高等数学学习指导

主编　门艳春　何文章

蔡吉花

哈尔滨工程大学出版社

前　言

本书是以国家教委高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》为依据，按照同济大学数学教研室所编的《高等数学》的章节顺序，给大学生编写的一本辅助教材。作为补充教材在校内使用过程三届，本书配合教学，与教学同步，力求使学生学懂、学深、学透。帮助学生解决疑难，巩固基本概念，加深理解基本理论，提高分析问题与解决问题的能力。

本书内容包括一元函数微积分，空间解析几何与向量代数，多元函数微积分，无穷级数，常微分方程共十二章。供两学期使用。每章均由本章要求、内容提要与典型例题、练习题和练习题解答三部分构成。本章要求明确提出每章所应达到的基本要求；内容提要扼要叙述了每章的公式与定理；典型例题共有 313 题，典型例题的编排由浅入深，结合例题进行学习指导；练习题的选题具有广泛性、典型性、新颖性，本书共收集了 659 道题，并且按内容先后，从易到难的顺序编写，还给出了练习题解答，便于自学。

本书可与工科高等数学教材配套使用，也可供电视、函授、业余大学的学生学习高等数学时使用，还可供从事高等数学教学的教师及报考非数学专业研究生考生参考。

参加本书编写的同志有：门艳春、毋丽华、安玉伟、宋明娟、李宏儒、何文章、杜红、徐晶、徐晓林、桂占吉、蔡吉花、魏平；本书由门艳春、何文章、蔡吉花主编；毋丽华、宋明娟、安玉伟、魏平任副主编。

本书由李宏儒、桂占吉两位同志为主审。

本书在编写的过程中得到了出版社及有关单位和同仁的支持与鼓励，在此表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，时间仓促，书中难免有不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

1996 年 3 月

目　　录

第一章　函数与极限

[本章要求]

1. 理解函数的概念，了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性；理解复合函数的概念，了解反函数的概念；

2. 掌握基本初等函数的性质及其图形；会建立简单实际问题中的函数关系式；

3. 理解极限的概念（对极限的 $\varepsilon - N$，$\varepsilon - \delta$ 定义可在学习过程中逐步加深理解，对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高要求），掌握极限四则运算法则；

4. 了解两个极限存在准则（夹逼准则和单调有界准则），会用两个重要极限求极限；

5. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限；

6. 理解函数在一点连续的概念；了解间断点的概念，并会判别间断的类型；

7. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（介值定理和最大、最小值定理）.

[内容提要与典型例题]

一、函　数

1. 函数定义

设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集．如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数．记作 $y = f(x)$，称 x 为自变量，y 为因变量，D 为定义域.

2. 反函数

对于函数 $y = f(x)$，若在值域内事先取定变量 y 的数值，亦能按照一定的法则有唯一的 x 值与之对应，记作 $x = \varphi(y)$，则称由函数 $y = f(x)$ 可确定反函数 $x = \varphi(y)$，或说 $y = \varphi(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数.

3. 复合函数

设有两个函数 $y = f(u)$、$u = \varphi(x)$，若对于变量 x 所考虑的范围内的每一个值，变量 y 按照 $f[\varphi(x)]$ 总有确定的数值与之对应，那么函数 $y = f[\varphi(x)]$ 称为由函数 $u = \varphi(x)$ 及 $y = f(u)$ 复合而成的函数，简称复合函数，u 为中间变量.

构成复合函数的条件是 $\varphi(x)$ 的值域落在 $f(x)$ 的定义域内.

4. 隐函数

若 y 是 x 的函数，且变量 y 与 x 关系用二元方程 $F(x,y)=0$ 表示，称 y 是 x 的隐函数.

并非每一个二元方程 $F(x,y)=0$ 都能确定 y 是 x 的函数. 例如 $\sin^2 x+\cos y=3$，关于 $y=f(x)$ 的存在性问题参见《高等数学》中的隐函数存在定理.

5. 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如函数 $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$，$y=\dfrac{e^x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ 都是初等函数.

非初等函数是指除初等函数以外的函数，我们常见的分段函数以及后面要学到的用极限、积分及级数等形式表示的函数均为非初等函数.

6. 函数的性质

(1) 有界性：设 I 为区间，若对任意的 $x\in I$，$|f(x)|\leqslant M$，$(M>0)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

(2) 单调性：若对任何 x_1、$x_2\in I$，且 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增(减).

3 奇偶性：若对于定义域内任何 x，有 $f(-x)=-f(x)$ $(f(-x)=f(x))$，则称 $f(x)$ 为奇(偶)函数.

(4) 周期性：如果对任何 x，都有 $f(x+l)=f(x)$，则称满足 $f(x+l)=f(x)$ 的最小正数 l，为 $f(x)$ 的周期.

例 1.1 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0.1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域. $(a>0)$.

解 由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 及 $0\leqslant x-a\leqslant 1$ 即得：

若 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$，所求定义域为 $[a,1-a]$；若 $a>\dfrac{1}{2}$，其定义域不存在.

例 1.2 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geqslant 0\\ x^2+4 & x<0\end{cases}$.

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(x-1)$.

解 $f(-1)=(-1)^2+4=5$，$f(0)=2\times 0+1=1$，

$$f(x-1)=\begin{cases}2(x-1)+1, & x-1\geqslant 0,\\ (x-1)^2+4, & x-1<0.\end{cases}$$

即 $$f(x-1)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 1,\\ x^2-2x+5, & x<1.\end{cases}$$

例 1.3 设函数 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$.

解 令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，

$f(t)=(t-1)^2+3(t-1)+5=t^2+t+3$.

故 $f(x)=x^2+x+3$.

例1.4 设函数 $H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $H(x)-H(x-1)$.

解 由于 $H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 所以 $H(x-1)=\begin{cases}0, & x-1<0,\\ 1, & x-1\geqslant 0.\end{cases}$

即 $H(x-1)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ $H(x)-H(x-1)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$

二、极限

·.极限定义

(1) 对于任给的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,则称常数 a 为数列 x_n 的极限,或数列收敛于 a,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,或 $x_n\to a\quad(n\to\infty)$.

(2) 对于任给的 $\varepsilon>0$,总存在正数 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\quad(x\to x_0)$.

(3) 对于任给的 $\varepsilon>0$,总存在正数 X,当 $|x|>X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\quad(x\to\infty)$.

(4)(左极限、右极限)在定义(2)中,如果将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$($x_0<x<x_0+\delta$),则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左(右)极限,记作 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$,[$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$].

2. 无穷小、无穷大、无穷小的性质

(1) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,则称 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时,函数 $f(x)$ 是无穷小.

(2) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$,则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷大.

对于数列情形可用类似的方法定义无穷小与无穷大.

(3) 有限个无穷小的和仍为无穷小.

(4) 有限个无穷小的积仍为无穷小.

(5) 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小.

(6) 无穷小的倒数为无穷大. 反之,无穷大的倒数为无穷小.

3. 极限的性质及运算法则

(1)(有界性) 收敛数列必有界.

有界是数列收敛的必要条件,非充分的. 如数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 是有界的,但当 $n\to\infty$ 时它没极限.

这里还要指出的是:数列无界,并不等于说它就是无穷大,如数列 $\{2^{(-1)^n n}\}$: $\frac{1}{2},2^2,\frac{1}{2^3},$

$2^{1}\cdots,\frac{1}{2^{2n-1}},2^{2n}\cdots$，其奇数项可与 0 任意接近，而偶数项却无限远离原点，这个数列是无界的，然而却不是无穷大.

(2)(局部保号性) 若 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant 0$(或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant 0$).

反过来，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$(或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$)，则一定存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(3)(极限与无穷小的关系) $\lim f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，这里 $\alpha(x)$ 是指在同一极限过程下的无穷小.

(4) 极限存在的充要条件是左右极限存在且相等.

即
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A.$$

(5) 若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限均存在且分别等于 $A\pm B$、$A\cdot B$、$\frac{A}{B}(B\neq 0)$.

4. 极限存在准则及两个重要极限

(1)(夹逼准则) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，且 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2)(单调有界准则) 单调有界数列必有极限.

(3)(重要极限) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$(或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$).

5. 无穷小的比较及等价无穷小的代换

(1) 设变量 α 及 β 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小，而 $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限. 如果

$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 是 α 的同阶无穷小，记作 $\beta=O(\alpha)$；

$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$；

$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

(2)(等价无穷小代换定理) 若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$. 且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

注意：上述的极限均为同一极限过程.

(3) 当 $x\to 0$ 时常用代换的等价无穷小

$\sin x\sim x$； $\mathrm{tg}x\sim x$； $\arcsin x\sim x$； $\mathrm{arctg}x\sim x$；$\ln(1+x)\sim x$； $e^x-1\sim x$；

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$； $a^x-1\sim x\ln a$； $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

注意：在用等价无穷小的代换时，如果分子或分母为代数和，将代数和部分作为整体代换可以，如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$，如果是分别换，或换其中某一项，则常常会出现错

误. 如$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$. 而实际上,由罗必塔法则可得$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$.

极限出现错误的原因是,若$\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,而$\alpha+\beta$一般不等价$\alpha'+\beta'$.

因此,利用等价无穷小替代作简化极限运算时,有许多简便的地方,但也有一定的局限性. 一般来说,在乘积的形式中可以相互代替,但在代数和的形式中不能代换.

例 1.5 对于数列x_n,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$和$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$.

证 (必要性) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,依定义,对任意的$\varepsilon>0$,存在$N$,当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$. 取$N_1=[\frac{N}{2}]$,当$n>N_1$时,有$|x_{2n}-a|<\varepsilon$,再取$N_2=[\frac{N+1}{2}]$,当$n>N_2$时,有$|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$.

(充分性) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$,由定义知,对于任给的$\varepsilon>0$,必存在$N_1$,当$n>N_1$时,有$|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$,也必存在$N_2$,当$n>N_2$时,有$|x_{2n}-a|<\varepsilon$,
取$N=\max\{2N_1-1,2N_2\}$,当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$,此即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 1.6 证明函数$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$在点$x=0$的任何邻域内是无界的,但当$x\to 0$时,不成为无穷大.

证 对于无论多么大的正数M,总有充分接近于$x=0$的点,使$|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}|>M$,例如取$x=\frac{1}{n\pi}$,则$|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}|=n\pi$,若$n>\frac{M}{\pi}$,则当$x=\frac{1}{n\pi}$时,$|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}|>M$,此即函数$f(x)$在$x=0$的任何邻域内是无界的.

其次,当$x\to 0$时,$f(x)$并不趋向无穷,因若取$x=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$,则当$n\to\infty$时,$x\to 0$,

而这时$\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\to 0$,因而函数并不趋向无穷大.

例 1.7 设$f(x)=\frac{px^2+qx+5}{x-5}$ (p、q为实数) 问(1)p、q各取何值时$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$、(2)$p$、$q$各取何值时$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$、(3)$p$、$q$各取何值时$\lim\limits_{x\to 5}f(x)=1$.

解 (1) 由$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$知,$p=0$,$q=1$.

(2) 由$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$知,分子的最高次幂低于分母的最高次幂,所以,$p=q=0$.

(3) 由于$\lim\limits_{x\to 5}f(x)=1$, 及$\lim\limits_{x\to 5}(x-5)=0$, 可知$\lim\limits_{x\to 5}(px^2+qx+5)=25p+5q+5=0$,即$q=-1-5p$, 而$\lim\limits_{x\to 5}\frac{px^2+(-1-5p)x+5}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}(px-1)=5p-1=1$,

所以$p=\frac{2}{5}$,$q=-3$.

例 1.8 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$.

解 因为$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$ $(k=2,3,\cdots,n)$.

所以　原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.

例 1.9　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

解　显然将原式变形很难，但易看出，

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$，

由夹逼准则得：原式 $=1$.

例 1.10　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

解　当 $x=0$ 时，显然极限为 1，当 $x\neq 0$ 时，分子分母乘以 $\sin x$.

$$原式 = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^2\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}}$$

$$= \cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}\cdot\sin x}{x\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

注意：本题利用了重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，同时最后得到的 $\frac{\sin x}{x}$ 是说明原题的结果为 x 的函数，n 为极限变量，x 是参数.

例 1.11　求极限 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$；(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^x$

解　(1)　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\sin\frac{1}{x} = 0$

注意：当 $x\to 0$ 时，$\sin\frac{1}{x}$ 为有界函数，x 为无穷小，所以乘积为无穷小，原极限不可写成 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$，因为极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

(2) 令 $t=\cos x$，当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$t\to 0$　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}} = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot 3} = e^3$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^x = \lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{1+x})^x = \lim\limits_{x\to\infty}[(1-\frac{1}{1+x})^{-(1+x)}]^{-\frac{x}{1+x}} = e^{-1}$.

例 1.12　求 $\lim\limits_{n\to\infty}n[a^{\frac{1}{n}}-1]$　$(a>0)$

解　令 $t=a^{\frac{1}{n}}-1$，当 $n\to\infty$ 时，$t\to 0$，而且 $n=\frac{1}{\log_a(1+t)}$，所以

原式 $= \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)} = \frac{1}{log_a e} = \ln a$.

例 1.13　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1-\mathrm{tg}x})}{(e^x-1)\ln(1+x)}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 2\mathrm{tg}x}{(\sqrt{1+\mathrm{tg}x}+\sqrt{1-\mathrm{tg}x})(e^x-1)\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{(\sqrt{1+\mathrm{tg}x}+\sqrt{1-\mathrm{tg}x})\cdot x^2}=1.$$

注意：此题的解法中用了，当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{tg}x\sim x$、$e^x-1\sim x$、$\ln(1+x)\sim x$.

例 1.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

解 原式$=\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{x^{50}}\cdot\dfrac{x^{50}}{(2x+1)^{50}}$

$$=\lim_{x\to\infty}(2-\frac{3}{x})^{20}\cdot(3+\frac{2}{x})^{30}\cdot\frac{1}{(2+\frac{1}{x})^{50}}=2^{20}\cdot 3^{30}\cdot\frac{1}{2^{50}}=(\frac{3}{2})^{30}.$$

例 1.15 设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$、$\beta(x)$ 是无穷小，且当 $\alpha(x)-\beta(x)\neq 0$，证明当 $x\to x_0$ 时，$\ln[1+\alpha(x)]-\ln[1+\beta(x)]$ 与 $\alpha(x)-\beta(x)$ 是等价无穷小.

证 因为$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$，所以$\lim\limits_{x\to x_0}[\alpha(x)-\beta(x)]=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\{\ln[1+\alpha(x)]-\ln[1+\beta(x)]\}=0$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln[1+\alpha(x)]-\ln[1+\beta(x)]}{\alpha(x)-\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln\dfrac{1+\alpha(x)}{1+\beta(x)}}{\alpha(x)-\beta(x)}$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln[1+\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{1+\beta(x)}]}{\alpha(x)-\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\ln[1+\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{1+\beta(x)}]^{\frac{1+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\cdot\frac{1}{1+\beta(x)}}=\ln e=1.$$

故当 $x\to x_0$ 时 $\ln[1+\alpha(x)]-\ln[1+\beta(x)]$ 与 $\alpha(x)-\beta(x)$ 等价.

三、函数的连续性

1. 连续性定义

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

若 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在点 x_0 左连续.

(3) 若函数 $f(x)$ 在某区间上每一点都连续(如果这个区间有端点，在左端点右连续，在右端点左连续)，则称函数 $f(x)$ 在该区间上连续.

2. 间断点的分类

(1) 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不满足连续性定义，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

(2) 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，且左右极限 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

非第一类间断点的间断点，称为第二类间断点．即 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ 至少有一个不存在.

$$
\text{第一类间断点}\begin{cases}\text{可去间断点}, & \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \text{ 存在}\begin{cases} f(x_0)\text{ 无定义} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0), \end{cases} \\ \text{跳跃间断点}, & \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x). \end{cases}
$$

$$
\text{第二类间断点}\begin{cases}\text{无穷间断点}, & \text{如 } y = \dfrac{1}{x-1} \text{ 在 } x = 1, \\ \text{振荡间断点}, & \text{如 } y = \cos\dfrac{1}{x} \text{ 在 } x = 0, \\ \text{其它间断点}. \end{cases}
$$

3. 连续函数的性质与初等函数的连续性

(1) 有限个连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数;

(2) 单值单调连续函数的反函数在其对应区间上也为单值单调的连续函数;

(3) 连续函数的复合函数仍为连续函数;

(4) 基本初等函数在其定义域内连续;

(5) 一切初等函数在其定义区间内连续.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1)(有界性定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,则函数 $f(x)$ 在该区间上有界.

(2)(最大值最小值定理) 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

(3)(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=0$,其中 ξ 满足 $a<\xi<b$.

(4)(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 c,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=c$.

例 1.16 适当选取 a,使函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ a+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 连续.

解 由给定的函数可知,除了 $x=0$ 外,处处连续,$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} e^x=1$,$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(a+x)=a=f(0)$,显然取 $a=1$ 时,可使 $f(x)$ 为连续函数.

例 1.17 求下列函数的间断点,并说明间断点所属类型.

(1)$y=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$　　(2)$y=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant 1, \\ |x-1|, & |x|>1. \end{cases}$

解 (1) 当 $x\neq 0$ 时,函数连续,由于 $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}=0=f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,故 $x=0$ 是第二类间断点.

$$
(2) f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\in(-\infty,-1), \\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & x\in[-1,1], \\ x-1, & x\in(1,+\infty). \end{cases}
$$

由于 $1-x$,$\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 与 $x-1$ 均为初等函数,且在其定义域内连续,故只考虑在 $x=\pm 1$

处的连续性即可.

$\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}(1-x)=2$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$.

$\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0=f(1)$, $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}(x-1)=0$.

故 $x=1$ 是连续点，$x=-1$ 是第一类间断点.

例 1.18 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判别其类型.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^{2n}}-1}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1}x$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\begin{cases} x, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -x, & |x|>1. \end{cases}$

由 $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0} -x=1$，$\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0} x=-1$，故 $x=-1$ 是第一类间断点，同理 $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to1-0} x=1$，$\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to1+0} -x=-1$，$x=1$ 亦是第一类间断点.

例 1.19 设 $f(x)$ 是个连续函数，其定义域和值域都是$[a、b]$，求证存在 $\xi\in[a、b]$ 使 $f(\xi)=\xi$.

证 设 $F(x)=f(x)-x$，由已知 $F(a)=f(a)-a\geqslant0$，$F(b)=f(b)-b\leqslant0$，如 $F(a)=0$，则 a 就是要找的 ξ，即 $f(\xi)=\xi$，同样，若 $F(b)=0$，结论也成立. 当 $F(a)>0$，$F(b)<0$ 时，由介值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a、b)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

例 1.20 若 $f(x)$ 在$(-\infty、+\infty)$内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在$(-\infty,+\infty)$内有界.

证 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，即对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$， 当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 即 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

由于 $f(x)$ 在整个数轴上连续，则在闭区间$[-X,X]$也连续，由最值定理 $m\leqslant f(x)\leqslant M$、

$x\in[-X,X]$，取 $M_0=\max\{A+\varepsilon、M\}$， $m_0=min\{A-\varepsilon、m\}$， 则对于任何实数 x 来说，都有 $m_0\leqslant f(x)\leqslant M_0$，即函数 $f(x)$ 在$(-\infty、+\infty)$内有界.

[练　习　题]

1.1 设 $f(x)$ 的定义域为$(0、1]$，写出 $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域(　　　).

1.2 设 $f(x)=\begin{cases} x^2-x-1, & x\leqslant1, \\ 2x-x^2, & x>1. \end{cases}$ 求 $f(1+a)-f(1-a)$，其中 $a>0$.

1.3 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{\pi}{n}=$ (　　　).

1.4 极限 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}=$ (　　　).

1.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{4x+4}$ 的值是(　　　).

1.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2+2)^3}{(2x^3+3)^2}=$ (　　　).

1.7 $\lim\limits_{x\to 0}\cos(\frac{\sin\pi x}{x})=($ $)$.

1.8 已知$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$,则 $a=($ $)$、$b=($ $)$.

1.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^{2n}+2)^2-(x^{2n}-2)^2}{(x^n+1)^2+(x^n-1)^2}=($ $)$.

1.10 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=($ $)$.

1.11 若$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=4$,求 $c=($ $)$.

1.12 当 $x\to x_0$ 时,$\alpha(x)$ 与 $\gamma(x)$ 是等价无穷小,$\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小,则极限$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\gamma(x)-\beta(x)}=($ $)$.

1.13 当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小,则当 $x\to x_0$ 时,无穷小 $f(x)+g(x)$ 与无穷小 $g(x)$ 的关系是( ).

1.14 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{ax}{\sin x}, & x<0,\\ e^x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 若要使$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在,则 $a=($ $)$.

1.15 设 $f(x)=\begin{cases}2+(x-1)\cos\frac{1}{x-1}, & x>1,\\ 2x^2+\ln x, & x\leqslant 1.\end{cases}$ 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的( )点.

1.16 极限$\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}]$的结果是( ).

A:无穷大; B:0; C:$-\frac{1}{2}$; D:不存在,也不是无穷大.

1.17 若 $f(x)$ 是定义在$[a,b]$上单调增函数,$x_0\in(a,b)$,则( ).

A:$f(x_0-0)$ 存在,但 $f(x_0+0)$ 不一定存在; B:$f(x_0+0)$ 存在,但 $f(x_0-0)$ 未必存在; C:$f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$ 都存在,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 未必存在; D:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

1.18 极限$\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin x)$ 的结果是( ).

A:-1; B:1; C:0; D:不存在.

1.19 设 $0<a<b$,则数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$ 是( ).

A:a; B:b; C:1; D:$a+b$.

1.20 当 $x\to 0$ 时,$x^2-\sin x$ 是 x 的( ).

A:高阶无穷小; B:同阶无穷小; C:低价无穷小; D:等价无穷小;

1.21 当 $x\to 0$ 时$(1-\cos x)^2$ 是 $\sin^2x$ 的( ).

A:高阶无穷小; B:同阶无穷小,但不等价; C:低阶无穷小; D:等价无穷小.

1.22 设 $f(x)=\frac{1-\alpha e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的( ).

A:可去间断点; B:跳跃间断点; C:无穷间断点; D:振荡间断点.

1.23 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x+x\sin\frac{1}{x}, & x<0,\\ x^2+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的( ).

A:可去间断点；　B:跳跃间断点；　C:振荡间断点；　D:连续点.

1.24　设 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$,求 $f(\frac{1-x}{1+x})$　$(x\neq -1)$.

1.25　计算$\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n^2+4n+5}-(n-1)]$.

1.26　求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\{x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\}$ 的表达式.

1.27　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}]$.

1.28　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(x+\frac{2}{n})+(x+\frac{4}{n})+\cdots+(x+\frac{2n}{n})]$.

1.29　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在,问$\lim\limits_{x\to x_0}\{f(x)+g(x)\}$是否存在,并证明.

1.30　证明数列 $x_0=1,x_{n+1}=\sqrt{2x_n},n=0,1,2\cdots$ 有极限,并求其值.

1.31　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,　$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,　$g(x)\neq 0$,　证明$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=b$的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-bg(X)}{g(x)}=0$.

1.32　求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x+1)^2+(2x+1)^2+(3x+1)^2+\cdots+(10x+1)^2}{(10x-1)(11x-1)}$.

1.33　求$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1})^{2-n}$.

1.34　求$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1})^n$.

1.35　讨论$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+e^{-nx}}{1-e^{-nx}}$.

1.36　已知:$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+bx+c}{1-x}=5$,试确定 b、c 的值.

1.37　求$\lim\limits_{x\to\infty}x[\sqrt{x^2+2x+5}-(x+1)]$.

1.38　求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot\cos x}{\sqrt{1+x^3}}$ 的值.

1.39　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\mathrm{tg}x})$ 的值.

1.40　求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$ 的值.

1.41　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$ 的值.

1.42　计算$\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+1)-\ln n]$.

1.43　计算$\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x]$.

1.44　计算$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

1.45　计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{\sec x-1}$.

1.46　计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-3x}}{x^2+2x}$.

1.47 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{-n}-x^{n}}{x^{-n}+3x^{n}}$.

1.48 计算$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{\ln|x|}$.

1.49 计算$\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\ln(a+\dfrac{1}{n})+\ln(a-\dfrac{1}{n})-2\ln a]\quad(a>0)$.

1.50 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}3x}{arcsin2x}$.

1.51 设$\alpha(x)=x^3-3x+2,\beta(x)=c(x-1)^n$,求出$c$与$n$,使当$x\to1$时,$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

1.52 设当$x\to x_0$时,$\alpha(x)$、$\beta(x)$是无穷小, 且当$\alpha(x)-\beta(x)\neq0$, 证明当$x\to x_0$时, $e^{\alpha(x)}-e^{\beta(x)}$与$\alpha(x)-\beta(x)$是等价无穷小.

1.53 设函数$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,试给出"$f(x)$在闭区间$[a、b]$的左端点$x=a$处连续"的ε—δ定义.

1.54 设$f(x)=\begin{cases}2x-1, & -1\leqslant x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant2,\\ 2x+1, & 2<x\leqslant3.\end{cases}$ 试研究$f(x)$在$x=1$及$x=2$处的连续性.

1.55 讨论$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x<1,\\ 2x, & x\geqslant1.\end{cases}$ 的连续性.

1.56 $f(x)=\begin{cases}3x+b, & 0\leqslant x<1,\\ a, & x=1,\\ x-b, & 1<x\leqslant2.\end{cases}$ 试确定a、b的值,使$f(x)$在$x=1$连续.

1.57 求$f(x)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$的间断点,并判断其类型.

1.58 求$f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$的间断点,并判别其类型.

1.59 求$f(x)=\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{x(x-1)}$的间断点,并判别其类型.

1.60 若$f(x)$对于一切实数x_1、x_2适合等式$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,且$f(x)$在$x=1$处连续,证:$f(x)$在任意点$x_0(x_0>0)$处连续.

1.61 设$f(x)$在$x=x_0$处连续,$g(x)$在x_0处不连续,试研究$F(x)=f(x)+g(x)$在x_0处的连续性.

1.62 证明:若函数$u=\varphi(x)$在x_0点连续,且$\varphi(x_0)=u_0$,而函数$y=f(u)$在$u=u_0$点处连续,则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在$x=x_0$点处连续.

1.63 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[x^3+\dfrac{x^3}{1+x^2}+\dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}+\cdots+\dfrac{x^3}{(1+x^2)^n}]$试讨论$f(x)$的连续性.

1.64 设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)<g(a)$,$f(b)>g(b)$,则至少存在一点$\xi\in(a、b)$,使$f(\xi)=g(\xi)$.

1.65　设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，　证明：方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 内至少有一个根.

1.66　证明：方程 $x2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

1.67　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<b$，试证一定存在点 $c\in(a,b)$，使 $t_1f(x_1)+t_2f(x_2)=(t_1+t_2)f(c)$ 成立（其中 $t_1>0,t_2>0$）.

1.68　设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，在整个数轴上连续，证明方程 $f(x)-f(x-1)=0$ 在任何区间长度为 1 的闭区间上至少有一个实根.

1.69　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为非负连续函数，且 $f(0)=f(1)=0$，试证对任一个小于 1 的正数 $a(0<a<1)$ 必有 $\xi\in[0,1]$，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

1.70　证明任何一元奇次方程 $a_0x^n+a_0x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$（$n$ 为奇数），至少有一个实根.

[练习题解答]

1.1　$(-1,1)$.

1.2　$f(1+a)-f(1-a)=[2(1+a)-(1+a)^2]-[(1-a)^2-(1-a)-1]$

$$=-2a^2+a+2.$$

1.3　π.　　1.4　$-\dfrac{1}{4}$.　　1.5　e^8.　　1.6　$\dfrac{27}{4}$.　　1.7　-1.

1.8　$a=1,b=-1$.　　1.9　4.　　1.10　e^3.

1.11　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{2c}{x-c})^{\frac{x-c}{2c}}]^{\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}=4$，故 $c=\ln 2$.

1.12　1.　　1.13　等价.　　1.14　1.　　1.15　连续.　　1.16　B.

1.17　C.　　1.18　A.　　1.19　B.　　1.20　B.

1.21　A.　　1.22　B.　　1.23　D.

1.24　$f(\dfrac{1-x}{1+x})=\dfrac{2\cdot\dfrac{1-x}{1+x}}{1+(\dfrac{1-x}{1+x})^2}=\dfrac{1-x^2}{x^2+1}$.

1.25　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4n+5-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+4n+5}+(n-1)}=3$.

1.26　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x[1-(\dfrac{1}{1+x^2})^n]}{1+(-\dfrac{1}{1+x^2})}=x+\dfrac{1}{x}$，$(x\neq 0)$，

所以 $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1.27　因为 $0\leqslant\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\leqslant(n+1)\dfrac{1}{n^2}$　由两边夹定理知

$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2})=0$.

1.28　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[nx+\dfrac{2}{n}(1+2+\cdots+n)]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[nx+\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}]=x+1$.