



第六次国际大坝会议论文选集之四

坝体应力分析、温度计算 和坝工设计

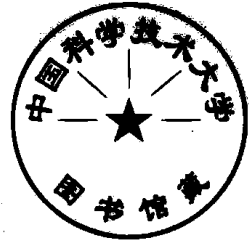
S. G. 古脱曼等著

水利电力出版社

第六次国际大壩會議論文选集之四

坝体应力分析、溫度計算 和 坝 工 設 計

S. G. 古 脫 曼 等 著
水利水电科学研究院譯



水利电力出版社

內 容 提 要

本书是1958年在紐約召开的第六次国际大坝會議論文选集之四，其主要内容是介紹有关混凝土坝溫度及热应力的模型試驗和計算，拱坝应力分析，以及坝工設計实例等共18篇文章。可供水利水电部門的設計、施工，科学研究工作人員，以及高等院校水利系师生参考。

坝体应力分析、溫度計算和坝工設計

S.G.古脫曼等著 水利水电科学研究院譯

*

2306 S 708

水利电力出版社出版（北京西郊科学路二里内）

北京市书刊出版业营业許可證出字第105号

水利电力出版社印刷厂排印

新华书店科技发行所发行 各地新华书店經售

*

850×1168 1/32开本 * 8%印張 * 187千字 * 定价(第10类)1.40元

1960年3月北京第1版

1960年3月北京第1次印刷(0001—2,800册)

目 录

結合實驗室模型研究求解某些大壩靜力学(彈性力学)

問題.....	2
拱壩溫度應力的模型測定法.....	27
用模型方法研究壩內溫度.....	51
混凝土壩內溫度變化.....	63
畢谷特壩溫度狀況的估算與觀測研究.....	75
在大體積混凝土壩內控制溫度和裂縫的經驗.....	88
摩拉斯科壩的溫度應力.....	108
重力壩熱應力的計算與量測.....	126
用立體光彈性試驗所獲得的重力壩應力和用試荷載分析法 所得結果的比較.....	148
由靜水荷載引起的輕型重力壩壩段變形的測定.....	155
空心重力壩振動的研究.....	168
拱壩分析的代數荷載法.....	182
網格法計算拱壩.....	195
賽力那河巴爾西壩.....	218
馬河龐泰賽壩.....	226
安姆畢斯塔壩.....	233
瓦央壩.....	240
雷諾地賴依雙曲率拱壩.....	251

結合實驗室模型研究求解某些大壩 靜力學(彈性力學)問題

(蘇聯)S.G. 古脫曼

提 要

本文提供了關於求解有關高壩建築的彈性力學特殊問題的理論和實驗的綜合方法。這些問題就是確定下列名稱的應力問題：

(1)在均勻體和具有不同的溫度和滲透特性的兩個塊體——壩及基礎——的溫度和滲透應力。

(2)分期修建的結構物在受力狀態下接合時所產生的初應力。

(3)壩體傾斜圓筒形孔道附近的局部應力，以及恰當地確定孔道的方向和斷面形式，以減少集中應力的方法。

本文中所提出的一些方法並不限於本文中所討論的問題，還提出了一些一般的靜力計算的原則，用以計算：

- 1.由於塊體內部混凝土的收縮和散熱所造成的初應力。
- 2.在壩體三向受力條件下任意斷面形式孔口周圍的局部應力。

*

*

*

現代的大壩工程不僅涉及工程技術，而且还涉及科學分析。綜合彈性力學的理論解答和在專門的實驗室中進行的模型研究，才能完成這項任務。全蘇維特聶也夫水工科學研究院在第五次國際大壩會議以後一段期間內所積累的經驗〔參考文獻1〕，使得我們可以闡明一些對於水工結構的模型試驗和設計極有價值的問題。

業已發展起來的彈性力學的分析 and 實驗的方法，主要是確定作用在均勻體上面的外力所產生的應力，而實際上整體的水工結構物是承受着諸如溫度影響、滲流等物理因素的作用，並且結構物

和基础材料相应的物理性能可能是不同的。

为了有可能来确定温度应力和渗透应力，必须先按照已给的物理因素，初步求出一个符合平衡方程、协变条件和变位唯一性的特解。为了满足问题的边界条件，在求得的特解上还得加上该坝体的通解，求通解时假定这个坝体不受温度和渗透的作用。为了满足由于特解给出的边界条件所增加的通解，可以很容易地采用光弹性或形变网格实验方法在模型上求得〔参考文献2〕。下面对该问题的叙述仅限于寻求特解。

1. 渗透应力

坝体内部由渗透水流所造成的附加应力，可以用弹性体在体积力作用下的弹性力学问题的求解而确定：

(1) 根据阿基米得原理，等于坝体材料所失去的容重，即等于水的容重 $\gamma = 1$ 吨/立方米的浮托力；

(2) 具有动水水头 H 有下列位势分量的体积力，即：

$$X = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (1)$$

在此情况下，阿基米得浮托力的作用是用坝体断面直到浸潤綫为止的湿润部分的混凝土容重减少的方法来模拟，动水水头 H 的作用可用相应于已给的位势场 H 的特解来初步地确定，而位势场 H 则可根据渗透理论采用电拟法来确定〔参考文献3〕。寻求的特解可从位势 F_0 的位移向量的无旋流场来确定， F_0 的拉普拉斯运算式子等于体积力 H 的位势〔参考文献4〕。

$$\left. \begin{aligned} U_x &= 4K \frac{\partial F_0}{\partial x}, \quad U_y = 4K \frac{\partial F_0}{\partial y}, \quad U_z = 4K \frac{\partial F_0}{\partial z}, \\ \Delta F_0 &= H, \quad \Delta^2 F_0 = \Delta H = 0, \quad K = \frac{1-2\nu}{4-4\nu} \frac{\gamma}{2G}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

此处 U_x, U_y, U_z 为位移向量的分量， G 为剪切弹性模数， ν 为波桑比。

在两向问题中 ($U_z = 0$)，以复变数形式表示的双调和函数 F_0 ，

其实数部分为:

$$4F_0 = \operatorname{Re} \left[\bar{z} \int H(z) dz \right] = x\varphi + y\bar{\varphi} \quad (3)$$

式中

$$z = x + iy; \quad \bar{z} = x - iy;$$

$$H(z) = H + i\bar{H}.$$

复位势为:

$$\int H(z) dz = \varphi + i\bar{\varphi}.$$

符号上面的横划, 表示区别于解析式中实数部分的虚数部分。

在具有 n 个内部孔口的复连通域的坝身断面情况中, 位移向量的唯一性条件使得公式 (3) 的 F_0 函数中, 应引入下列形式的 n 个外加调和函数 F_m 的总和。

$$F_m = K \frac{Q_m}{2\pi} (a_m - ib_m) z_m (\ln z_m - 1) \quad (4)$$

式中 Q_m ——通过孔口 S_m 边界线的渗透流量

$$Q_m = \oint \frac{\partial H}{\partial n} ds_m;$$

a_m, b_m ——断面 S_m 的极点坐标, 可用求出画在垂直于边界的平面内的梯度 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 图的重心的同样方法求得(图 1)。

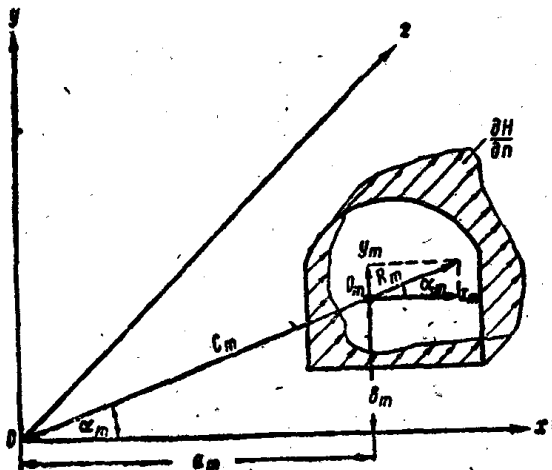


图 1

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{1}{Q_m} \oint x \frac{\partial H}{\partial n} dS_m, \\ b_m &= \frac{1}{Q_m} \oint y \frac{\partial H}{\partial n} dS_m, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$z_m = x_m + iy_m = r_m e^{i\theta_m},$$

坐标系的复数表示式的原点在边界的极点。而其长度为：

$$OO_m = C_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}.$$

在单有一个孔口的双连通域的坝身断面，若坐标原点定于内部边界的极点时 ($C=0$)，则 (4) 式的外加调和函数就可能没有。

在具有 n 个内部孔口的均匀复连通域时，采用弹性力学的方法，根据特解可以很容易地求得直接用渗透水头 H 及其微分表示的应力分量关系式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \frac{\gamma H}{2(1-\nu)}, \\ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} &= 2GK \left(x \frac{\partial H}{\partial x} - y \frac{\partial H}{\partial y} + \sum_1^n \frac{Q_m C_m}{2\pi} \frac{\cos(\theta_m + \alpha_m)}{r_m} \right), \\ \tau_{xy} &= 2GK \left(x \frac{\partial H}{\partial y} + y \frac{\partial H}{\partial x} + \sum_1^n \frac{Q_m C_m}{2\pi} \frac{\sin(\theta_m + \alpha_m)}{r_m} \right), \\ 2GK &= \frac{1-2\nu}{4-4\nu} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

必须指出，上述处理渗透问题的方法，不出现将静水压力看作为外界荷载的概念，因为这一概念仅在不渗透体中才成立。这样，上面的方法就同时考虑了上游面的渗透和静水压力的影响。

如果认为渗透压力系数为一分数值时 ($\alpha < 1$)，则应该把上游面的静水压力取为 $(1-\alpha)\gamma H$ 。

上述关系是对均匀组成体而言的。在组合式坝体和基础具有不同的渗透系数 C 时，回绕函数 $\bar{H}$ 和垂直于接触线的水头的导数 $\frac{\partial H}{\partial n}$ ，在接触处是不连续的。

为了保持接触处的连续状态，就有必要在特解中引入两个复

位势的附加函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$, 該两函数等于分布在接触直綫段上具有內源的无限均匀面的位势場。在內源影响綫上, 函数 φ_1 和 φ_2 的不連續, 保証了在相应接触綫上位势的唯一性。由于具有不同的物理特性的区域的接触所产生的附加应力分量, 可用复位势函数的微分求得:

$$\left. \begin{aligned} \psi(z) &= \psi + i\bar{\psi} = \frac{d\varphi(z)}{dz}, \\ \sigma_y &= -\sigma_x = 2G \left(K_1 \left(2\bar{\psi}_1 + r \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial r} \right) - K_2 r \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial r} \right), \\ \tau_{xy} &= -2G \left(K_1 \left(2\psi_1 + r \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) + K_2 r \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中函数 $\bar{\psi}_1$ 和 $\bar{\psi}_2$ 在接触綫 x 处不連續:

$$\bar{\psi}_1(x) = \pm H; \quad \bar{\psi}_2(x) = \pm C\bar{H}. \quad (8)$$

K_1, K_2 为相应于二接触区域的系数之間差值的一半

$$K_1 = \frac{1}{2} |K|, \quad K_2 = \frac{1}{2} \left| \frac{K}{C} \right|,$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

在这些函数(8)的复数表达式中乘以系数 $\ln \frac{z-a}{z+a}$, 就可分析地得到函数在接触綫上的双重意义。

上述位势場的图形可以很容易地在电拟模型中采用分流母綫求得[参考文献5], 而由于位势場对称于接触綫, 位势場的图形可只描一个半无穷平面。再者, 如果在接触地区剪切彈性模数不同, 則不論是正应力或是切应力在接触綫上都不連續。在这种情况下, 不仅是边界力的影响, 而且还有集中作用在接触綫上的內力的影响, 在求通解的模型上面均需予以考虑。

2. 溫度 应力

热彈性問題——在非均匀加热的影响下的彈性体平衡問題——可用与解前述問題相类似的方法求解, 即用具有下列分量的无旋位移矢量所决定的一个特解[参考文献4]来求解:

$$\left. \begin{aligned} U_x &= 4K \frac{\partial F_0}{\partial x}, \quad U_y = 4K \frac{\partial F_0}{\partial y}, \quad U_z = 4K \frac{\partial F_0}{\partial z}, \\ 4K &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha = \frac{E\alpha}{2G(1-\nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\text{式中} \quad \Delta F_0 = t, \quad \Delta^2 F_0 = \Delta t = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial t}{\partial \tau}. \quad (10)$$

E ——法向彈性模數；

α ——綫膨脹系数；

λ^2 ——導溫系数；

τ ——時間坐标。

在平面問題時 ($U_z = 0$)，所求特解有下列应力分量：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= -\frac{E\alpha t}{1-\nu}, \\ \tau_{xy} &= \frac{E\alpha}{1-\nu} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_x - \sigma_y &= \frac{E\alpha}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

函数 F_0 由温度域来决定。

(1) 在定常頻率 p 的温度調和变化的稳定状态时，所要求的函数 F_0 可直接用一个温度函数 t 来确定，温度函数的相期变化为四分之一波长〔参考文献 6〕。其解析式为：

$$t = f_1 \cos p\tau - f_2 \sin p\tau. \quad (12)$$

式中 f_1 、 f_2 为有下列关系的坐标函数

$$\frac{f_1}{\Delta f_2} = \frac{-f_2}{\Delta f_1} = \frac{\lambda^2}{p}$$

对应的函数为

$$F_0 = -\frac{\lambda^2}{p} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda^2}{p} (f_1 \sin p\tau + f_2 \cos p\tau). \quad (13)$$

温度函数 t 可用三向位势場的电动模型直接求得〔参考文献 7〕：

$$\Phi = t \operatorname{ch} \frac{z}{z_0} \cos \frac{z}{z_0} - \frac{\partial t}{p \partial \tau} \operatorname{sh} \frac{z}{z_0} \sin \frac{z}{z_0} \quad (14)$$

式中 $z_0 = \lambda \sqrt{\frac{2}{p}}, \quad \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$

用相差为 $\frac{\pi}{2}$ 的两相就可完全确定所要求的变化场，两相有下列关系：

$$\frac{\partial t'}{p^2 \tau} = t'' = -f_1, \quad \frac{\partial t''}{p^2 \tau} = -t' = -f_1$$

式中 角碼'——相期 $\tau=0$;

角碼''——相期 $p\tau = \frac{\pi}{2}$ 。

应力分量就可相应地由下式决定

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= A \frac{\partial^2 t''}{\partial y^2}, & \sigma''_x &= -A \frac{\partial^2 t'}{\partial y^2}, \\ \sigma'_y &= A \frac{\partial^2 t''}{\partial x^2}, & \sigma''_y &= -A \frac{\partial^2 t'}{\partial x^2}, & A &= \frac{E\alpha\lambda^2}{(1-\nu)p}, \\ \tau'_{xy} &= -A \frac{\partial^2 t''}{\partial x \partial y}, & \tau''_{xy} &= A \frac{\partial^2 t'}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (15)$$

(2) 在稳定温度状态时，可用相似于体积力的位势为一个调和温度分布函数 t 的情况来寻求函数 F_0 。

在具有 n 个用等温线围成的内部孔口的复连通断面中，函数 F_0 可用类似于(3)和(4)的复数公式表示：

$$4F_0 = \operatorname{Re} \left(\bar{z} \int t(z) dz - \sum_1^n \frac{Q_m}{2\pi} (a_m - ib_m) z_m (\ln z_m - 1) \right) \quad (16)$$

因而与(6)式相似应力分量可写成下列形式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z &= -2G4Kt = -\frac{E\alpha t}{1-\nu} \\ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} &= 2GK \left(x \frac{\partial t}{\partial x} - y \frac{\partial t}{\partial y} + \sum_1^n \frac{Q_m C_m}{2\pi} \frac{\cos(\theta_m + \alpha_m)}{r_m} \right) \\ \tau_{xy} &= 2GK \left(x \frac{\partial t}{\partial y} + y \frac{\partial t}{\partial x} + \sum_1^n \frac{Q_m C_m}{2\pi} \frac{\sin(\theta_m + \alpha_m)}{r_m} \right) \end{aligned} \right\} (17)$$

在定常温度场内的复合结构物和基础中，由于不同特性材料在接触部分所引起的附加应力分量，可用类似于前面根据(7)式所讨论的渗透问题的方法来确定；惟在(8)式中以 t 代替 H ， $\bar{t}$ 代

替 $\bar{H}$ ，此时 C 则为热传导系数

$$K = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\alpha}{4}.$$

当沿着直线 $y=0$ 刚性固结时，则由位移矢量求得的特解为：

$$U_x = 2 \frac{1+\nu}{3-4\nu} \alpha y \bar{t}, \quad U_y = 2 \frac{1+\nu}{3-4\nu} \alpha y t, \quad U_z = 0.$$

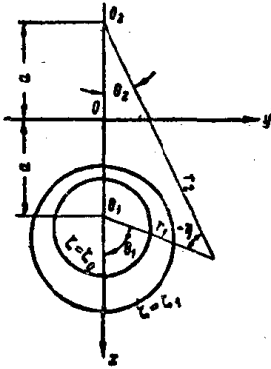


图 2

上述方法在相应模型上进行的实验室研究，使有可能求出某些基本情况的分析解。为了阐明这一点，让我们考虑一个偏心管，其内表面下降一个定常温度 t_0 ，外表面温度为零，试计算管壁内的温度应力(图2)。在此情况下，等温线坐标系为双极坐标，位势温度场的解析式可用复数形式求得：

$$t(z) = t + i\bar{t} = \frac{t_0}{\xi_0 - \xi_1} (\xi - \xi_1 + i\eta) \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{此处, } \xi = \ln \frac{r_2}{r_1} \\ \eta = \theta_2 - \theta_1 \end{aligned} \right\} \text{为具有拉梅引入的微分参数 } h = \frac{ch\xi - \cos\eta}{a}$$

的双极坐标轴。

这样就可以容易地推得内边界的极点，等温线

$$\xi = \xi_0 = \ln \sqrt{\frac{x_0 + a}{x_0 - a}},$$

将与双极坐标 $O_1(x=a, y=0)$ 相重合。

由(3)式，可用函数 F_0 来确定这一问题的特解：

$$F_0 = \frac{t_0 a^2}{2(\xi_0 - \xi_1)} \left(\frac{\xi - \xi_1}{ch\xi - \cos\eta} e^{-\xi} + \frac{x_1}{a} \ln r_2 + \frac{y}{a} \theta_2 \right) \quad (19)$$

借助于杰弗莱的解答[参考文献8]，就可求得满足自由边界条件的应力函数 F 的最终式子为：

$$\begin{aligned}
 F = & \frac{t_0 a^2}{4(\xi_0 - \xi_1)} \left\{ \frac{e^{-\xi}}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} (2\xi - 2\xi_1 - 1 + e^{-2\xi_1}) \right. \\
 & - \frac{2\xi_0 + e^{-2\xi_0} - 2\xi_1 - e^{-2\xi_1}}{2\operatorname{sh}(\xi_0 - \xi_1)(\operatorname{sh}^2 \xi_0 + \operatorname{sh}^2 \xi_1)} \\
 & \times \left(2\xi \operatorname{ch}(\xi_0 - \xi_1) + \frac{\cos \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \times (\operatorname{sh}(2\xi - \xi_0 - \xi_1) \right. \\
 & \left. \left. + \operatorname{sh}(\xi_0 - \xi_1) + \operatorname{sh} 2\xi_1 \operatorname{ch}(\xi_0 - \xi_1) \right) \right\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

除 $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) + E\alpha t$ 以外, 可用上面求得的艾雷函数 F 决定应力分量。在具有直线边界 $\xi_1 = 0$, 和内部孔口为圆形 $\xi = \xi_0$ 的物体中(图 3), 则在其自由等温面上的温度应力可由下式决定:

$$\sigma = \frac{E\alpha t_0}{1-\nu} \frac{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}{\xi_0} \left(e^{-\xi} - \frac{2\xi_0 - 1 + e^{-2\xi_0}}{2\operatorname{sh}^2 \xi_0} (\operatorname{ch} \xi_0 \operatorname{sh} \xi \pm \operatorname{sh} \xi_0 \cos \eta) \right) \quad (21)$$

式中 符号“+”系指内部边界上 $\xi = \xi_0$;

符号“-”系指外边界上 $\xi = 0$ 。

图 4 为断面的两个具有代表性点子的温度应力数值与函数

$\frac{r_0}{x_0} = \frac{1}{\operatorname{ch} \xi_0}$ 的关系;

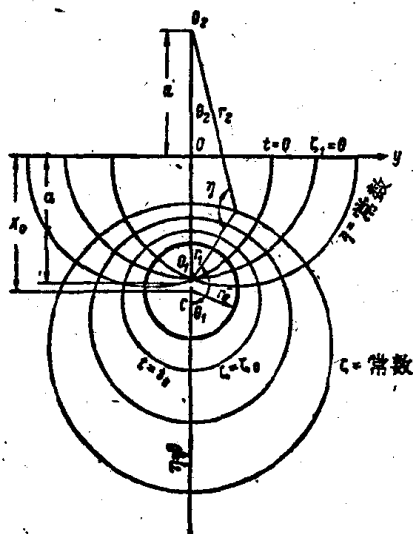


图 3

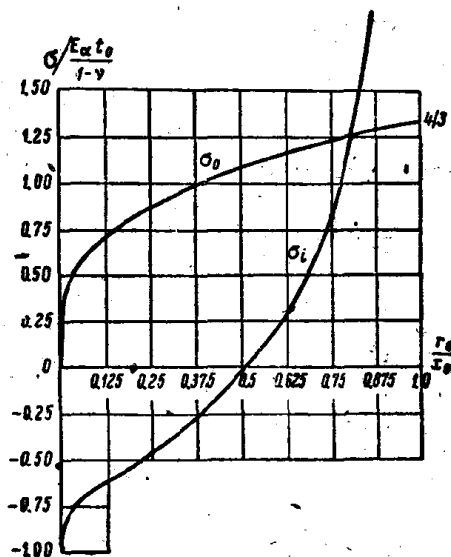


图 4

σ_0 , 直綫边界的中点, 其坐标为 $\xi=0, \eta=\pi$;

σ_i , 內边界上的一点, 其坐标为 $\xi=\xi_0, \eta=\pi$;

这样求得的外边界計算应力的式子为:

$$\sigma_0 = 4 \frac{E a t_0}{1-\nu} \frac{\operatorname{sh} 2\xi_0 - 2\xi_0}{2\xi_0 (\operatorname{ch} 2\xi_0 - 1)} \quad (22)$$

上式还可应用在孔口等温周边的极点位于直綫边界相当距离的非圓形孔口中。由(5)式可求得极点的位置为:

$$a = \frac{1}{Q} \oint x \frac{\partial t}{\partial n} ds.$$

参数 ξ_0 应该用与有相当流量的圓孔相同的方法来选择

$$\xi_0 = \frac{Q}{2\pi t_0}.$$

3. 坝体内傾斜圓筒形孔口附近的局部应力

修建高水头坝后式水电站, 坝体内經常要通过軸綫与水平方向傾斜若干度的压力水管。今假定孔口的直径和坝体断面尺寸及其本身长度比較起来是很小的。坝体因孔口的削弱而产生的局部应力, 随着离开孔口表面距离的增加而很快地减少。这里将孔口軸綫垂直于坝体断面平面情况下的局部应力的計算問題处理为一个平面問題, 但仍需計入坝体空間受力状态的六个分量〔参考文献9〕。

假設坝体在开始时是沒有任何孔口的实体, 并处于平面問題的应力状态 ($\tau_{xy} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$) 就可采用通常的方法求得孔口軸綫 z 及与其正交的 x 軸所組成的平面內的应力分布 (图5)。試分別考虑相应于孔口的圓截面, 及为直綫 $x = \pm a, z = \pm z_0$ 所定的那一部分。假定在这一部分的应力分量 σ_x 和 τ_{xz} 的按平面定律分布为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= q + q_z \frac{z}{z_0} + q_x \frac{x}{a}, \\ \tau_{xz} &= t + t_z \frac{z}{z_0} + t_x \frac{x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

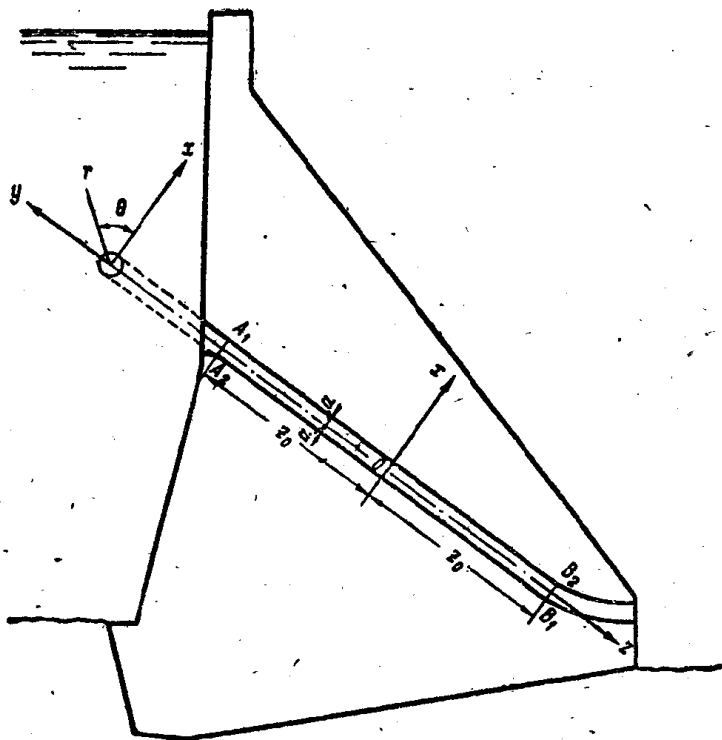


图 5

在坝身断面为三角形时，则所假设的线性关系式(23)，满足在自重和水位到坝顶时的水压力影响下的情况。

在一般情况下，对于直线 $x = \pm a$ 的应力分布的曲线图形，可归结成为静力相等的梯形。将绘得的圆形的 x 坐标按线性关系插入，则可由(23)式近似地求得线性应力分布。

线性应力场 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} (23)，在确定了从受平面应力作用的实体中假想地分开的孔口 S 表面上的应力分量 τ_{xs} , τ_{ys} 和 σ_s ，除去这些应力后，可以满足孔口表面的自由边界条件。由外表面半径为无限大 ($r = a = \infty$) 的管子在其内表面 S ，在这些应力作用下的平衡问题的解答可以求得所需扣除部分的应力。该问题可由(23)式的各项分别逐步求解。

孔口区域的切向应力 τ_{xs} (23) 在表面上则为：

$$\tau_{xs} = \tau_{xs} \frac{dy}{ds} = \left(t + t_s \frac{z}{z_0} + t_s \frac{x}{a} \right) \frac{dy}{ds} \quad (24)$$

边界切应力 τ_n 可用确定位移矢量的平面 ($U_y=0$) 螺旋线磁场 (散度为零 $\text{diverg.}=0$) 的调和函数 φ_0 , φ_1 和 φ_2 消除掉。

$$\left. \begin{aligned} GU_s &= \frac{t_z}{t_0} \varphi_2, \\ GU_z &= \left(t + t_0 \frac{z}{z_0} \right) \varphi_0 + \frac{t_z}{a} \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中 $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -\varphi_0$.

同一断面 S 的边界函数 φ_0 和 φ_1 相应地满足表面 S 的边界条件

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = \frac{dy}{ds}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = x \frac{dy}{ds}. \quad (26)$$

离开 S 面, φ_0 和 φ_1 的导数趋近于零。因而, 调和函数就可采用数学分析方法, 或用电拟模型求解边界问题来决定。位移的唯一性使得(25)式中所有的调和函数相应地也是唯一的。在电拟模型上面最好利用从哥西-黎曼条件求出相应函数 φ 的共轭的势函数 $\bar{\varphi}$ 。

边界条件(24)决定了模拟的势函数 $\bar{\varphi}$, 所需的常数 C , 由函数 φ 的唯一性条件, 亦即由模型横截面内表面 S 的电流强度等于零的条件来推求。

$$I = \oint \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} ds = 0$$

对于断面 S ($r=a$) 的圆周边界函数 φ_0 , φ_1 和 φ_2 具有下列表示式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= -a^2 \frac{\cos \theta}{r}, \\ \varphi_1 &= \frac{a^2}{4} \left(2 \ln \frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2} \cos 2\theta \right), \\ \varphi_2 &= a^2 \ln \frac{r}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

相应于假定变位场(25)的边界应力 τ_n 和 τ_n 与 z 无关, 可

由求解相应的平面变形问题而得。

相应于 σ_z 表示式(23)的分量的边界应力 τ_{nz} 和 σ_n 可用类似的方法得到。

至于式中前面的两项 q 和 $q_z \frac{z}{z_0}$ ，在与 z 正交的断面中的应力和位移分量则有下列相应的比例关系：

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_x^*} = \frac{\sigma_y}{\sigma_y^*} = \frac{\sigma_z}{\sigma_z^*} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy}^*} = \frac{U_x}{U_x^*} = \frac{U_y}{U_y^*} = \frac{q_z}{q} \frac{z}{z_0} \quad (28)$$

式中有“*”符号的系指 σ_x 沿 Z 轴均匀分布的情况，而没有“*”符号的则为 $\sigma_x = q_z \frac{z}{z_0}$ 的情况。因而，在外力分布与 z 轴成线性关系的情况时，就成为求解不包含 z 相应的平面变形问题。这一简化在引入了下列的附加位移矢量的条件后，满足弹性力学方程式：

$$2GU_z = \frac{1}{z_0} \left(F - \frac{x\varphi + y\bar{\varphi} - \varphi_3}{2} \right), \quad (29)$$

此处 F 为相应平面问题的艾雷应力函数

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = \sigma_x^* + \sigma_y^* = \Delta F$$

φ_3 以及 φ 和 $\bar{\varphi}$ 均为调和函数。

与平面问题对比起来计算 $\sigma_x = q_z \frac{z}{z_0}$ 项，还将引起切应力：

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{qz}{4z_0} \left\{ (1-2\nu)\varphi - x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right\}, \\ \tau_{yz} &= \frac{qz}{4z_0} \left\{ (1-2\nu)\bar{\varphi} - x \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - y \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

可用与处理 τ_{xz} 相同的方法，用由边界 S 上面边界条件所决定的函数 φ_3 ，消除作用在 S 面上的相应的应力 τ_{nz}

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = (1-2\nu) \left(\varphi \frac{dx}{dn} + \bar{\varphi} \frac{dy}{dn} \right) - x \frac{d\varphi}{dn} - y \frac{d\bar{\varphi}}{ds}. \quad (31)$$

对于圆形边界 S ($r=a$)，则可利用由具有圆孔的拉伸板的著名解答[参考文献10]，其艾雷应力函数为：