半导体集成电路

南京工学院
西北电讯工程学院
合编

国防工业出版社

半导体集成电路

南 京 工 学 院
西北电讯工程学院　　合 编

国防工業出版社

内 容 简 介

本书着重讲述各种逻辑集成电路的工作原理和设计原理。对模拟集成电路也以集成运算放大器为例进行了较详细的分析。全书共分四篇：第一篇：逻辑设计基础，第二篇：双极型逻辑集成电路，第三篇：MOS型逻辑集成电路，第四篇：模拟集成电路。

本书是高等院校工科半导体器件专业的试用教材，也可供从事这方面工作的同志参考。

半导体集成电路

南 京 工 学 院
西北电讯工程学院 合编

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16　印张 28 1/4　661千字

1980年12月第一版　1980年12月第一次印刷　印数：00,001－17,500册

统一书号：15034·2098　　定价：2.90元

前　　言

本书系高等院校工科电子类半导体器件专业统编教材之一。

根据编写大纲，本教材着重讲述各种双极型和 MOS 型逻辑集成电路的工作原理和设计原理，并对模拟集成电路也以集成运算放大器为例进行了较详细的分析。我们在编写本教材时，着重分析各种基本电路的工作原理和设计原理，力求从电路的内在矛盾阐明其改进和发展；强调基本概念，加强理论分析，适当照顾本书的系统性和完整性；努力贯彻少而精和理论联系实际的原则，注意反映当前的一些新技术和新成就。

本课程应在晶体管原理、半导体器件工艺原理和电子线路等课程之后开设。根据编写大纲，本课程总学时暂定为 118 学时，学时分配大致如下：逻辑设计基础 20 学时，双极型逻辑集成电路 40 学时，MOS 型逻辑集成电路 38 学时，模拟集成电路 20 学时。使用该教材的各院校可根据具体情况作适当的增减。

本书第一篇和第三篇由南京工学院负责编写，其中第一篇由王子仪同志编写，第三篇由史常忻、魏同立同志编写；第二篇和第四篇由西北电讯工程学院负责编写，参加编写的是张廷庆、徐毓龙、吴思源、宋兆元、朱兆宗、高宝华等同志。

本书完稿后，采用互审的方式，第一篇和第三篇由西北电讯工程学院徐毓龙、张廷庆同志负责审阅，第二篇和第四篇由南京工学院孙大有、孔德平同志负责审阅。最后魏同立、张廷庆同志对全书进行了统审。

在编审本教材过程中，得到了校内外许多同志的热情帮助和大力支持，在此表示感谢。

由于我们水平有限，时间仓促，缺点和错误在所难免，欢迎提出宝贵意见。

编　　者

目　　录

第一篇　逻辑设计基础

第一章　逻辑代数基础……………………………………………………………1
　1.1　逻辑代数的基本概念……………………………………………………1
　1.2　逻辑代数的公式…………………………………………………………3
　1.3　逻辑函数的化简…………………………………………………………6
第二章　触发器…………………………………………………………………33
　2.1　触发器的基本形式及类型………………………………………………33
　2.2　维持-阻塞触发器及主-从触发器………………………………………39
　2.3　触发器的变换……………………………………………………………44
第三章　基本逻辑部件…………………………………………………………50
　3.1　加法器……………………………………………………………………50
　3.2　译码器……………………………………………………………………55
　3.3　计数器……………………………………………………………………64
　3.4　移位寄存器………………………………………………………………73

第二篇　双极型逻辑集成电路

第四章　集成电路的寄生效应…………………………………………………76
　4.1　双极型逻辑集成电路的元件结构和寄生效应…………………………76
　4.2　晶体管模型和有源寄生…………………………………………………80
　4.3　结电容和扩散电阻模型…………………………………………………86
第五章　晶体管-晶体管逻辑（TTL）集成电路………………………………93
　5.1　简易TTL“与非”门………………………………………………………93
　5.2　五管单元TTL“与非”门…………………………………………………110
　5.3　六管单元TTL“与非”门…………………………………………………121
　5.4　抗饱和TTL“与非”门电路………………………………………………128
　5.5　TTL“与非”门电路的温度特性…………………………………………129
　5.6　TTL门电路的逻辑扩展…………………………………………………133
　5.7　双极型集成触发器………………………………………………………137
第六章　TTL电路版图设计……………………………………………………142
　6.1　晶体管设计………………………………………………………………142
　6.2　二极管设计………………………………………………………………146
　6.3　电阻设计…………………………………………………………………148
　6.4　版图设计举例……………………………………………………………152
第七章　发射极耦合逻辑（ECL)电路…………………………………………164
　7.1　ECL电路的工作原理……………………………………………………164

7.2 ECL 电路的特性和参数……166
7.3 ECL 电路的逻辑扩展……172
7.4 ECL 电路的设计特点……174
第八章 集成注入逻辑（I^2L）电路……176
8.1 I^2L 电路的工作原理……176
8.2 I^2L 电路器件分析……181
8.3 I^2L 电路的特性……187
8.4 I^2L 电路的逻辑组合和接口电路……199
8.5 I^2L 电路的版图设计和工艺考虑……205
8.6 I^2L 电路的改进和发展……210

第三篇 MOS 型逻辑集成电路

第九章 MOS 集成电路中的晶体管……215
9.1 MOS 晶体管的直流特性……215
9.2 MOS 晶体管的主要参数……218
9.3 MOS 晶体管的温度特性……230
9.4 衬底偏置效应对阈电压的影响……233
第十章 MOS 倒相器和门电路……235
10.1 电阻负载 MOS 倒相器……235
10.2 E/E MOS 倒相器和门电路……238
10.3 E/D MOS 倒相器和门电路……262
10.4 CMOS 倒相器和门电路……273
10.5 CMOS 传输门……282
10.6 设计举例……286
第十一章 动态 MOS 电路……289
11.1 动态 MOS 倒相器和门电路……289
11.2 动态 MOS 移位寄存器……294
11.3 设计举例……305
第十二章 MOS 逻辑电路……310
12.1 MOS 触发器……310
12.2 MOS 计数器……319
12.3 MOS 电路设计方法……322
第十三章 MOS 存储器……337
13.1 随机存取存储器……337
13.2 唯读存储器和可编程序逻辑阵列……347
13.3 可编程序唯读存储器……354

第四篇 模拟集成电路

第十四章 模拟集成电路中的基本电路……364
14.1 模拟集成电路基础——差分放大器……364
14.2 运算放大器的输入级电路……374
14.3 恒流源电路……377

14.4 有源负载（动态负载）……381
14.5 电平位移电路 ……381
14.6 双端输入变单端输出（单端化）电路 ……383
14.7 输出级及输出级保护电路 ……386
14.8 内部稳压源电路 ……389
14.9 模拟乘法电路 ……394
第十五章 集成运算放大器电路分析 ……397
15.1 运算放大器的基本应用 ……397
15.2 运算放大器的频率补偿技术 ……403
15.3 集成运放电路分析举例（通用型）……413
第十六章 模拟集成电路版图设计 ……430
16.1 模拟集成电路中的几种特殊元件 ……430
16.2 集成运算放大器版图设计 ……442

第一篇　逻辑设计基础

第一章　逻辑代数基础

1.1　逻辑代数的基本概念

所谓逻辑，就是指“结果”与“条件”的关系具有某种规律性。

逻辑代数，亦称为开关代数或布尔代数，是逻辑设计的数学基础，用来分析和设计数字电路系统。

在普通代数中，变量可以是从负无穷大到正无穷大之间的任意一个数；而在逻辑代数中变量只有两种可能值，分别用符号 0 和符号 1 表示。逻辑代数中的变量或者是 0 或者是 1，不允许有中间值。对一个逻辑变量 A 来说：

$$\text{如果 } A \neq 1, \qquad \text{则 } A = 0$$
$$\text{如果 } A \neq 0, \qquad \text{则 } A = 1$$

注意这里两个符号 0 和 1 与一般数学中代表数值的 0 和 1 具有完全不同的含义。逻辑代数中的 0 和 1 两个符号是用来代表两种相互矛盾的现象或状态。例如，数字电路系统中低电平用 0 表示，高电平用 1 表示；无脉冲用 0 表示，有脉冲用 1 表示，等等。

数字电路系统所处理的信号，通常具有两个截然不同的状态，而电路的基本任务是实现某种逻辑功能。因此，逻辑代数在数字电路系统的研究中有很大的应用价值。

逻辑代数有三种基本逻辑运算，即逻辑加法、逻辑乘法和逻辑否定。现分别阐述。

1.1.1　逻辑加法及“或”门

经常会有这样的事件：它有几个条件，只要其中任一个条件具备时，就可得到某种结果。比方说，有三个条件 A、B 及 C，只要条件 A 或条件 B 或条件 C 具备，就可得到某种结果。例如在图 1-1 中，只要开关 A 闭合或者开关 B 闭合，p、q 两端就可容许电流通过，这种逻辑关系称为“或”逻辑。

如果将开关 A、B 的闭合状态用 1 表示，断开状态用 0 表示；p、q 两端间容许电流通过用 F 为 1 表示，电流不能通过用 F 为 0 表示，则可用表 1-1 表达图 1-1 开关电路的不同工作状态。亦即“或”逻辑的结果与条件之间的关系。

由于“或”逻辑关系与普通代数的加法形式上有某些相似之处，例如 $0+0=0$，$0+1=1$，$1+0=1$，所以“或”逻辑关系被称为逻辑加法运算。它的符号也采用普通代数的加法符号“+”。注意在逻辑加法中 $1+1=1$。

因此，图 1-1 电路的逻辑式为 $F=A+B$。这个式子的含义是：如果 $A=1$ 或 $B=1$ 或 $A=B=1$，则 $F=1$；仅当 $A=B=0$ 时，F 才等于 0。

这里逻辑变量 A、B 为独立变量，F 为依赖变量，我们称 F 是 A、B 的逻辑函数。因 F 的值依 A、B 的值而变，F 与 A、B 间存在着一定的对应关系，当逻辑变量 A、B 取定一组值后，F 的值就唯一地被确定了。将这种关系列成表，即为真值表。

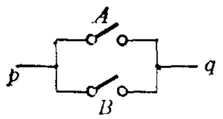

图1-1　开关并接说明"或"逻辑

表　1-1

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

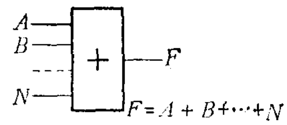

图1-2　"或"门符号及其逻辑式

表 1-1 称为"或"逻辑的真值表。它包含两个部分：一部分是系统地列出独立变量的各种取值，对于两个独立变量A、B，共有 $2^2 = 4$ 组取值；另一部分是对应于每一组取值的依赖变量值，即逻辑结果。

实现"或"逻辑功能的电路称为"或"门，"或"门通常用图 1-2 的符号表示。

1.1.2　逻辑乘法及"与"门

经常也会有这样的事件：必须诸条件齐备，才能得到某种结果。比方说，有三个条件A、B及C，只有在条件A与条件B与条件C三者都具备时，才能得到某种结果。例如在图 1-3 中，只有当开关A与开关B都闭合时，p、q 两端间才容许电流通过。这种逻辑关系称为"与"逻辑。

同前面一样，将开关A、B的闭合状态用 1 表示，开关A、B的断开状态 用 0 表 示；p、q 两端间容许电流通过用F为 1 表示，电流不能通过用F为 0 表示，则可用表 1-2 表达图 1-3 这个简单开关电路的不同工作状态。这也就是"与"逻辑的结果与条件之间的关系。表 1-2 即为"与"逻辑的真值表。

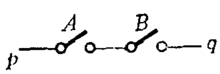

图1-3　开关串接说明"与"逻辑

表　1-2

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

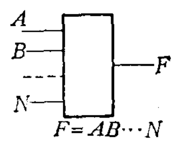

图1-4　"与"门符号及其逻辑式

由于"与"逻辑关系与普通代数的乘法在形式上相似，例如 $0 \times 0 = 0$， $0 \times 1 = 0$，$1 \times 0 = 0$， $1 \times 1 = 1$ 。所以"与"逻辑关系被称为逻辑乘法运算。它的符号也采用普通代数的乘法符号，用"×"表示或用"·"表示。与普通代数一样，为简捷起见，经常又将这一符号省略不写，直接用 AB 来表示A和B进行逻辑乘法运算。

因此，图 1-3 电路的逻辑式为$F = AB$。这个式子的含义是：仅当A与B都为 1 时，F才是 1，否则F为 0 。

这里逻辑变量A、B为独立变量，F为依赖变量。F的值依A、B的值而变，F是A、B的逻辑函数。

实现"与"逻辑功能的电路称为"与"门，"与"门通常用图 1-4 的符号表示。

1.1.3　逻辑否定及"非"门

逻辑否定亦称为逻辑"非"。它的逻辑式为$F = \overline{A}$。A上面加一横表示"非A"，其 含义是如果$A = 0$，则 $\overline{A} = 1$；若$A = 1$，则 $\overline{A} = 0$ 。

实现逻辑否定的电路称为“非”门，其符号如图 1-5 所示。“非”门只有一个输入端和一个输出端，它实现这样的逻辑功能：仅当输入不是 1 状态时，输出才是 1 状态；如果输入是 1 状态，则输出不是 1 状态，即输出 0 状态。可见通过“非”门，可实现逻辑否定。“非”门输入端 A 如果为低电平，则输出端 $\overline{A}$ 是高电平；输入端 A 是高电平时，则输出端 $\overline{A}$ 是低电平。故“非”门电路又常称为倒相器。

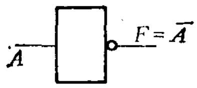

图1-5 “非”门符号

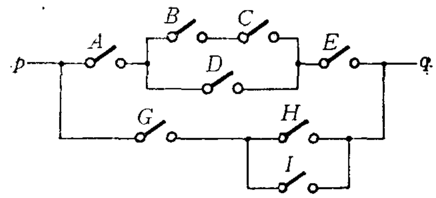

图1-6 某一开关网络

〔例〕 图 1-6 开关网络共有 8 只开关，说明这些开关在哪些状态下可允许 p、q 两端间有电流通过？并用逻辑式表示。

解：同前，使开关闭合状态为 1，开关断开状态为 0；p、q 两端间可容许有电流通过为 1 状态，电流不能通过为 0 状态。

上面那条支路如能形成通路，必须 A 和 E 都为 1，同时要求下面二条件之一能够具备，即：（1）$B=C=1$，（2）$D=1$。用公式表示则为 $AE(BC+D)$。

下面的支路要形成通路，必须 $G=1$ 以及 H 或 $I=1$。用公式表示则为 $G(H+I)$。

上下这两条支路，只要其中一条形成通路，p、q 两端间就可容许电流通过，故求得图 1-6 开关网络的逻辑式为：

$$F=AE(BC+D)+G(H+I)$$

1.2 逻辑代数的公式

逻辑代数的基本公式有 9 个，现列出于下。由于逻辑代数中的变量，其取值只有两种可能性——取值 0 或取值 1，因此，下面的 9 个基本公式中，前面 7 个是显而易见，无需证明的。

公式 1　1 a：$A+0=A$

　　　　1 b：$A1=A$

公式 2　2 a：$A+1=1$

　　　　2 b：$A0=0$

公式 3　3 a：$A+A=A$

　　　　3 b：$AA=A$

公式 4　4 a：$A+\overline{A}=1$

　　　　4 b：$A\overline{A}=0$

公式 5　$\overline{\overline{A}}=A$

公式 6　交换律

　　　　6 a：$A+B=B+A$

　　　　6 b：$AB=BA$

公式 7　结合律

$7a$：$A+(B+C)=(A+B)+C$

$7b$：$A(BC)=(AB)C$

公式 8　分配律

$8a$：$A(B+C)=AB+AC$

$8b$：$A+BC=(A+B)(A+C)$

公式 9　狄·摩根（De Morgan）定理

$9a$：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$

$9b$：$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

下面分别对公式 8 和公式 9 给予证明。证明的方法有好几种，这里采用真值表法。我们知道，两个逻辑函数如相等，则对应于其中逻辑变量的任何一组取值，这两个函数都应该有相同的值。换句话说，两个逻辑函数如相等，则它们应该有相同的真值表；反之，如果两个函数的真值表相同，则此两个逻辑函数相等。因此，两个逻辑函数是否相等，只要把它们的真值表列出来，就一望而知了。

公式 $8a$ 的证明：

列出它们的真值表（表 1-3）。

表　1-3

A	B	C	$A(B+C)$	$AB+AC$	A	B	C	$A(B+C)$	$AB+AC$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1

从表 1-3 看到，对应于变量 A、B 及 C 的任何一组取值，$A(B+C)$ 和 $AB+AC$ 的值完全相同，所以 $A(B+C)=AB+AC$。

公式 $8b$ 的证明：

$$\begin{aligned}(A+B)(A+C)&=AA+AB+AC+BC\\&=A(1+B+C)+BC=A+BC\end{aligned}$$

公式 $9a$ 及 $9b$ 的正确性分别用表 1-4 a 及 1-4 b 的真值表证明如下：

表　1-4

（a）

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

（b）

A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

公式 9 说明，对于一个逻辑式，如将其中所有的“＋”号改换成“·”号，所有的“·”号改换成“＋”号，并将每一变量及常量用它的“反”代替，则得到的结果是原逻辑

式的“反”。

上面列出了9个基本公式，运用这些基本公式，又可以得到下述几个常用公式：

公式 10　10 a：　$A+AB=A$

　　　　10 b：　$A(A+B)=A$

公式 11　11 a：　$A+\overline{A}B=A+B$

　　　　11 b：　$A(\overline{A}+B)=AB$

公式 12　12 a：　$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$

　　　　12 b：　$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)$
$$=(A+B)(\overline{A}+C)$$

公式 10 的证明：

$$A+AB=A(1+B)=A$$
$$A(A+B)=AA+AB=A+AB=A$$

公式 11 的证明：

$$A+\overline{A}B=(A+\overline{A})(A+B)=A+B$$
$$A(\overline{A}+B)=A\overline{A}+AB=AB$$

公式 12 a 的证明：

在逻辑式 $AB+\overline{A}C+BC$ 中，必须将 BC 项去掉。根据公式 10 a，我们知道，在一个“与-或”逻辑式中，如果一个“与”项是另一个“与”项的因子，则后一个“与”项就是多余的。现在 BC 项并不包含 A，我们可将它乘上$(A+\overline{A})$，BC 项就变成了 $ABC+\overline{A}BC$。因为 AB 已存在于式中，故 ABC 是多余的；同样，由于 $\overline{A}C$ 项的存在，故 $\overline{A}BC$ 也是多余的。

由此得：
$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC$$
$$=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC=AB+\overline{A}C$$

这个公式可叙述如下：

在一个“与-或”逻辑式中，如果两个乘积项其中之一包含变量 A，另一项包含 A 的反变量 $\overline{A}$，而这两项的其余因子都是第三个乘积项的因子，那么这第三个乘积项就是多余的。

例如，在逻辑式 $A\overline{B}+\overline{A}\overline{C}+\overline{B}\overline{C}(D+E)$ 中，第一项含有变量 A，第二项包含 $\overline{A}$，而这两项的其余因子 $\overline{B}$、$\overline{C}$ 都是第三个乘积项 $\overline{B}\overline{C}(D+E)$ 的因子，故第三项是多余的。

公式 12 b 的证明：

在逻辑式 $(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)$ 中，必须将 $(B+C)$ 项去掉。根据公式 10 b，在一个“或-与”逻辑式中，如果一个“或”项包含在另一个“或”项中，则后者是多余的。现在 $(B+C)$ 项没有变量 A，我们可以给它加上一项 $A\overline{A}$，这样一来 $(B+C)$ 项就变成了 $A\overline{A}+B+C$，再运用分配律（公式 8 b），又化成为 $(A+B+C)(\overline{A}+B+C)$。因为存在有 $A+B$ 项，故 $A+B+C$ 是多余的；同样，由于 $\overline{A}+C$ 项的存在，$\overline{A}+B+C$ 项也是多余的，于是得：

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)(A\overline{A}+B+C)$$
$$=(A+B)(\overline{A}+C)(A+B+C)(\overline{A}+B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$$

这个公式可叙述如下：

在一个"或-与"逻辑式中，如果一个"或"项内有变量A，另一个"或"项内有变量$\overline{A}$，而这两个"或"项的其他所有项都包含在第三个"或"项中，那末，第三个"或"项是多余的。

例如，在逻辑式$(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+DE)$中，第一个"或"项内有变量$A$，第二个"或"项内有变量$\overline{A}$，而这两个"或"项的其他所有项$\overline{B}$、$\overline{C}$都包含在第三个"或"项$\overline{B}+\overline{C}+DE$中，所以，第三个"或"项是多余的。

上面介绍了9个基本公式和3个常用公式，而每一公式又包含了（a）、（b）两个公式。公式（a）和（b）之间有什么关系呢？我们只要将公式（a）中等号两边的所有"与"符号改变为"或"符号，所有"或"符号改变为"与"符号；所有的"1"改变为"0"和所有的"0"改变为"1"，就得到对应的公式（b）。反过来，显然也可运用上述变换，从公式（b）得出公式（a）。这种关系叫做互为对偶。

定义 一个逻辑函数F_a，将其中的所有"+"换为"·"，所有"·"换为"+"；所有"1"换为"0"，所有"0"换为"1"，就得到一个新的函数F_b，这个新函数叫做F_a的对偶。

例如：

$F_a=A+0 \qquad F_b=A\cdot 1$

$F_a=A\cdot 1 \qquad F_b=A+0$

$F_a=AB+\overline{A}C \qquad F_b=(A+B)(\overline{A}+C)$

$F_a=(A+B)(\overline{A}+C) \qquad F_b=AB+\overline{A}C$

$F_a=\overline{A}(B+C\overline{D})+\overline{B}D \qquad F_b=[\overline{A}+B(C+\overline{D})](\overline{B}+D)$

$F_a=[\overline{A}+B(C+\overline{D})](\overline{B}+D) \qquad F_b=\overline{A}(B+C\overline{D})+\overline{B}D$

显然，如果F_b是F_a的对偶，那末，F_a也是F_b的对偶。这就是说函数F_a和F_b是互为对偶的。

定理 两个逻辑函数如果相等，则它们的对偶函数也相等。

证明：设两个逻辑函数F_a和G_a相等，即$F_a=G_a$。运用狄·摩根定理，将F_a和G_a中所有的"+"改换为"·"，"·"改换为"+"，所有的"0"改换为"1"，"1"改换为"0"，并将每一个逻辑变量用它们的反变量置换，就得到$\overline{F}_a$和$\overline{G}_a$。因为$F_a=G_a$，所以$\overline{F}_a=\overline{G}_a$。

再将$\overline{F}_a$和$\overline{G}_a$中的所有变量都以它们的反变量置换进去，于是得到F_b和G_b。由于$\overline{F}_a=\overline{G}_a$，所以$F_b=G_b$。

对偶性原理可以帮助人们掌握和运用逻辑代数。

1.3 逻辑函数的化简

任何一个数字系统，只要求出它必须执行功能的逻辑式，就可确定该数字系统的结构。系统的复杂性和规模与相应的逻辑式的复杂程度直接联系着。所以，逻辑函数的简化可减小数字系统的复杂性和规模。

1.3.1 公式化简

公式化简就是运用逻辑代数的基本公式和三个常用公式进行化简。

一、“与-或”逻辑式的化简

一个最简的“与-或”式应该包含最少个数的“与”项，并在满足这一条件下，每一个“与”项包含变量的个数最少。

例如：
$$F=A\overline{B}\,\overline{C}+ACD+AC+\overline{A}BC\overline{D}$$
$$=A\overline{B}\,\overline{C}+AC+\overline{A}BC\overline{D}$$
$$=A\overline{B}+AC+BC\overline{D}$$

这里F的三个“与-或”式中，第二式比第一式较简，因为它少含一个“与”项，第三式与第二式包含相同个数的“与”项，但在第三式中有两个“与”项包含的变量个数都比第二式各少一个，所以第三式是最简的“与-或”式，它不能再进行化简。

化简一个“与-或”逻辑式，通常要注意该逻辑式内是否存在下述几种情况，并利用有关公式予以简化。

1．如果存在这样两个“与”项，即其中一个“与”项含有某个原变量，而另一“与”项含有它的反变量，除此以外，两个“与”项相同，则可利用等式 $AB+\overline{A}B=B$，将这两项合并成一项，合并时该变量被消去。

例如：
$$F=D\overline{B}+\overline{D}CBA+DCBA=D\overline{B}+CBA$$

2．注意变量个数较少的“与”项，所有包含该项的“与”项都是多余的。这就是利用公式 10 a：$A+AB=A$

例如：
$$F=AB+ABC+BD=AB+BD$$

3．注意变量个数较少的“与”项，它的“反”如果存在于其他的“与”项中，则该“反”是多余的。这就是利用公式 11 a：$A+\overline{A}B=A+B$

例如：
$$F=A(\overline{B}C+\overline{C})+\overline{A}\,\overline{C}D=A(\overline{B}+\overline{C})+\overline{A}\,\overline{C}D$$
$$=A\overline{B}+A\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}D=A\overline{B}+\overline{C}(A+\overline{A}D)$$
$$=A\overline{B}+\overline{C}(A+D)=A\overline{B}+A\overline{C}+\overline{C}D$$

4．注意是否存在可以利用公式 12 a：$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$ 来进行化简的三个“与”项。

下面通过一个例子来说明怎样综合应用上述方法进行“与-或”逻辑式的化简。

〔**例**〕 化简$F=AB+AD+A\overline{D}+\overline{A}C+BD+ACEP+\overline{B}E+EDP$

首先，注意到式内有 AD 和 $A\overline{D}$ 两项，它们可以合并成一项A。故
$$F=A+AB+\overline{A}C+BD+ACEP+\overline{B}E+EDP$$

变量个数最少的“与”项为A。于是 AB 和 $ACEP$ 都是多余的，因为它们都包含有A。故
$$F=A+\overline{A}C+BD+\overline{B}E+EDP$$

由于有A这一项，上式第二个“与”项中 $\overline{A}$ 是多余的。故
$$F=A+C+BD+\overline{B}E+EDP$$

第三项内有变量B，第四项含有它的反变量 $\overline{B}$，而这两个“与”项的其他因子都包含在末项 EDP 内，所以 EDP 这个“与”项是多余的。因此，F的最简式是

$$F=A+C+BD+\overline{B}E$$

二、“或-与”逻辑式的化简

一个最简的“或-与”式应该包含最少个数的“或”项，并在满足这一条件下，每一个“或”项包含的变量个数最少。

例如：
$$\begin{aligned}F&=(A+\overline{B}+\overline{C})(A+C+D)(A+C)(\overline{A}+B+C+\overline{D})\\&=(A+\overline{B}+\overline{C})(A+C)(\overline{A}+B+C+\overline{D})\\&=(A+\overline{B})(A+C)(B+C+\overline{D})\end{aligned}$$

这里F的三个“或-与”式中，第二式比第一式较简，因为它少含一个“或”项。第三式同第二式包含“或”项的个数相等，但在第三式中有两个“或”项包含的变量个数都比第二式各少一个，所以第三式是最简的“或-与”式，它不能再进行化简。

化简一个“或-与”逻辑式，通常要注意该逻辑式内是否存在有下述几种情况，并利用有关公式予以简化。

1. 如果存在有这样两个“或”项，其中一个“或”项含有某个原变量，而另一个“或”项含有它的反变量，除此以外，两个“或”项相同，则可利用等式 $(A+B)(A+\overline{B})=A$，将这两项合并成一项，合并时该变量被消去。

例如：
$$\begin{aligned}F&=(D+\overline{B})(\overline{D}+C+B+A)(D+C+B+A)\\&=(D+\overline{B})(C+B+A)\end{aligned}$$

2. 注意变量个数较少的“或”项，所有包含此项的“或”项都是多余的。这就是利用公式 10 *b*：$A(A+B)=A$

例如：
$$F=(A+B)(A+B+C)(B+D)=(A+B)(B+D)$$

3. 注意变量个数较少的“或”项，它的“反”如果存在于其他的“或”项中，则该“反”是多余的。这就是利用公式 11 *b*：$A(\overline{A}+B)=AB$ 以及由此推广的等式 $(A+B)\times(\overline{A}+B+C)=(A+B)(B+C)$

例如：
$$\begin{aligned}F&=[A+(\overline{B}+C)\overline{C}](\overline{A}+\overline{C}+D)\\&=(A+\overline{B}\overline{C})(\overline{A}+\overline{C}+D)=(A+\overline{B})(A+\overline{C})(\overline{A}+\overline{C}+D)\\&=(A+\overline{B})(A+\overline{C})(\overline{C}+D)\end{aligned}$$

4. 注意每一个“或”项，如果其中两个“或”项有相同的变量，并且一个为原变量而另一个为反变量，则如有另外一项包含了这两项的全部因子，这个第三项就是多余的。这就是利用公式 12 *b*：$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$

下面举一个例子说明怎样综合应用上述方法来进行“或-与”逻辑式的化简。

〔例〕 化简
$$\begin{aligned}F=&(A+B)(A+D)(A+\overline{D})(\overline{A}+C)(B+D)\\&\times(A+C+E+P)(\overline{B}+E)(E+D+P)\end{aligned}$$

首先，注意到式内有$A+D$和$A+\overline{D}$两项，它们可合并成一项A。故

$$F=A(A+B)(\overline{A}+C)(B+D)(A+C+E+P)(\overline{B}+E)(E+D+P)$$

变量个数最少的“或”项是A，“或”项 $(A+B)$ 和 $(A+C+E+P)$都包含了此项，所以它们是多余的。

故

$$F=A(\overline{A}+C)(B+D)(\overline{B}+E)(E+D+P)$$

因为有A，所以（$\overline{A}+C$）中的$\overline{A}$是多余的。故

$$F=AC(B+D)(\overline{B}+E)(E+D+P)$$

注意到“或”项（$B+D$）和（$\overline{B}+E$）分别包含了B和$\overline{B}$，所以最末一项由于它包含了D和E因而是多余的。

因此，原函数的最简式为：

$$AC(B+D)(\overline{B}+E)$$

三、对偶原理的应用

“与-或”逻辑式的化简，可以先写出该式的对偶“或-与”逻辑式，然后对这个“或-与”逻辑式进行化简，求得最简的“或-与”式，再将这一结果取其对偶，就得到原逻辑式的最简“与-或”式。

同样，化简一个“或-与”逻辑式，也可利用对偶原理，先写出该式的对偶“与-或”逻辑式，并将此“与-或”式化简到最简形式，所得结果再取其对偶，就得到原逻辑式的最简“或-与”式。

〔**例**〕 化简$F=C(C+A)(A+B)(\overline{A}+\overline{C}+D)(B+\overline{C}+D)$

先按照“或-与”逻辑式的化简方法化简。

$$\begin{aligned}F&=C(C+A)(A+B)(\overline{A}+\overline{C}+D)(B+\overline{C}+D)\\&=C(A+B)(\overline{A}+\overline{C}+D)(B+\overline{C}+D)\\&=C(A+B)(\overline{A}+D)(B+D)\\&=C(A+B)(\overline{A}+D)\end{aligned}$$

下面再利用对偶原理进行化简。令F_a代表原“或-与”逻辑式F的对偶式，并将F_a化简到最简形式：

$$\begin{aligned}F_a&=C+CA+AB+\overline{A}\overline{C}D+B\overline{C}D\\&=C+AB+\overline{A}\overline{C}D+B\overline{C}D\\&=C+AB+\overline{A}D+BD\\&=C+AB+\overline{A}D\end{aligned}$$

再对这个式子取其对偶，就得到F的最简“或-与”式：

$$F=C(A+B)(\overline{A}+D)$$

此结果与按“或-与”逻辑式化简法进行所得的结果相同。

注意，在前面讨论“与-或”逻辑式的化简及“或-与”逻辑式的化简时，我们分别举的例子是互为对偶的。

1.3.2 最小项和最大项

最小项的定义 n个逻辑变量的最小项是所有n个变量的逻辑乘积，其中每一个变量可以原变量或反变量形式出现。

例如，两个变量A、B的最小项为$\overline{A}\overline{B}$、$\overline{A}B$、$A\overline{B}$和AB。

n个变量的最小项共有2^n个。

为了说明最小项的特性，现以三个变量为例，列出它们全部最小项的真值表(表1-5)。

可见每个最小项都有一组且仅仅有一组变量的取值使得它为1。在变量取其他各组值

表 1-5

A	B	C	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

时，这个最小项的值都是 0。例如，最小项 $\overline{A}BC$ 是在变量 ABC 的取值为 011 时其值为 1，并且仅仅在这种取值时才为 1。对于其他各组取值，这个最小项 $\overline{A}BC$ 都为 0。由于这个缘故，我们说最小项 $\overline{A}BC$ 是和 011 这组变量的取值相对应的。可见每个最小项都和某一组变量的取值相对应。不同的最小项，使其为 1 的那一组变量取值亦不同。这就是说，不同的最小项和不同的一组变量取值相对应。例如三个变量的 8 个最小项分别和 8 组变量的取值相对应。

既然对于 n 个变量的任意一组取值，都有一个相应的最小项其值为 1，所以 n 个变量的所有最小项之和恒等于 1。例如，对于两个变量 A、B，它们的 4 个最小项之和恒等于 1。即

$$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}B+A\overline{B}+AB=1$$

一个"与-或"逻辑式可以运用配项等方法展成最小项之和的形式。例如：

$$\begin{aligned}F&=AB+AC+\overline{B}C=AB(C+\overline{C})+AC(B+\overline{B})+\overline{B}C(A+\overline{A})\\&=ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}C\end{aligned}$$

定理 任一逻辑函数都可由一个唯一的最小项之和来表达。

证：任一逻辑函数，可用真值表来表示。从真值表可直接将该逻辑函数写成最小项之和。

〔**例**〕 逻辑函数 $F=\overline{(AB+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{C})\,\overline{AB}}$，用最小项之和表达。

列出函数 F 的真值表（表 1-6）。

从真值表可立即写出：

$$F=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$$

为了叙述方便起见，最小项常用符号 m_i 表示。下标 i 是一个十进制数，它相当于这个最小项所对应的一组变量取值。例如最小项 $\overline{A}BC$ 是和 011 这组取值相对应的。011 相当于十进制数 3，则 $\overline{A}BC$ 就用 m_3 表示。

表 1-6

A	B	C	F	A	B	C	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

表 1-7 列出了三个变量 A、B、C 的 8 个最小项及其代表符号 m_i。