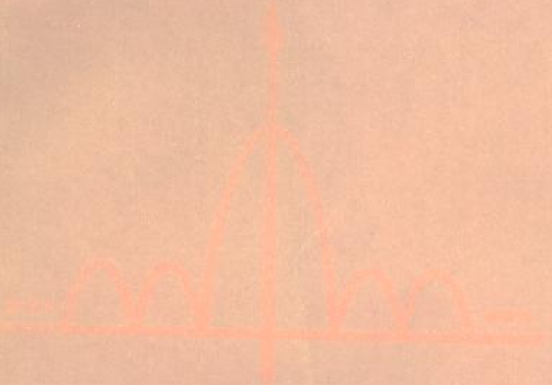
信号和綫性系統

（第二版）

〔美〕罗伯特A·加贝尔 理查德A·罗伯茨



石油工业出版社

73·602

信号和线性系统

第二版

〔美〕罗伯特 A. 加贝尔
理查德 A. 罗伯茨 著

狄其中 魏景琳 蔡永和 译

石油工业出版社

内 容 提 要

本书是美国科罗拉多大学线性系统分析教科书。作者在多年教学基础上，根据读者意见于1980年对第一版进行了全面修订，重新改写了约三分之二的篇幅，选材更为精炼、准确，并增加了许多新内容。本书还改善了材料的表述方式，强调了线性系统中各种分析方法的相互联系，更便于概念的理解和使用。为了深入说明研究材料，书中还列举了大量例题，并在每章后附有问题。可供有关大学生和从事计算机、控制系统、通讯、地震资料数字处理等工作的同志参考。

Robert A. Gabel

Richard A. Roberts

SIGNALS AND LINEAR SYSTEMS

SECOND EDITION

*

信号和线性系统

第二版

〔美〕罗伯特 A. 加贝尔 著
理查德 A. 罗伯茨

狄其中 魏景琳 蔡永和 译

*

石油工业出版社出版
（北京安定门外外馆东后街甲36号）
北京计量印刷厂排版印刷
新华书店北京发行所发行

*

850×1168毫米 32开本 15 5/8印张 411千字 印1—2,400
1987年8月北京第1版 1987年8月北京第1次印刷
书号：15037·2798 定价：3.65元

修订版序言

在与使用第一版的教师交换意见和我们自己多次使用之后，决定编个新的修订版，以改善本书的表述方式。在第一版中，强调了差分方程或微分方程模型，框图或流程图，脉冲响应描述，状态变量公式和传输函数特性等线性系统各种表达方式之间的关系。本书强调了这些描述间的紧密联系，使其在线性系统的分析和综合中使用起来有许多概念上、计算上的优点。材料的叙述方式尽可能有利于各论题的相互加强。修订版增加了一些新的结果。为了深入说明所研究的材料，增编了附加题。许多问题采用比较解法，因而学生可从中体验到各种不同表达方式的不同解法。

与前一版一样，材料是通用的，可以把它选作第二学期通讯系统，控制系统以及其他深入应用这些基本方法的课程的导引。假定学生已经具备大学二年级水平，也就是具备包括微分方程在内的数学基础知识和另一门主要专业课程（电路或力学）的知识，这些知识准备用来推导实际系统的数学模型。

在修订版中，最明显的改变是重新组织了第一章到第三章的材料。由于第一版过于强调了离散时间系统和连续时间系统分析之间的相似性，其在分开的章中采用了不同的分析方法。已经发现，如果把分散在各章中叙述的离散时间系统和连续时间系统的不同分析方法的有关材料，进行对照，行文也许会更加流畅一些。我和同事们（他们提供了两种描叙方式的材料）的体会是离散和连续时间系统分析之间的相似性比它们之间的关系（例如系统方程解的分析，褶积和积分以及状态变量描述）更易于为学生所理解。这种材料组织的改进，仍允许教师自己选择确定是从离散时间系统分析开始，还是从连续时间系统分析开始（我们的建议，已经反映在各章编排顺序上，先处理离散时间系统）。

为了有助于说明各种方法的目的性和它们之间的联系，我们较早地引进了系统频率响应的概念。频率响应的计算在叙述相继的系统模型时加以论证，而不是放到后面变换域讨论的章节之中。我们感到，这是提供在这里的主要特点，并且是大大活跃我们讨论的原因之一。

我们发现采用第一版的主要是选作电工系课程。所以根据使用者的建议，第四章Z变换的记号改为出版界约定的标准记号。有关频率响应的补充材料已经包括在前面有关的叙述之中。

第五章傅里叶分析已经作了重要修订，并扩充到包括离散时间信号和系统的傅里叶分析；也包括在*FIR*滤波器综合中，应用窗口结论方面的新材料和巧用快速傅里叶变换的新材料。这些材料用来进一步提高学生对离散和连续时间系统的理解力。

第七章在数字滤波综合方面已经改编，与标准设计方法相比叙述更加清楚。综合连续和离散时间系统方面的材料已放到教材小结的主要部分中去了。

本书是科罗拉多大学一学期的线性系统中级课程所用的教材。这门课程总共讲授40学时，在这段时间中，讲授了第一章到第六章的大部分内容。如果时间许可的话，可再选第七章讲授。在这里，提供材料的前后安排顺序，也可作另外的选择。例如，如果愿意先从连续时间系统开始，可将第二章和第三章的次序交换一下。同样，也可以将第五章和第六章的次序交换，在傅里叶变换和拉普拉斯变换之后介绍Z变换。如果时间是主要因素，我们建议，以牺牲Z变换和拉普拉斯变换为代价，着重讲授傅里叶分析方法。

我们衷心感谢采用本书第一版的教师和学生，他们提出了不少改进意见。特别要感谢我们的同事劳埃得·格里菲恩和汤姆·缪里斯，他们详细地讨论了这些材料，并且提供了许多问题和例题。

罗伯特A. 加贝尔

理查德A. 罗伯茨

目　　录

第一章　线性系统

§1.1　引言

线性系统的研究，多年来已是训练正规大学生必不可少的一部分。尽管完全的线性物理系统从来没有过，但是线性系统模型还是很有用的，因为它对于某些输入输出的值域来说是很合适的。另外，在分析这类系统时还有大量的数学理论可供科学家和工程师使用。相反，非线性系统的分析基本上是个别进行的，也就是说对非线性系统必须逐类逐个地进行研究，这里从来没有一般的分析方法。

我们常常采用特殊类型的输入信号，使给定的线性系统便于分析。因此，在线性系统的研究中自然要包括信号及其各种表示法的研究。我们将会看到，正弦波形及冲激信号做为系统的输入是特别有用的。

和工程师一样，我们不仅对系统的分析感兴趣，而且对系统的综合也很关心。事实上，系统的综合设计才是工程师富有创造性的工作部分。然而，和许多其它创造性的工作一样，在进行系统设计以前，必须先学习如何分析系统。虽然本书主要是针对某几类线性系统进行分析的，但由于设计和分析是紧密相联系的，所以这些内容将为简单的设计工作打下一个基础。

我们可以把系统的分析分成三个方面：

（1）对所关心的实际问题建立合适的数学模型。这要涉及到求运动方程以及边界条件、初始条件和参数值等等。这是一个把判断、经验及实验结合起来建立模型的过程。从某种意义上讲，这一步是研究模型的最困难之处。

（2）合适的数学模型建立以后，要进一步解方程，得到各

种形式的解。

(3) 对数学模型进行实际解释。我们希望在(1)中建立的数学模型有足够的准确性，以致对实际系统能够做出有意义的解释和推断。

本书侧重于上述的 (2)、(3) 两个方面。第一步固然很重要，但把模型的建立放到具体的学科中去研究会更完善些。因此，化学工程师要学习针对化学变化过程写方程，电器工程师针对电路写方程等等。当模型建立以后，还要研究解模型的各种方法，为模型的数学解释提供基础。

因为在工程科学技术的一切学科中，线性系统要经常用到，所以这个教材是很有用的。为了说明这个事实，大概最好的方法就是一一列举各式各样的实例。当然这个方法是有缺陷的，其唯一的缺陷就是读者不一定具有实现分析的第一步（写运动方程）所需要的基础知识。这个问题是预料到了的，但是当我们熟悉某一学科时，那么第一步就变成很自然的事情了。本书的大部分，将采用基于电机工程应用的线性模型。在各章末尾的一些问题中，还将提供一些其它学科有关的具体实例。

这本书要介绍分析线性系统的几种模型。其中每一个模型就其本身的意义来讲本来就是很有用的，但是如果从整体来看，它将对线性系统提供一个更加全面的观念。通过各种不同技术侧面考虑，我们希望统一读者对线性系统这个课题的认识。

§1.2 线性系统的分类

一个系统就是一个数学模型，或者是对一个物理过程的抽象。这里所说的物理过程把输入（或外力）与输出（或系统的响应）相联系了起来。系统有各种各样的分类方法，或者说有各种不同类型的系统。

因果系统（或称非预测系统）在任意时刻 t_0 的输出只是 t_0 以前已经发生了的时刻（最多到达 t_0）以及 t_0 这个时刻的输入值的函数。换句话说，因果系统只对于已经施于系统的输入值有

所响应。按这种说法，看来所有实时物理系统都是因果系统。然而我们要指出，在许多的应用中可以使用非因果系统。

系统的状态是一个基本概念。状态是含变量最少的一个变量组，这些变量是经过选择了的，以致如果这些变量在 t_0 时刻的值已知并且大于 t_0 时刻所有输入也已知时，就可以计算大于 t_0 时刻的系统的输出值。系统的状态可以认为是系统的记忆。在 t_0 时刻的记忆概括了所有过去的输入以及任何初始状态或记忆的影响。

一般，输入、状态和输出是变量组，这可以表示成矢量。例如，n 个变量的输入可以写为：

$$\mathbf{u}(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

我们用 $\mathbf{u}$、$\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{x}$ 分别表示输入、输出和状态变量。同类的不同矢量可以用上标加以区分，例如 $\mathbf{u}^1$、$\mathbf{u}^2$ 等等。

这里将关注连续时间和离散时间这两种系统。所谓连续时间系统是这样的系统：其输入、输出和状态全是连续时间变量 t 的函数。同时我们也研究时间变量只在离散的瞬时 t_k 时刻定义的系统，这里的 k 是整数。这种系统叫做离散时刻系统。

我们用 $f(t)$ 表示连续时间的函数。在不引起混淆的情况下，有时也只用 f 表示。在 t 时刻的值是 $f(t)$ 。同样，用 $f(k)$（或 f）表示离散时间函数，在 $t=t_k$ 时刻的值用记号 $f(t_k)\equiv f(k_t)\equiv f(k)\equiv f_k$ 表示。请注意，$f(k)$ 本身是连续变量，只是它的自变数是离散的。离散时间函数通常称做时间序列或简称为序列。因此，n 个变量的输入序列可以表示为

$$\mathbf{u}(k)\equiv\mathbf{u}\equiv\begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n(k) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

我们的物理系统被限定为常参数系统，即假定系统的参数不随时间而改变。从这将引出时不变和时移不变系统的概念。一个时不变的连续系统可如下表示其特征：如果输入 $u(t)$ 产生一个输出 $y(t)$ ，那么对于经过时移了的输入 $u(t\pm\tau)$ 产生一个输出 $y(t\pm\tau)$ 。同样，对于一个时移不变的离散系统来说，如果输入 $u(k)$ 产生一个输出 $y(k)$ ，那么 $u(k\pm n)$ 产生一个输出 $y(k\pm n)$ 。换句话说，这种系统的响应与时间原点无关，只与输入的形式有关。

接着我们还要考虑线性时不变系统。这种系统常常用常系数线性微分（或差分）方程来描述其特征。这些方程分别是连续或离散时间系统的基本模型。

§1.3 线性

我们已经用不同的方法对系统进行了分类。系统理论当中最重要的概念之一就是线性。严格地说什么是线性系统？首先我们讲，线性系统具有迭加性。即如果 u^1 产生一个输出 y^1，u^2 产生一个输出 y^2，那么（u^1+u^2）产生输出（y^1+y^2）用符号表示，如果

$$u^1\to y^1$$

并且

$$u^2\to y^2 \tag{1.3}$$

那么

$$u^1+u^2\to y^1+y^2$$

对于 u^j，$j=1, 2, \cdots\cdots$类的输入，迭加性还意味着
如果

$$u\to y \tag{1.4}$$

那么

$$\alpha u\to\alpha y,\quad \alpha\text{ 是一个有理数}$$

这后一个性质如果对所有的 α 都成立的话，这性质就叫做齐次性。

(1.3) 或 (1.4) 中的箭头可以用函数的符号表示，并且系统可以表示成为从输入 u 到输出 y 的变换 T。如果 T 满足

$$T(\alpha u^1+\beta u^2)=\alpha T(u^1)+\beta T(u^2) \tag{1.5}$$

系统就是线性的，其中 α 和 β 是任意常数。怎样验证一个系统是不是线性的，请看以下例题。

例 1.1 假定一个系统的输入与输出的关系由以下线性方程给出

$$y=au+b \qquad a \text{ 和 } b \text{ 是常数} \tag{1.6}$$

这个关系能表示一个线性系统的输入与输出的关系吗？我们可以把 (1.6) 写为

$$y=T(u)=au+b$$

考虑两个输入 u^1 和 u^2。相应的输出是

$$T(u^1)=au^1+b$$

$$T(u^2)=au^2+b$$

现在提供一个输入 (u^1+u^2)，输出是

$$T(u^1+u^2)=a(u^1+u^2)+b$$

但是要注意到：

$$\begin{aligned}T(u^1+u^2)&=au^1+b+au^2+b\\&=a(u^1+u^2)+2b\\&\neq T(u^1+u^2)\end{aligned}$$

因此，这系统不是线性系统！问题在于 au 要加上 b。正是这个在原点的纵截距 b 破坏了迭加性。

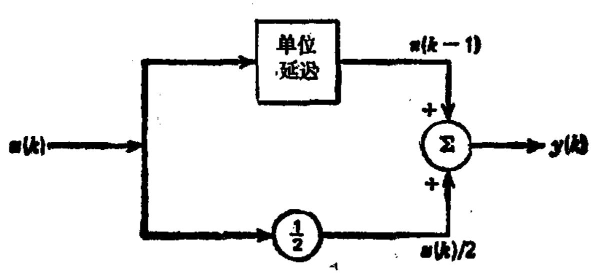


图 1.1

例1.2　考虑图1.1所表示的离散时间系统。这个方框图包括一个单位延迟器、一个值为$\frac{1}{2}$的乘法器和一个加法器。延迟器是把先前值送到系统中的装置。在这里的情况是把输入的先前值送入系统。对于输出，方程是

$$y(k)=\frac{1}{2}u(k)+u(k-1) \tag{1.7}$$

这个系统满足迭加性吗？输入u^1产生一个输出

$$y^1(k)=\frac{1}{2}u^1(k)+u^1(k-1)$$

输入u^2产生输出

$$y^2(k)=\frac{1}{2}u^2(k)+u^2(k-1)$$

由$\alpha u^1+\beta u^2$组成的输入产生输出

$$\begin{aligned}y(k)&=\frac{1}{2}[\alpha u^1(k)+\beta u^2(k)]+[\alpha u^1(k-1)+\beta u^2(k-1)]\\&=\frac{1}{2}\alpha u^1(k)+\alpha u^1(k-1)+\frac{1}{2}\beta u^2(k)+\beta u^2(k-1)\\&=\alpha y^1(k)+\beta y^2(k)\end{aligned}$$

因此这个离散时间系统是线性的。

例1.3　如图1.2所表示的简单的RC网络，有输入电流$i(t)$和输出电压$e(t)$。从$i(t)$到$e(t)$的变换是线性的吗？假定储存在系统里的初始能量是零（这意味着电容一开始时没有电荷）。我们用克希霍夫定律可以写出

$$e(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' \tag{1.8}$$

容易验证（1.8）代表一线性系统的输入输出关系。假定有两个单独输入的$i_1(t)$和$i_2(t)$，相应的输出是

$$e_1(t)=Ri_1(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_1(t')dt'$$

$$e_2(t)=Ri_2(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(t')dt'$$

如果输入 $\alpha i_1(t)+\beta i_2(t)$，输出则是

$$e(t)=R[\alpha i_1(t)+\beta i_2(t)]+\frac{1}{C}\int_0^t[\alpha i_1(t')+\beta i_2(t')]dt'$$

$$=\alpha\left[Ri_1(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_1(t')dt'\right]+\beta\left[Ri_2(t)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(t')\ dt'\right]$$

$$=\alpha e_1(t)+\beta e_2(t)$$

因此，图 1.2 的系统满足迭加性，所以是线性的。注意，在这个例子中，已经假定电容上的初始电压是零，否则电容上有初始电荷。假定初始电压的正负是沿顺时针电压降落的方向，那么得出的克希霍夫电压方程是

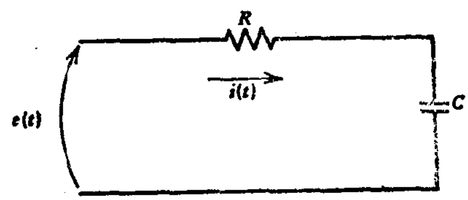


图 1.2

$$e(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'+v_0,\quad t\geqslant 0 \tag{1.9}$$

其中

$$v_0=\frac{q}{C}=\frac{\int_{-\infty}^0 i(t')dt'}{C}$$

是电容上的初始电压。因为常数 v_0 代表初始能量储存，所以 (1.9) 表示的 $i(t)$ 与 $e(t)$ 之间的输入输出关系不再是线性关系。这与例 1.1 不是线性系统的道理是一样的。在验证一个系统

是不是线性系统时总是置初始条件为零。若不这样做，得出的输入输出方程就要包括由非零初始条件引起的常数项，在这种情况下就不满足迭加性。事实上，一旦线性系统加上了非零初始条件，这个系统就要呈现非线性。

1. 在线性系统中的初始能量储存

具有初始能量储存的线性系统采取一定办法后可以当做线性系统来分析，这个办法是把总响应分解成两个单独分离的响应：一个是对初始能量储存的响应，另一个是对系统的输入的响应。这个分解如图 1.3 所示。在图 1.3 中所有用 T 标志的系统都是等价的。我们把系统的输出 y 写成 $y^{(d)}$ 与 $y^{(h)}$ 的和。其中 $y^{(d)}$ 是输入为 u 的一个初始松弛的系统的输出，$y^{(h)}$ 是输入为零、初始条件与原系统初始条件一样的系统的输出。

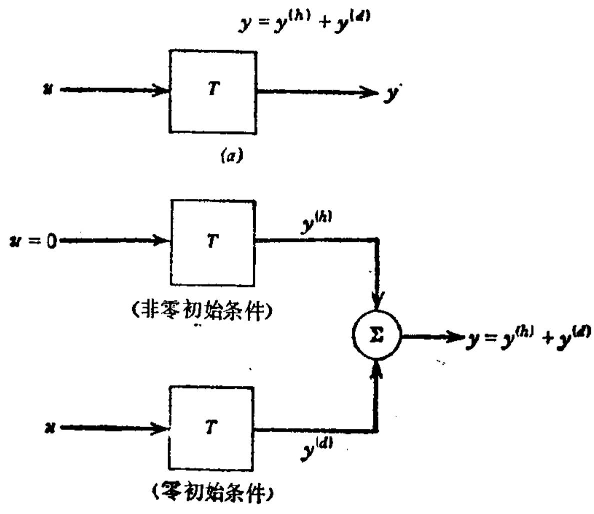


图 1.3

分解了的系统的解 $y=y^{(h)}+y^{(d)}$ 与原系统的解等价。这两个解都满足相同的微分方程或差分方程，它们有相同的初始条件。

例 1.4　例 1.1 的系统用代数方程