最优控制理论

L.D.伯科维茨 著

上海科学技术出版社

最优控制理论

L. D. 伯科维茨　著

贺建勋　连瑞兴　黄伙泉
曾昭磐　蔡维璇　译

上海科学技术出版社

L. D. Berkovitz

OPTIMAL CONTROL THEORY

Springer-Verlag · 1974

最优控制理论

L. D. 伯科维茨 著

贺建勋 连瑞兴 黄伙泉 曾昭磐 蔡维璇 译

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.375 字数 194,000

1985 年 5 月第 1 版 1985 年 5 月第 1 次印刷

印数: 1—10,800

统一书号: 13119·1216 定价: 1.65 元

原　序

本书介绍由常微分方程描述的受控过程的最优控制数学理论，它是为数学方面和应用领域里的学生和有关专业人员写的，他们对于这个课题及其跟应用的联系需要有一本广泛却又比较深刻、简明而又清晰的入门书．为了适应读者之间数学兴趣和基础知识的差别，我们把材料安排得可以使读者省略书中较高深的数学部分而不损害其理解的连贯性．对那些主要兴趣在于应用方面的读者，我们建议至少阅读第一章，第二、三、四章中引言部分推荐的各节，以及第五章全部．在每一章的引言部分都有进一步指导个别读者阅读他感兴趣的材料的说明．对于学习过相当多高等微积分教程的读者，应能理解本书中的定义和定理的表述，也应能接受其中的大部分数学推导．任何精通 Lebesque 积分和泛函分析基本概念的人，他们是能够读懂全书的．

对于希望在应用上了解更多的读者，我们建议他们阅读列在书末文献目录中的参考文献[2]、[13]、[33]、[35]和[50]．对于希望学习更多有关数学概念和某些本书没有讨论的专题的读者，可看参考文献[27]、[28]、[33]、[48]、[50]、[59]和[61]．

书中的定理，需要标明号码的方程、公式、不等式和定义等等，按下叙方式采用小数点编号：定理 III.7.2 表示第三章第 7 节中的定理 2．在第三章之外引用这个定理时，记为“定理 III.7.2”；在第三章中提到它时，简记为“定理 7.2”．需要标明号码的公式、方程、不等式等，也都采用类似的记号．

（下为誌谢部分，译略．）

L. D. 伯科维茨

美国印第安纳州，西拉法伊蒂

1974 年 8 月 5 日

译 者 的 话

本书是在1978年的译稿的基础上，由参加翻译的同志再进行认真修改，经集体讨论，然后统一定稿的．参加翻译的同志有贺建勋(序、第一章)，连瑞兴(第二、五章)，黄伙泉(第三章)，曾昭磐(第四章)，蔡维璇(第六章)；最后，由贺建勋、连瑞兴负责全书的统一定稿工作．李文清教授对原译稿进行过初校，黄淑兰同志参加过第五章原译稿的部分翻译工作．译稿曾作为厦门大学研究生和进修教师的教材，参加学习的同志对译稿提出了许多宝贵的意见．译者感谢李文清教授的热情帮助和鼓励；对大力支持本书翻译工作的厦门大学最优控制与常微分方程教研室的其他教师、进修教师和研究生亦表示深切的谢意．

本书译稿虽几经统一校阅，但限于水平，难免还会有错误和不妥之处，欢迎读者批评指正．

译 者

1981年4月

目　录

第一章　控制问题的实例

1. 引　　言

近年来，在不同的领域内已出现了一类有着共同的数学表达形式的重要问题，这就是所谓控制问题. 不管这些问题的现代起源如何，从数学的观点看，它们不过是一类已经进行了几百年研究的变分法问题的变形.

本章我们将介绍控制问题的一些实例，它们来自不同的应用领域. 这样列举问题的目的，是为了说明控制问题起源的多样性，指出它们的重要性，以及诱导这些问题的数学表达形式. 所举的这些实例不应该理解为我们的单子是完整的，或者认为我们在每个领域里已经选择了最有意义的问题. 事实上，为了使举例不致于太复杂，我们尽量选取了十分简单的问题.

2. 生产计划问题

第一个问题是来自经济学的，它是一个生产计划方面的问题. 设 T 是一个固定时间；$x(t)$ 表示在时刻 $t(0\leqslant t\leqslant T)$ 的商品存货量；$r(t)\geqslant 0$ 表示在时刻 t 时对商品的需求率，这里假定 $r(t)$ 是一个定义在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上的时间 t 的已知连续函数；设 $u(t)$ 表示在时刻 $t(0\leqslant t\leqslant T)$ 的生产率，函数 u 由生产计划人员来选取，它就是生产计划或者叫做控制. 我们将取 u 为 $0\leqslant t\leqslant T$ 上的分段连续函数. 如果我们要求的所有条件被满足，则存货量 x 由微分方程

$$\frac{dx}{dt}=-r(t)+u(t),\ x(0)=x_0 \tag{2.1}$$

所确定，其中 x_0 是原来的库存水平，且 $x_0>0$. 从 $x(t)$ 的实际意义来看，显然必须选取生产计划 u，使得对所有 $0\leqslant t\leqslant T$，有

$$x(t) \geqslant 0. \tag{2.2}$$

其次，因为要有一定的库存，而且生产能力受到工厂设备的限制，所以有理由要求函数 u 对所有的 $0 \leqslant t \leqslant T$ 满足约束条件：

$$0 \leqslant u(t) \leqslant A. \tag{2.3}$$

这里 $A>0$，它表示最大可能的生产率．一个满足(2.3)的生产计划 u，使得(2.1)的相应解在整个 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上存在而且满足(2.2)时，我们就把它叫做容许计划或容许控制．

在这里自然发生这样的问题：即是否存在容许计划的问题．假如 A 足够地大，则确实存在容许计划．例如，若令

$$M = \sup[x(t): 0 \leqslant t \leqslant T],$$

且 $A>M$，则 $u(t)=A$ 就是一个容许计划．今后，我们将假定容许计划是存在的．

我们假定：每个单位时间的生产成本是生产率的函数 h．这样，在时刻 t 时的生产率是 $u(t)$，则单位时间的生产成本是 $h(u(t))$．设 $b>0$ 是单位时间贮藏单位商品的费用．于是，在时刻 t 时计算这个系统的单位时间的成本是

$$f(t, x(t), u(t)) = h(u(t)) + bx(t), \tag{2.4}$$

因此总成本由

$$C(u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t))dt \tag{2.5}$$

给出．其中 $x(t)$ 是方程(2.1)与容许生产计划 u 相对应的解．我们采用记号 $C(u)$ 表示这个成本，因为当需求率 r 和开始的存货量 x_0 被指定以后，这个成本只依赖于函数 u 的选取．这里我们得到一个泛函的例子，它对于给定函数类中的每个函数 u 赋予一个确定的实数．

对于生产计划人员来说，问题是要选取一个容许控制 u，使得总成本 $C(u)$ 达到极小值．

3. 化学工程

设 $x^1(t), \cdots, x^n(t)$ 表示反应器中几种物质在时刻 t 的浓度，

这 n 种物质在反应器中同时发生化学反应．设反应速率由微分方程组

$$\frac{dx^i}{dt}=G^i(x^1,\ \cdots,\ x^n,\ \theta(t),\ p(t)),\ x^i(0)=x_0^i,\ i=1,\ \cdots,\ n, \tag{3.1}$$

来决定，其中 $\theta(t)$ 是时刻 t 反应器内的温度，$p(t)$ 是时刻 t 反应器内的压力．我们能够在每个时刻控制温度和压力，而温度和压力满足约束条件：

$$\begin{aligned}&\theta_b\leqslant\theta(t)\leqslant\theta_a,\\&p_b\leqslant p(t)\leqslant p_a,\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 θ_a, θ_b, p_a 和 p_b 都是常数．它们分别表示温度和压力可以达到的最大值和最小值．

我们设反应持续进行了一段时间 T．在时刻 T 的浓度是 $x^1(T)$, $\cdots$, $x^n(T)$．与每种产品相联系的是一个经济价值或者叫做价格 c^i, $i=1,\ \cdots,\ n$．价格可以是负的，因为不合格的废品必须当作某种消耗来处理．于是，最终产品的价值是

$$v(p,\ \theta)=\sum_{i=1}^{n}c^ix^i(T). \tag{3.3}$$

当给定了一组初始浓度 x_0^i，假若函数 G^i 具有某些合适的性质，则最终产品的价格就可以根据函数 p 和 θ 的选取而完全确定．因此记号 $v(p,\ \theta)$ 是另一个泛函的例子，在这种情形，对于某个集合中的每一函数对 $(p,\ \theta)$，我们得到一个确定的实数．

这里的问题是：要求在区间 $[0,\ T]$ 上选取分段连续函数 p 和 θ，使其满足(3.2)，同时使得 $v(p,\ \theta)$ 取最大值．

上述问题的一个变形如下：不要求反应持续进行一个固定时间 T，而是当反应物之一，比如说 x^1 达到预先指定的浓度 x_f^1 时，即停止反应．这时终止时刻 t_f 不是预先固定的，而是方程 $x^1(t)=x_f^1$ 的最小正根．现在的问题是要使

$$v(p,\ \theta)=\sum_{i=2}^{n}c^ix^i(t_f)-k^2t_f$$

取最大值，其中项 k^2t_f 表示反应器运转的代价．

问题还有另一种变形：即当反应物中的几种反应物达到预先指定的浓度，比如说 $x^1=x_f^1$, $x^2=x_f^2$, $\cdots$, $x^i=x_f^i$ 时，停止反应．此时最终产品的价值是

$$\sum_{i=j+1}^{n} c^i x^i(t_f)-k^2 t_f.$$

我们注意到，在问题的最后两种变形中，当我们处理极大值问题之前，有另外的问题必须考虑，亦即使用容许函数类中的压力函数 p 和温度函数 θ 时，我们能否达到所要求的最终浓度．

4. 飞行力学

在这个问题中，我们把火箭当作可变质量的点，而忽略掉它的转动惯量．假定火箭的运动发生在相对于某个固定(坐标)架的平面上，设 $y=(y^1, y^2)$ 表示火箭的位置向量，$v=(v^1, v^2)$ 表示火箭的速度向量，于是

$$\frac{dy^i}{dt}=v^i, \quad y^i(0)=y_0^i, \qquad i=1,\ 2, \tag{4.1}$$

其中 $y_0=(y_0^1, y_0^2)$表示火箭的初始位置．

设 $\beta(t)$表示在时刻 t 火箭燃料燃烧的速率，$m(t)$表示时刻 t 火箭的质量．于是

$$\frac{dm}{dt}=-\beta. \tag{4.2}$$

火箭的质量等于燃料的质量加上飞行器的质量 $a>0$，因此我们有 $m(t)\geqslant a$.

设 $\omega(t)$表示在时刻 t 推力向量与正 y^1-轴的夹角．燃烧速率和推力角将受约束条件

$$0\leqslant\beta_0\leqslant\beta(t)\leqslant\beta_1, \qquad \omega_0\leqslant\omega(t)\leqslant\omega_1 \tag{4.3}$$

的支配，其中 β_0, β_1, ω_0 和 ω_1 是固定的．

为了得到完整的火箭运动方程，我们分析火箭在作直线运动时的动量转移．设在时刻 t 时，火箭的质量为 m，速度为 v，则动量为 mv．设在时间区间 δt 的期间，火箭烧掉的燃料量为 $\delta\mu>0$．在时刻 $t+\delta t$ 时，设喷射燃烧生成物的速度为 v'，它们的质量显然

是 $\delta\mu$. 又在时刻 $t+\delta t$ 时设火箭的速度是 $v+\delta v$, 则它的质量显然是 $m-\delta\mu$. 设我们考虑在时刻 t 时由火箭的质量 m 和速度 v 组成的系统, 在时刻 $t+\delta t$ 时这个系统由火箭和所喷射的燃烧生成物组成. 所以这个系统在时间区间 δt 内动量的变化是

$$(\delta\mu)v'+(m-\delta\mu)(v+\delta v)-mv.$$

如果我们用 δt 去除上述表达式然后令 $\delta t\to 0$, 我们就得到这个系统动量的变化率, 它必须等于作用在这个系统上的外力之和. 因此, 假如 F 是作用在这个系统的每单位质量上的合成外力, 我们就有

$$Fm-(v'-v)\frac{d\mu}{dt}=m\frac{dv}{dt}.$$

如果假定燃烧生成物相对于火箭的速度 $(v'-v)$ 是常数 c, 同时假定我们采用 $\dfrac{d\mu}{dt}=\beta$, 则就得到

$$F-\frac{c\beta}{m}=\frac{dv}{dt}.$$

如果把上面的分析用于平面运动的每一个分量上, 我们就得到下面的方程:

$$\begin{cases}\dfrac{dv^1}{dt}=F^1-\dfrac{c\beta}{m}\cos\omega,\\[2mm] \dfrac{dv^2}{dt}=F^2-\dfrac{c\beta}{m}\sin\omega,\\[2mm] v^i(0)=v_0^i,\quad i=1,\ 2.\end{cases}\tag{4.4}$$

此方程和(4.1), (4.2), (4.3)一起, 决定了平面上的火箭运动. 这里, 若假定运动发生在一个非常数的引力场, 而且假若有阻力作用在火箭上的话, 则力 F 的分量可以是 y 和 v 的函数.

涉及火箭运动的控制问题具有如下形式: 从分段连续函数类(或某个其它适当的函数类)中, 选取燃烧速率控制 β 和推力方向控制 ω 使变量 t, y, v, m 中的某些达到指定的终端值, 并从那些能使达到这些终端值的控制中去决定一个控制, 它使其余终端值的一个给定函数取极大(或极小)值. 在另一类问题中, 是使一个沿着轨线计算的积分在状态空间中取极值.

更具体地说，我们考虑“最省燃料问题”. 它要求火箭从一个指定的初始点 y_0 飞到一个指定的终点 y_f 而使燃料消耗最少. 这个问题是很重要的，理由如下：因为能造出且能飞升的火箭加燃料和负载的总重量根据技术的情况是受到限制的，因而要求较少的燃料消耗能使火箭携带较多的负载. 从(4.2)我们有

$$m_f = m_0 - \int_{t_0}^{t_f} \beta(t)dt,$$

其中 t_0 是初始时刻，t_f 是终止时刻(在此时刻火箭达到 y_f)，m_f 是最后的质量，m_0 是初始质量，所以燃料的消耗是 $m_0 - m_f$. 因此，在满足(4.1)～(4.4)的条件下，燃料消耗最少的问题是使

$$P(\beta, \omega) = \int_{t_0}^{t_f} \beta(t)dt \tag{4.5}$$

取最小值. 这个问题等价于 m_f 取最大值的问题. 在最少燃料消耗问题中，假如容许“硬着陆”的话，最终的速度向量 v_f 不必指定；假如是“软着陆”，则必须指定. 而终止时刻 t_f 可以是指定的，也可以是不指定的.

另一个实例是与一个运动着的目标交会的问题. 设运动目标在时刻 t 的位置向量是 $z(t) = (z^1(t), z^2(t))$，在时刻 t 的速度向量是 $w(t) = (w^1(t), w^2(t))$，其中 w^1 和 w^2 是连续函数. 我们假定存在满足(4.3)的推力程序 β 和 ω，它们使得交会能够实现. 在数学上这表示对应于所选取的 β 和 ω，运动方程的解 $y(t)$，$v(t)$ 能使方程

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t), \\ v(t) &= w(t) \end{aligned} \tag{4.6}$$

有正的解. 这样的控制(β, ω)叫做容许的. 因为对于每个容许的 β 和 ω，相应的解 y 和 v 是连续的，又因为按假设 Z 和 w 也是连续的，于是得出：对于每个容许对(β, ω)，有使(4.6)成立的最小正解 $t_f(\beta, \omega)$，数 $t_f(\beta, \omega)$ 是交会的时间. 这里可能出现两个问题：第一，要求从容许控制中决定一个控制，它给出最大的负载，亦即使 $m_f = m_f(\beta, \omega)$ 取最大值. 第二，使交会的时间 $t_f(\beta, \omega)$ 最小.

5. 电 机 工 程

用伺服机构把一个控制面保持在某个任意位置上. 设外界的各种干扰,诸如偶尔出现的一阵阵风等,它们相对于伺服机构的时间常数来说是短暂的. 我们用一个直流电动机提供一个力矩把控制面引到所希望的位置. 只有电动机中的电枢电压 v 是可控的. 为简明起见,我们取所希望的位置为零位角,并且测量与所希望的位置发生的偏差角 θ. 关于 θ 的微分方程经过适当的标准化以后可以写成

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+a\frac{d\theta}{dt}+\omega^2\theta=u,\ \theta(0)=\theta_0,\ \theta'(0)=\theta'_0. \tag{5.1}$$

这里 u 表示加在控制面上的恢复力矩, $a\dfrac{d\theta}{dt}$ 表示阻尼效应. 假如不出现阻尼, 则 $a=0$. 因为电压源不能提供绝对值大于某个 v_0 的电压,于是恢复力矩的绝对值必须有界. 因此,我们有

$$|u(t)|\leqslant A, \tag{5.2}$$

其中 A 是一个常数.

假如令
$$x^1=\theta,\ x^2=\frac{d\theta}{dt},$$
我们就可以改写方程(5.1)为下面的形式:

$$\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt}&=x^2, & x^1(0)&=\theta_0,\\ \frac{dx^2}{dt}&=-ax^2-\omega^2x^1+u, & x^2(0)&=\theta'_0.\end{aligned} \tag{5.3}$$

问题如下: 假如由静止时所希望的位置经一短暂的干扰已引起了一个偏差 $\theta=\theta_0$, $\dfrac{d\theta}{dt}=\theta'_0$, 应如何随时改变电压以使在最短的可能时间内把控制面恢复到设定的位置 $\theta=0$, $\dfrac{d\theta}{dt}=0$? 根据(5.3), 这个问题就是从适当的函数类中选取函数 u, 比如说从分段连续函数类中选取 u, 使 u 在每一时刻满足 (5.2), 并且使方程(5.3)对应于这个 u 的解(x^1, x^2)在最短的时间内达到 (x^1, x^2)-空间的坐标原点.

6. 捷线问题

现在我们介绍变分法中的一个问题，也就是1696年John Bernoulli提出来的所谓捷线问题．这个问题可以认为是变分法理论的出发点．Galileo看来也曾经在1630年和1638年考虑过这个问题，但是他的表达形式不是很明确的．

设在一个铅垂平面上给定P_0和P_1两点，使得P_0高于P_1．一个粒子或质点单纯由于地心引力的作用沿着连接P_0和P_1的曲线C运动；而且质点沿着曲线在点P_0具有初始速度v_0．问题是如何选取曲线C使得质点从P_0到P_1所化的时间最短．

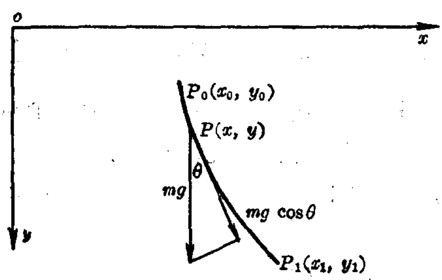

图 1

为了解析地表达这个问题，我们在平面上建立一个坐标系，如左图1所示．设点P_0具有坐标$(x_0,\ y_0)$，点P_1具有坐标$(x_1,\ y_1)$；且设曲线C的方程为$y=y(x)$；又设s_1表示P_0和P_1之间C的弧长．我们要确定从P_0到P_1经过C所需要的时间．

设P是C上具有坐标$(x,\ y)$的点，在这一点上质点因地心引力沿着曲线作用的分量是$mg\cos\theta$，其中θ是这一点的切线与向下铅垂线（正y轴）所成的夹角．从而如果设$s(t)$是质点从P_0出发在t秒钟内沿着曲线C经过的距离，我们就有

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg\cos\theta.$$

假如用$2m^{-1}\dfrac{ds}{dt}$乘这个方程的两边，并且使用关系式$\dfrac{dy}{ds}=\cos\theta$，就得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2g\frac{dy}{dt}.$$

如果令$v=\dfrac{ds}{dt}$，并且在初始点P_0和点P之间的曲线上积分这个

关系式，就得到

$$v^2-v_0^2=2g(y-y_0).$$

这个方程能够改写成形式

$$\frac{ds}{dt}=[2g(y-\alpha)]^{\frac{1}{2}}, \tag{6.1}$$

其中 $\alpha=y_0-(v_0^2/2g)$.

因此，若使用关系式

$$ds=[1+(y')^2]^{\frac{1}{2}}dx,$$

我们就得到沿着 C 从 P_0 到 P_1 所化的时间 τ 是

$$\tau=\int_0^\tau dt=\int_0^{s_1}\frac{ds}{[2g(y-\alpha)]^{\frac{1}{2}}}=(2g)^{-\frac{1}{2}}\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1+(y')^2}{y-\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}dx.$$

于是，除常数因子 $(2g)^{-\frac{1}{2}}$ 之外，寻找曲线 C 使质点从 P_0 到 P_1 之间转移时间最小的问题等价于下面的问题：在 $[x_0, x_1]$ 上可微且满足条件 $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ 的函数类 Y 中，寻找一个函数 y，使得积分

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{1+(y')^2}{y-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

取最小值.

我们可以把这个问题表达成跟前面的问题具有相同的格式. 把独立变量 x 的符号改成 t，并令

$$y'=u,\ y(t_0)=y_0. \tag{6.2}$$

连续函数 u 叫做容许函数，假如它在 $[t_0, t_1]$ 上定义，而且假如对应于这个函数 u 方程 (6.2) 的解 $y(t)$ 满足 $y(t_1)=y_1$. 我们的问题是：在所有的容许函数 u 的类中，找出一个容许函数 u，使得

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1+u^2}{y-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}dt$$

取最小值.

我们指出，捷线问题能够用不同的形式表示成控制问题. 由 (6.1)，质点沿着曲线 C 的速度由 $[2g(y-\alpha)]^{\frac{1}{2}}$ 给出，因此假如 θ

如图 1 所示，使得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=[2g(y-\alpha)]^{\frac{1}{2}}\sin\theta,\\ \dfrac{dy}{dt}=[2g(y-\alpha)]^{\frac{1}{2}}\cos\theta.\end{cases}$$

令 $u=\sin\theta$，则运动方程变为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=[2g(y-\alpha)]^{\frac{1}{2}}u, & x(t_0)=x_0,\\ \dfrac{dy}{dt}=[2g(y-\alpha)]^{\frac{1}{2}}(1-u^2)^{\frac{1}{2}}, & y(t_0)=y_0.\end{cases}\tag{6.3}$$

于是问题变为选取一个控制 u，满足 $|u|\leqslant 1$，使得在初始时刻 t_0 从 $P_0(x_0, y_0)$ 出发的点 $P(x, y)$，以最短的时间达到规定的点 $P_1(x_1, y_1)$. 假如 t_1 是达到 P_1 的时刻，则它等价于使 t_1-t_0 取最小值. 它也等价于在满足方程(6.3)和约束 $|u|\leqslant 1$ 的条件下使积分

$$\int_{t_0}^{t_1} dt$$

取最小值.

捷线问题能够用下面的方式修改：人们可以提出由 $y=y_1(x)$ 确定的曲线 Γ_1 来代替固定点 P_1，然后寻找连接 P_0 到 Γ_1 的曲线 C，使质点必须沿此曲线移动，而在最短的时间内从 P_0 到达 Γ_1. 我们也可以用曲线 Γ_0 代替 P_0，其中 Γ_0 与 Γ_1 相隔一个正的距离，要求找出一条连接 Γ_0 和 Γ_1 的曲线 C. 使质点必须沿此曲线移动，而使转移时间最短.