固体力学基础

高玉臣 著

中国铁道出版社

铁路科技图书出版基金资助出版

固体力学基础

高玉臣 著

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 9 9年·北 京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书前六章阐述固体力学中的基本概念，基本理论，其后三章讨论某些固体材料行为，再后三章是一些应用实例，对若干典型奇异点问题给出了渐近解，目的只在于演示分析方法。最后一章简述薄壳理论。书中叙述着重物理实质，主要是采用张量的绝对记法，并立足于大变形情况。本书可供力学工作者、大学教师、研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

固体力学基础/高玉臣著，—北京：中国铁道出版社，1999，9
ISBN 7-113-03488-8

Ⅰ. 固…　Ⅱ. 高…　Ⅲ. 固体力学　Ⅳ. 034

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 42263 号

书　　名：**固体力学基础**
著作责任者：高 玉 臣 著
出版・发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑：王 俊 法
印　　刷：北京兴顺印刷厂
开　　本：850×1168　1/32　印张：6.5　字数：160 千
版　　本：1999 年 9 月第 1 版　1999 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1—1000 册
书　　号：ISBN 7-113-03488-8/TU・607
定　　价：20.00 元

序　言

名为固体力学的书尚不多见，但属于固体力学的书已经很多。本书目的在于表述一些特有的内容，即用新观点阐述一些老的基本概念。读者也许会疑问，固体力学已久经锤炼，岂能有新观点？老子曰“道可道非常道，名可名非常名。”古代先哲已经认识到任何“理论”与“概念”都必然要不断演变与更新。

一门学科，开始只有几个原始概念，后来逐渐扩充成几本厚书，此乃所谓的发展。但是，岁月流逝，许多厚书中的内容难以长存，其中只有小部分能进入后人的头脑，如果再写出来就变成一本小册子了，这便是浓缩与萃取。如今的弹性力学习题，有的则是当年的博士论文。以上想法便是本书写作的初衷。

本书在叙述上力求简单通俗。作者认为，如果本质相同，直观的物理模型优于抽象的；简捷的数学公式胜过繁琐的。

作者指望本书能有两种效果，一是帮助初学者掌握最基本的概念，二是使已有固体力学一定基础者提高认识，理解其内在本质。值得说明的是，本书不是为了向读者提供更全面的资料，所以，没有罗列许多文献。

本书的内容主要出自作者的研究工作，除第十二章外，属初次发表，若有谬误之处，恳请读者不吝指正。

作者于北方交通大学

1998 年 9 月 15 日

主要新公式

位移梯度

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P}_i \otimes \boldsymbol{Q}^i$$

应力的四面体公式

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3V}(\boldsymbol{T}_A \otimes \boldsymbol{a} + \boldsymbol{T}_B \otimes \boldsymbol{b} + \boldsymbol{T}_C \otimes \boldsymbol{c})$$

应力的平行六面体公式

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V_Q}\boldsymbol{T}^i \otimes \boldsymbol{Q}_i \quad , \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{V_P}\boldsymbol{T}^i \otimes \boldsymbol{P}_i$$

运动方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^i}{\partial x^i} = \rho_0 V_P(\ddot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{f}) = \rho V_Q(\ddot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{f})$$

弹性本构关系

$$\boldsymbol{T}^i = \rho V_Q \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{Q}_i} = \rho_0 V_P \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{Q}_i}$$

$$= \rho V_Q \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{u}_i} = \rho_0 V_P \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{u}_i}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_0 \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2\rho_0 \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{G}}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{u}_i} \otimes \boldsymbol{Q}_i \, , \quad \boldsymbol{\tau} = \rho_0 \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{u}_i} \otimes \boldsymbol{P}_i$$

$$\boldsymbol{u}_i = \rho_0 V_P \frac{\partial W^*}{\partial \boldsymbol{T}_i}$$

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \rho_0 \frac{\partial W^*}{\partial \ \boldsymbol{\tau}}$$

薄壳横向力

$$N^\alpha = \frac{1}{A_Q}(\beta - \alpha)\frac{\partial \boldsymbol{m}^\gamma}{\partial x^\gamma} \cdot \boldsymbol{Q}_\beta$$

薄壳力矩

$$\boldsymbol{m}^\alpha = \rho_0 h_0 A_P \frac{\partial W_m}{\partial \underset{Q}{\boldsymbol{K}_\alpha}}$$

主要符号表

x^i， X^i	坐　标
$\boldsymbol{P}_i$， $\boldsymbol{Q}_i$	变形前及变形后的协变矢基
$\boldsymbol{P}^i$， $\boldsymbol{Q}^i$	变形前及变形后的逆变矢基
$\boldsymbol{F}$	位移梯度张量
$\boldsymbol{G}$	Green 应变张量
$\boldsymbol{C}$	Cauchy 应变张量
V_P, V_Q	变形前及变形后的基容
J	变形前后体积之比 V_Q/V_P
$\boldsymbol{u}$	位移矢量
$\boldsymbol{V}$	速度矢量
$\boldsymbol{R}$	应变速率张量
$\tilde{\boldsymbol{R}}$	应变速率偏量张量
$\boldsymbol{\omega}$	旋转速率张量
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy 应力张量
$\boldsymbol{\tau}$	Piola 应力张量
$\boldsymbol{\Sigma}$	Kirchhoff 应力张量
$\boldsymbol{T}^i$	基面力
$\boldsymbol{S}$	应力偏量张量
$\boldsymbol{S}^*$	修正的应力偏量张量
$\bar{\sigma}$	静水应力
$\bar{\sigma}^*$	修正的静水应力
σ_e	有效应力
ε_{pe}	有效塑性应变
$\mathrm{d}S_0$， $\mathrm{d}S$	变形前及变形后的边界面积微分
ρ_0， ρ	变形前及变形后的质量密度
W	单位质量的应变能
W^*	单位质量的余能

目　　录

第一章 张 量

§1.1 几个概念

连续介质

对连续介质的概念，我国古代学者已有深刻的认识。“庄子”中有言：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”就是说，木棒可以被无限的分割下去。近代连续介质的概念仍然是指可以无限分割而不致间断的物质，换句话说，无论用多高倍的显微镜都不会在这种物质内找到间隙。显然，现实中的任何固体、液体和气体都经受不住这种无限制的分割过程。所以“连续介质”的概念只是在一定的条件下和一定的近似程度上代表了物质的某些属性。任何概念都只能反映事物的某一侧面而不能穷尽其全部属性。本书的讨论是在承认“连续介质”概念的前提下进行的。所谓连续固体乃连续介质中的一类，它们明显的具有维持自身形状的一定能力，或者说，它们具有抵抗变形的一定能力。

微元和质点

无论是天空的云，海里的水，还是陆地的山均可看作为连续介质，都有着复杂的行为，在它们的各种行为中运动与变形乃力学研究的主要对象。为了描述某连续体，必须把握其中每个部分的行为。从连续体中选定的任意一个充分小的部分称为微元，见图 1.1。所谓充分小，这只是一个相对的概念，并非绝对尺寸。当我们考虑某一海域时，数平方公里的面积也许可当作微元。但是，如果我们研究玻璃中的裂纹，裂尖前方以毫米计算的区域仍

不可视为一个微元。微元必须是充分简单，其中的物理量没有复杂的分布。如果一个微元不具有几何特征，或几何特征已无关紧要，则称为质点。质点也只是一个简化模型。当研究天体运动时，地球被看成质点。当研究地壳变迁时，地球便不是质点了。

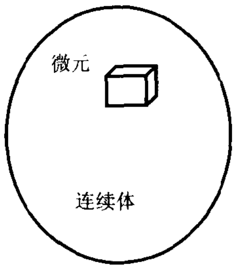

图 1.1　连续体与微元

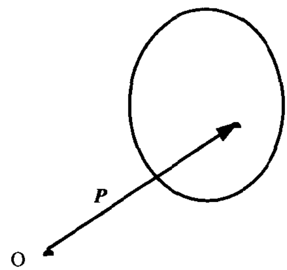

图 1.2　矢　径

矢　径

连续体在任意时刻 t 占据一定的空间区域。每个质点在任意时刻 t 占据一定的空间位置，该位置可以用一个从某个参考点 O（原点）出发的矢量 $\boldsymbol{P}$ 表示，见图 1.2，此矢量称为该质点在时刻 t 的矢径。

随体坐标

对连续体中的每个特定质点赋予一组数 $X^i\,(i=1,2,3)$，称之为随体坐标，见图 1.3。当质点在空间运动时，其随体坐标不变。随体坐标与质点的关系正如身份证号码与每个公民的关系一样，它只是一种表征参数。X^i 可根据情况随意选取。

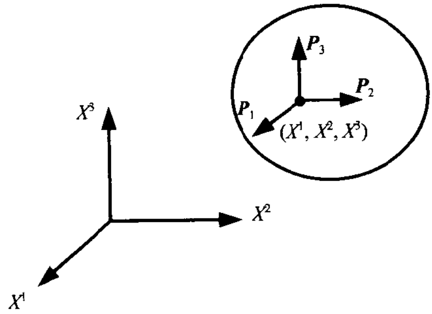

图 1.3　随体坐标

空间坐标

对空间中的每个几何点赋予一组数 $x^i(i=1,2,3)$，称之为空间坐标，见图 1.4。空间坐标与几何点的关系正如门牌号与建筑物之间的关系一样。x^i 可根据方便而选取。

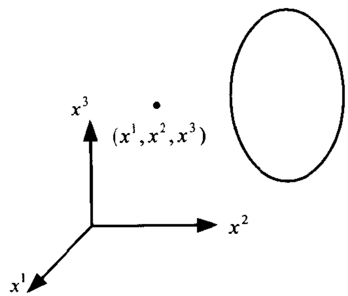

图 1.4　空间坐标

运动描述

具有随体坐标 X^j 的质点在时刻 t 具有空间坐标 x^i，那么 x^i 是 t 与 X^j 的函数

$$x^i = x^i(X^j, t) \tag{1.1.1}$$

反之，对固定的空间点 x^i，在时刻 t，将有质点 X^j 在此逗留或经过，即 X^j 是 t 与 x^i 的函数

$$X^j = X^j(x^i, t) \tag{1.1.2}$$

以上两式互为反函数，任选其一便可描述运动。这正象公安机构有两种方法把握每个人的行径，其一是在给定时刻确定出每个人的住所，其二是在给定时刻对每个住所确定出其中的人。

§1.2 矢基与坐标变换

矢 基

质点的矢径 $\boldsymbol{P}$ 可看成随体坐标 X^i 的矢量函数

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(X^i) \tag{1.2.1}$$

当然，$\boldsymbol{P}$ 也是空间坐标 x^i 的矢量函数。由于 x^i 与 X^i 互相单值对应，即可以互相换算，所以暂时只就 X^i 坐标讨论问题便够了。对（1.2.1）式进行微商运算，便得到三个向量场 $\boldsymbol{P}_i (i = 1,2,3)$

$$\boldsymbol{P}_i = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial X^i} \tag{1.2.2}$$

矢量组 $\boldsymbol{P}_i$ 称为坐标系 X^i 在对应点的矢基，或基矢，见图 1.3。矢基可充分代表坐标系的性质。

基 面

令
$$\boldsymbol{A}^i = \boldsymbol{P}_{i+1} \times \boldsymbol{P}_{i+2} \tag{1.2.3}$$

这里约定 4=1，5=2，$\boldsymbol{A}^i$ 称为基面矢量，其方向垂直于 $\boldsymbol{P}_{i+1}$ 和 $\boldsymbol{P}_{i+2}$ 所构成的面，其量值等于 $\boldsymbol{P}_{i+1}$ 与 $\boldsymbol{P}_{i+2}$ 张成的平行四边形面积。令

$$A^i = \left|\boldsymbol{A}^i\right| \tag{1.2.4}$$

A^i 称为基面。

基　容

由 $\boldsymbol{P}_1$， $\boldsymbol{P}_2$， $\boldsymbol{P}_3$ 作混合积，以 V 表示之

$$V=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3) \tag{1.2.5}$$

V 代表三个基矢量所张成的平行六面体的容积，简称“基容”。

基面和基容均由矢基所决定。

坐标变换

点的矢径 $\boldsymbol{P}$ 不依赖于坐标的选取，但是矢基 $\boldsymbol{P}_i$ 则依赖于坐标的选取。若令 $\boldsymbol{P}_j$ 表示另一坐标系 $Y^j=Y^j(X^i)$ 中的矢基，由复合函数微商法则得

$$\boldsymbol{P}_j=\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial Y^j}=\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial X^i}\cdot\frac{\partial X^i}{\partial Y^j}=\boldsymbol{P}_i\frac{\partial X^i}{\partial Y^j} \tag{1.2.6}$$

上式采用了求和惯则，即当上指标和下指标相同时，则令该指标取 1 至 3，并求和。（1.2.6）式即为坐标变换下矢基的变换规则。显然 X^i 坐标与 Y^j 坐标具有同等的地位。这里的坐标变换不限于随体坐标，可以在任何坐标之间进行变换。

§1.3　并　矢

并　矢

由两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 并置，记为 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$，称为二重并矢。其中 $\otimes$ 代表并矢关系，或称为并矢运算，其含义是不作任何运算，只表示两侧的量相连，但是二者顺序固定。现在约定并矢的法则：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为三个矢量， a,b,c 为三个常数，于是

$$(a \cdot \boldsymbol{A}+b \cdot \boldsymbol{B}) \otimes (c \cdot \boldsymbol{C}) = (ac)\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{C} + (bc)\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C} \tag{1.3.1}$$

并矢究竟代表什么物理意义？每个初学者都会有这个问题。应该说 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ 既包含着 $\boldsymbol{A}$ 中的信息，又包含着 $\boldsymbol{B}$ 中的信息，这些信息在 $\otimes$ 运算之下，既未损失，也未增添，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 仍然独立着，但又合作着。至于在 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ 中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的具体含意应由实际情况而定，例如 $\boldsymbol{A}$ 可能代表某截面上测得的一个力向量，$\boldsymbol{B}$ 则可能代表测量时所选定截面的方位及面积。

多重并矢

仿照二重并矢，我们可由 k 个矢量 $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2 \cdots \boldsymbol{C}_k$ 定义 k 重并矢 $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 \otimes \boldsymbol{C}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{C}_k \tag{1.3.2}$$

其含意仍是各矢量保持独立而互相合作。至于其中每个矢量的具体物理意义只能在应用中予以规定。两个 k 重并矢相等是指每个对应位置的矢量都分别相等。必要时，两个多重并矢还可以并写而成为更多重的并矢。多重并矢之间常见的运算是点乘，但要指明运算在哪一对向量之间进行。如果没有特殊指明，点乘运算则在前者之尾与后者之首之间进行。例如

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{D}) \tag{1.3.3}$$

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) : (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D}) \tag{1.3.4}$$

k 重并矢基

由矢基 $\boldsymbol{P}_i$ 作所有可能的 k 重并矢 $\boldsymbol{P}_{i_1} \otimes \boldsymbol{P}_{i_2} \cdots \boldsymbol{P}_{i_k}$，其中 $i_1, i_2, \cdots i_k$ 均可取值 1,2,3，这些并矢的集合称为 k 重并矢基。k 重并矢基共有 3^k 个。依照并矢中各矢量的独立性，再参照坐标变换时矢基的变换规则（1.2.6）式，那么 k 重并矢基应服从以下变换

规则

$$\boldsymbol{P}_{j_1}\otimes\boldsymbol{P}_{j_2}\cdots\otimes\boldsymbol{P}_{j_k}=\boldsymbol{P}_{i_1}\otimes\boldsymbol{P}_{i_2}\cdots\otimes\boldsymbol{P}_{i_k}\cdot\frac{\partial X^{i_1}}{\partial Y^{j_1}}\cdot\frac{\partial X^{i_2}}{\partial Y^{j_2}}\cdots\frac{\partial X^{i_k}}{\partial Y^{j_k}} \tag{1.3.5}$$

上式中，指标 j 在坐标系 Y^j 中使用，指标 i 在坐标系 X^i 中使用。

§1.4 张　量

量与数

任何一个量，都是客观对象的数学表征，通常是由若干个数字给出的．当然，这些数字的值依赖于测量的方法，例如，某两点间的距离，若用厘米量得的值为 20，改用毫米测得的值则为 200。因此，要确定某个量，在给数字的同时，还要标明其量纲，例如 1.5 斤；2.0 尺等。量纲亦称为单位，它本身就是一个量。如所周知，标量是只需一个数值即可表征的量，就是说只需引入一个独立单位，这个数值依赖于测量单位，但不依赖于空间坐标方向的选取。n 维空间的矢量 $\boldsymbol{a}$ 则是需要 n 个数 $a^1,a^2,\cdots a^n$ 联合起来表征的量，而且 $\boldsymbol{a}$ 可通过矢基 $\boldsymbol{P}_i$ 表出

$$\boldsymbol{a}=a^i\boldsymbol{P}_i \tag{1.4.1}$$

这里 $\boldsymbol{P}_i(i=1,2,\cdots n)$ 相当于 n 个独立单位。矢量的客观性要求 $\boldsymbol{a}$ 不随坐标选取而变，注意到矢基的变换规则(1.2.6)式，则在 Y^j 坐标系中的 a^j 可通过 X^i 坐标系中的 a^i 表示

$$a^j=a^i\cdot\frac{\partial Y^j}{\partial X^i} \tag{1.4.2}$$

这一变换规则不同于(1.2.6)，为了区分二者，将(1.2.6)称为协变规则，而(1.4.2)称为逆变规则。