的框架陀螺.....99

 § 5-4 陀螺应用概述103

习题.....105

主要参考文献.....113

第一章 刚体的定点运动

刚体在运动过程中若其内有一点始终保持不动, 这种运动我们称为刚体的定点运动, 或刚体绕定点的转动。对于装设在固定基座上的陀螺仪, 其转子的运动就是典型的定点运动。对于装设在活动基座上的陀螺仪, 如果只研究其转子相对于基座的运动, 这也是定点运动问题。因此, 我们常将实际的陀螺抽象为定点运动的刚体, 亦即以定点运动的刚体作为陀螺研究的力学模型, 并从刚体的定点运动开始来研究陀螺的运动学特征。

§ 1-1 确定刚体位置的参数

一、方向余弦

为了确定一个具有固定点的刚体在空间的位置, 这里引进了两套坐标系 (图 1-1), 其坐标原点均选在固定点 O :

$O\xi\eta\zeta$ ——固连于惯性空间或不动基座, 称为固定坐标系;

$Oxyz$ ——固连于刚体本身或陀螺转子, 称为活动坐标系。

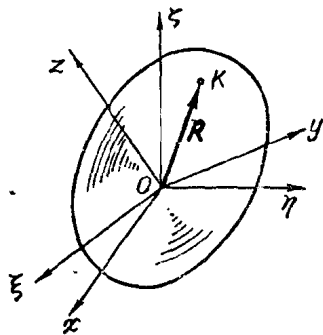


图 1-1

先在刚体内任取一点 K , 其矢径用 R 表示。设沿固定坐标轴 ξ, η, ζ 的单位矢为 i_0, j_0, k_0 , 沿活动坐标轴 x, y, z 的单位矢为 i, j, k , 两套坐标系各轴间的方向角为 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i=1, 2, 3)$, 可将矢径 R 分别用两套坐标系中的解析形式表示为:

(1-1)

$Oxyz$ 各轴上的投影。

再设 $Oxyz$ 与 $O\xi\eta\zeta$ 各轴间方向角的余弦值如下表:

	ξ	η	ζ
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

这九个余弦值称为方向余弦，分别等于坐标单位矢之间的标积，即有：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}_3 = \cos \alpha_1 = a_{11}, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}_0 = \cos \beta_1 = a_{12}, \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0 = \cos \gamma_3 = a_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

由式(1-1)得

$$xi+yj+zk=\xi i_0+\eta j_0+\zeta k_0. \quad (1-3)$$

将上式两边各项依次标乘以 i, j, k , 并利用式(1-2), 便得:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\xi; \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\xi; \\ z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\xi. \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

或写为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (1-4)$$

这就是矢径 R 的端点 K 的坐标从轴系 $O\xi\eta\zeta$ 到 $Oxyz$ 的变换公式,

对应的变换矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (1-5)$$

可见，变换矩阵的元素是由两套坐标系间的九个方向余弦所组成，刚体的位置即可由这九个参数充分确定，但它们并不是必要的，因这九个参数之间存在如下六个关系：

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1; \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0, \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0, \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

以上讨论说明，九个参数中只有三个是独立的。这个结论是很自然的，因为绕定点转动的刚体具有三个自由度，故确定其位置的独立参数只需三个。我们可以任选三个方向角作为独立参数，而将其余六个方向角用这三个独立参数表示出来，但这样做相当繁琐，为此必须解六个联立的二次三角方程(1-6)。因此，在陀螺运动学中，为了弥补方向角的这一缺陷，还采用所谓欧拉角或别的参数定位。

二、欧拉角及其选择

仍用上述方法选取两套坐标系：定系 $O\xi\eta\zeta$ 与动系 $Oxyz$ 。只要确定了三根动轴 x, y, z 对于定系 $O\xi\eta\zeta$ 的位置，也就相应地确定了刚体在空间的位置。通常采用三个角度 ψ, θ, φ 作为定点运动刚体的定位坐标，统称欧拉角，其选取方法如下：

设在某瞬时，动系 $Oxyz$ (代表刚体)据有图 1-2 所示的位置。动坐标平面 Oxy 与定坐标平面 $O\xi\eta$ 有一交线 ON ，称为节线。节

线 ON 与定轴 $O\xi$ 间的夹角用 ψ 表示, 称为进动角; 此角在定平面 $O\xi\eta$ 内, 规定从 $O\xi$ 轴的正端看去, 由 $O\xi$ 轴开始沿反时针方向量取为正。动轴 Oz 与定轴 $O\xi$ 间的夹角用 θ 表示, 称为章动角; 此角所在的平面 $O\xi z$ 垂直于节线 ON , 规定从 ON 轴的正端看去, 由 $O\xi$ 轴开始沿反时针方向量取为正。动轴 Ox 与节线 ON 间的夹角用 φ 表

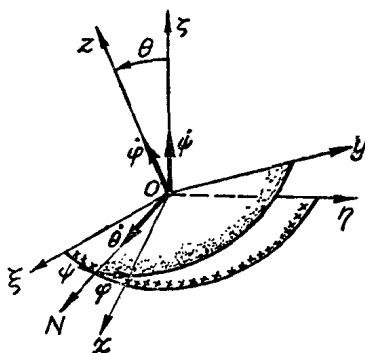


图 1-2

示, 称为自转角; 此角在动平面 Oxy 内, 规定从 Oz 轴的正端看去, 由 ON 轴开始沿反时针方向量取为正。欧拉角的这种取法并不是唯一的, 在陀螺仪实用理论中, 可根据具体结构和装置情况, 选取不同的欧拉角度系统。这里的取法是古典的, 或称古典欧拉角。

三个欧拉角 ψ 、 θ 、 φ 完全确定了刚体在空间的位置。当刚体绕定点转动时, 这三个角随时间而变化。因此, 它们是时间 t 的函数, 即:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= f_1(t); \\ \theta &= f_2(t); \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

这就是刚体的定点运动方程。

§ 1-2 刚体的角速度

现在来求刚体作定点转动的角速度。为此直接将三个欧拉角表示式(1-7)对时间 t 求导数, 便得刚体的角速度投影为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{d\psi}{dt} = f'_1(t); \\ \dot{\theta} &= \frac{d\theta}{dt} = f'_2(t); \\ \dot{\varphi} &= \frac{d\varphi}{dt} = f'_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

这三个角速度分别沿轴 $O\xi$ 、 ON 、 Oz (图 1-3)。若设沿三根轴的单位矢为 $\mathbf{k}_0$ 、 $\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{k}$ ，则可将这些角速度用矢量表示，并根据角速度矢量合成定理，容易得到刚体的绝对角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{k}_0 + \dot{\theta}\mathbf{n} + \dot{\varphi}\mathbf{k}. \quad (1-9)$$

刚体绝对角速度所沿的轴线称为瞬时轴 (图上未画出)，在这根轴线上所有点的线速度都等于零。因此，刚体绕固定点的转动可以看成是绕瞬时轴的转动。但必须注意，瞬时轴的位置是随时间而变化的。

为了求出角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在动轴 x 、 y 、 z 上的投影 p 、 q 、 r ，首先应注意图 1-3 中所示的几何关系：节线 ON 和 Oy' 轴均在定平面 $O\xi\eta$ 内，而 Oy' 轴即为两平面 $O\xi\eta$ 与 $O\xi z$ 的交线；平面 $O\xi z$ 与节线 ON 垂直，而 Oy'' 轴即为两平面 $O\xi z$ 与 Oxy 的交线。

再将角速度矢量 $\dot{\psi}\mathbf{k}_0$ 沿轴 Oz 和 Oy'' 分解，设沿 Oy'' 的轴向单位矢为 $\mathbf{j}_2$ ，则有

$$\dot{\psi}\mathbf{k}_0 = \dot{\psi}\cos\theta\mathbf{k} + \dot{\psi}\sin\theta\mathbf{j}_2.$$

最后将式(1-9)两边同时向动轴 x 、 y 、 z 上投影，并注意到上式，得

$$\begin{aligned} p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} &= (\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)\mathbf{i} + \\ &+ (\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)\mathbf{j} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\mathbf{k}. \end{aligned}$$

由此可立即得到角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在动轴 x 、 y 、 z 上的投影为：

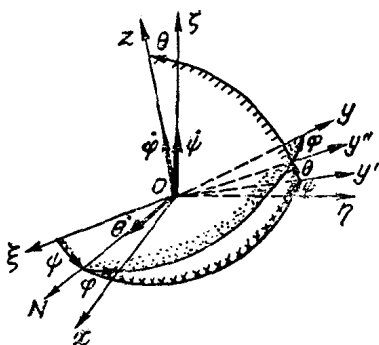


图 1-3

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}. \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

或

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (1-10)'$$

这就是刚体绕定点转动的欧拉运动学方程。

同样可得角速度 ω 在定轴 ξ, η, ζ 上的投影为:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi; \\ q_0 &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi; \\ r_0 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

或

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \\ 0 & \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (1-11)'$$

§ 1-3 无穷小转动·克雷洛夫角

一、无穷小转动和克雷洛夫角

我们知道,正如刚体的角速度可用矢量表示一样,刚体的无穷小转动也可用沿相应转轴的矢量来表示。如果刚体绕相交于一点的各轴作无穷小的转动,那末这些转动就可用一个转动来代替。这个总转动矢量等于那几个分转动的矢量和。而矢量合成法是适合交换律的,故总转动的大小和方向与分转动进行的顺序无关。①

① 证明见洛强斯基、路里叶著《理论力学教程》上册第二分册 § 73, 高等教育出版社, 1954 年。

由于稳定平台的广泛采用, 受陀螺控制的物体在平稳运动的情况下, 其姿态角变化很小。当研究陀螺定向的准确度时, 可将无穷小转动理论近似地应用于刚体的小转动上。应该注意, 刚体经过几个有限转动后的位置, 是与这些转动的顺序有关的。但是, 在小转动的情形下, 由于转动顺序的改变而引起的刚体位置的变化仅是一个二阶小量, 而且容易得到补偿和消除。因此, 刚体的小转动也可用矢量表示, 其合成也可用矢量加法。

研究刚体的微小位移时, 应用 § 1-1 中的 古典欧拉角是不恰当的。这里我们再引进一组定位角: δ 、 γ 、 φ , 统称克雷洛夫角, 其取法如图 1-4 所示: 设在任意瞬时, 动系 $Oxyz$ 据有图示位置。动平面 Oxy 与定平面 $O\eta\xi$ 有一交线 ON , 称为节线。节线 ON 与定轴 $O\eta$ 间的夹角用 δ 表示, $O\xi$ 轴为 δ 角的测量轴。中间轴 Oz' 与动轴 Oz 间的夹角用 γ 表示, ON 轴为 γ 角的测量轴。动轴 Oy 与节线 ON 间的夹角用 φ 表示, Oz 轴为 φ 角的测量轴。克雷洛夫角亦属欧拉角系统。

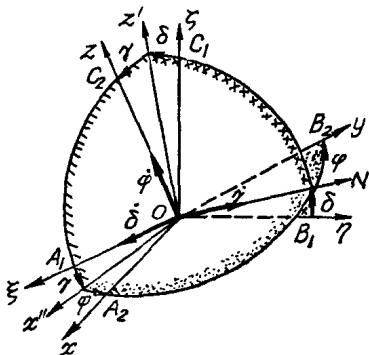


图 1-4

二、方向余弦表的简化

为了得到微小转动情况下两套坐标系各轴间夹角的余弦表, 或刚体从轴系 $O\xi\eta\zeta$ 到 $Oxyz$ 的坐标变换近似公式, 我们可以这样来进行: 设初始瞬时动系 $Oxyz$ 与定系 $O\xi\eta\zeta$ 相重合, 分别沿三根轴取 A_1 、 B_1 、 C_1 三点, 它们到坐标原点 O 的距离都等于 1 单位长度。刚体绕任意轴作微小转动 $\Delta\sigma$, 显然, 它沿三根测量轴有三个微小分量: δ 、 γ 、 φ 。转动后 A_1 、 B_1 、 C_1 到达新的位置 A_2 、 B_2 、 C_2 。从图 1-4 中直接可以得出, 点 A_2 、 B_2 、 C_2 在轴系 $O\xi\eta\zeta$ 中的坐标近似

值为:

$$\left. \begin{aligned} A_2(1, \varphi, -\gamma); \\ B_2(-\varphi, 1, \delta); \\ C_2(\gamma, -\delta, 1). \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

事实上, 刚体绕 $O\xi$ 轴转过一个小角 δ 后, A 点仍留在原处; 绕 ON 轴转过一个小角 γ 后, A 点朝 ξ 轴的负向移动一个 γ ($1 \times \gamma = \gamma$) 的距离; 最后, 绕 Oz 轴转过一个小角 φ 后, A 点朝 η 轴的正向移动一个 φ ($1 \times \varphi = \varphi$) 的距离。因此, 经三个连续的微小转动之后, A 点从 A_1 到达 A_2 , 其坐标为 $(1, \varphi, -\gamma)$ 。或者可以这样看: 在图 1-4 的左下角 A_1 至 A_2 之间的小范围内, 微小弧段 γ 和 φ 可近似地视为直线, 其中线段 γ 垂直于 $O\xi$ 朝下, 线段 φ 垂直于 Ox'' 朝右; 然后将 $\overline{OA_1} = 1, \varphi, \gamma$ 直接向定轴 ξ, η, ζ 投影即得 A_2 点的坐标近似值。类似地, 可得点 B_2, C_2 的坐标近似值式 (1-12)。

根据式 (1-12), 由点 A_2, B_2 和 C_2 的坐标所确定的线段 $\overline{OA_2}, \overline{OB_2}$ 和 $\overline{OC_2}$ 的长度等于 1 单位, 例如, 精确到包含二阶小量:

$$\overline{OA_2} \approx \sqrt{1 + \varphi^2 + \gamma^2} \approx 1.$$

因此, 点 A_2, B_2 和 C_2 的坐标, 可以看成是线段 $\overline{OA_2}, \overline{OB_2}$ 和 $\overline{OC_2}$, 亦即动轴 x, y, z 与定轴 ξ, η, ζ 间夹角的余弦。这样, 所求的简化方向余弦表如下:

	ξ	η	ζ
x	1	φ	$-\gamma$
y	$-\varphi$	1	δ
z	γ	$-\delta$	1

对应地, 从轴系 $O\xi\eta\zeta$ 到 $Oxyz$ 的近似坐标变换式如下:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi & -\gamma \\ -\varphi & 1 & \delta \\ \gamma & -\delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \quad (1-13)$$

三、用克雷洛夫角表示刚体的角速度

仿照上节方法,求得刚体的绝对角速度为

$$\omega = \dot{\delta} \mathbf{i}_0 + \dot{\gamma} \mathbf{n} + \dot{\phi} \mathbf{k}. \quad (1-14)$$

将上式投影至动轴 x, y, z , 得(图 1-4):

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\delta} \cos \gamma \cos \varphi + \dot{\gamma} \sin \varphi; \\ q &= -\dot{\delta} \cos \gamma \sin \varphi + \dot{\gamma} \cos \varphi; \\ r &= \dot{\delta} \sin \gamma + \dot{\phi}. \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

或

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\cos \gamma \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (1-15)'$$

我们仍然将上式称为欧拉运动学方程。对于小角有近似式

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi & 0 \\ -\varphi & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (1-16)$$

§ 1-4 有限转动的合成

上述无穷小转动理论,只能解决刚体定位中的特殊问题,而不能解决刚体定位的一般问题。由于近年来飞行体控制系统的发展,特别是捷联式惯性导航所提出的问题,远非无穷小转动理论所能解决,所以必须代之以有限转动理论。

当刚体绕定点作有限转动时,刚体内任一点 K (图 1-1) 在半径为 R 的球面上作有限位移。这时,不能再将 K 点的位移看成直线,或者说,不能将 K 点的轨迹曲面简化为平面。由此得出结论:刚体的有限转动不能用矢量来表示。如果刚体绕相交于一点的各轴作有限转动,这些转动仍然可以用一个总的转动来代替。这个总转动的大小与那几个连续转动的顺序无关;但总转动的最终位

置却与连续转动的顺序有关，其转轴的方向随连续转动顺序的改变而改变。^①有限转动的这个重要特性决定了对它的合成不能采用矢量加法，因为矢量加法是服从交换律的。同时也决定了即使采用其它方法解决有限转动的合成问题，但这些合成方法仍然不适合交换律。

下面介绍刚体有限转动的合成方法。

一、正交矩阵乘法

形如式(1-5)的变换矩阵 A ，若其中九个元素满足式(1-6)所列的六个关系，则这类矩阵称为正交矩阵。或者，一般地，设有矩阵

$$A = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (1-17)$$

若其中九个元素之间有下列关系式：

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \sum_{i=1}^3 a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{当 } j=k \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } j \neq k \text{ 时.} \end{cases} \quad (1-18)$$

则此矩阵即为正交矩阵。

正交条件反映了刚体的一种熟知的性质，即其内任意两点间的距离保持不变。为证明这一点，可设刚体内任一点 K 的矢径 R (图 1-1) 在 $O\xi\eta\zeta$ 各轴上的投影为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 ，在 $Oxyz$ 各轴上的投影为 x_1, x_2, x_3 。正交变换保持矢径 R 的长度不变，这意味着应满足如下等式：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 &= \sum_{i=1}^3 x_i^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} \xi_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} \xi_k \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} \right) \xi_j \xi_k, \end{aligned} \quad (1-19)$$

^① 参看汪家诒编《分析动力学》，高等教育出版社，1958年，第51页—第62页。

由此便可得出前面的关系式(1-18)。可见，凡表示刚体旋转变换的矩阵都应满足正交条件。

用九个方向角确定刚体的位置，其变换矩阵是方向余弦阵，当然也是正交的。有限转动的合成，可以通过正交矩阵的乘法运算来解决。

设刚体经由某个转动从初始位置 $x_0y_0z_0$ 到达终了位置 xyz ，其变换矩阵为 A 。可以将这个转动看成是两个顺次转动的结果：第一转动矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}; \quad (1-20)$$

第二转动矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (1-21)$$

与之相对应，刚体内任一点的矢径从初始位置 R_0 ，经第一转动到达 R_1 ，再经第二转动到达 R ，于是有矢量变换：

$$\begin{aligned} R_1 &= BR_0, \\ R &= CR_1 = CBR_0; \end{aligned} \quad (1-22)$$

另一方面，将式(1-4)写为矢量变换式，即

$$R = AR_0. \quad (1-23)$$

比较(1-22)与(1-23)两式，可立即得出：合成转动矩阵 A 等于两个顺次转动矩阵的逆乘，即

$$A = CB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}. \quad (1-24)$$

可见，两个有限转动的合成法对应于它们的变换矩阵的乘法。