湍流

下册

〔荷兰〕J. O. 欣茨 著

科学出版社

湍　　流

（下　册）

〔荷兰〕J. O. 欣茨 著

周光坰　魏中磊 译

周光坰　黄永念 校

科　学　出　版　社

1987

内 容 簡 介

本书是一本优秀著作，阐述湍流的输运过程、自由剪切湍流和“壁”剪切湍流. 可供理工科大学力学、化工、机械、航空航天、水利、气象、海洋等专业师生，有关工程技术人员和科研人员参考. 第5、6章由魏中磊译，第7章由周光坰译.

J. O. Hinze
TURBULENCE
2nd edition
McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1975

湍 流
（下 册）
〔荷兰〕J. O. 欣茨 著
周光坰 魏中磊 译
周光坰 黄永念 校
责任编辑 晏名文
科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1987年8月第一版 开本：850×1168 1/32
1987年8月第一次印刷 印张：15 1/8
印数：0001—2,450 字数：401,000
统一书号：13031·3594
本社书号：5411·13—2
定价：4.30 元

目　录

第5章　湍流的输运过程

5-1　引　　言

在第1章内我们已阐述过，由流体随机运动所引起的可传递量的输运在性质上是扩散的．流体湍流运动是这样一种流体随机运动，它的一个基本特征就是具有扩散作用；因而，湍流的交换过程较非湍流的要大一些．湍流的任何特征最终来自湍流引起的输运过程；因此，归结起来，研究这种特征就是研究有关的输运问题．

在本章内，广泛而详细地讨论各种湍流输运问题是不无裨益的．一般问题可表述如下[68]：完全用湍流速度场和边界条件（或初始条件）的统计函数来表示可传递量的湍流输运率．

这样，只有全面知道描述湍流运动的统计函数，才能期望完全解决输运问题．而缺乏这类完整的知识，输运问题的任何解决一定是不完善的，充其量不过是一个近似．对湍流了解得愈多，获得正确而满意解决的可能性就愈大．

显然，在湍流研究的早期阶段，由于对湍流机理的认识相当差，只能用比较粗糙的方法来研究输运过程．

这些输运过程形成了湍流早期研究的中心课题．在这些研究所形成的理论中，以建立在“混合长”概念（它由 Taylor 与 Prandtl 独立地提出）上的理论最有成效．之所以如此，与其说是因为它能正确解释湍流输运过程的机理，不如说是因为由它导出了实际有用的半经验公式．

这些理论纯粹是唯象学的．虽然最近的研究表明，建立在混合长概念上的物理图象，在一切细节上并不尽正确，但实践证明，混合长理论对工程师仍然是最有用的．正是这个原因，本章才花费这么多篇幅来阐明这些唯象学理论．

最新的研究大大开阔和加深了我们对湍流输运过程实际机理

的认识. 一方面，这些研究指出了混合长理论的许多严重缺点；另一方面，也证实了混合长概念的某些特性，这些特性是 Prandtl 根据纯直观理由提出的.

在湍流中，流体的各部分以随机的方式运动. 这些运动的性质依赖于所考虑那部分流体的尺度. 在以前各章里，这种依赖关系通过引进不同的谱函数和各种尺度(例如耗散尺度和积分尺度)来表示. 研究输运过程时，区别不同尺度的各部分流体之间的运动，往往是很有用的. 这样，可将流体区分为流体质点与流体微团. 想像的流体质点是非常小的流体容积，譬如相对于耗散尺度 λ 而言是小的. 至少在时间间隔比所考虑的输运过程的时间间隔长得多的情况下，这种流体质点保持为连续体[68]. 它与邻近的周围环境的任何交换是纯分子性质的. 在这样的质点中，压力与速度分布实际上是均匀的.

为了满足这些条件，我们必须考虑这样的质点，它们的尺寸由湍流的最精细结构来确定，即可仅用 ν 与 ε 来描述. 所以，这样的流体质点必定具有尺度 $\eta=(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$，就其变形率而言，速度尺度为 $(\nu\varepsilon)^{1/4}$，时间尺度为 $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$. 因此，这时间尺度应比用于可传递性质输运的有效时间大得多.

想像的流体微团，我们理解为大得多的流体连续体单元，它由紧密凝聚的流体质点组成. 这种流体微团的大小可与湍流较大的涡同一量级，即与耗散尺度或积分尺度同一量级. 它与周围的交换，除了受分子运动的影响以外，还要受较小尺度湍流的影响.

当我们考虑湍流弥散和分子弥散的联合效应时，必须区别容积质点和特性质点(或物质质点)，特别是在短扩散时间的情况中更应该考虑这一点. 如果没有分子的影响，或者可以忽略这一影响，容积质点与特性质点在弥散过程中是一样的. 质点的运动——例如，由其形心所代表的运动——由湍流运动的宏观速度确定. 但是，现在研究的情况是，所考虑的特性具有梯度，同时描述此特性的带标记分子的分子扩散不能忽略. 于是，正如 Saffman[9] 所指出的，由于分子迁移减小了特性梯度，这些带标记的分子的形心运动

(即特性质点的运动)就会偏离原来容积质点的运动. 后面5-5节还要阐明,由于分子扩散引起的特性弥散,同由于宏观湍流速度引起的特性弥散统计上是有关的.

通常,总是把描述湍流输运过程的两种方法——欧拉描述法和拉格朗日描述法——加以区别. 在欧拉描述法中,某一特性变化是相对于固定坐标系考虑的;在拉格朗日描述法中,与给定流体质点或流体微团有关的特性变化,是在这质点或微团经过流场时的运动过程中考虑的.

在1-9节中已提到过,由分子随机运动或布朗运动引起的弥散,和由湍流随机运动引起的弥散之间存在一些相似性. 早期的尝试是用类似于气体分子运动论中所发展的那些方法来描述湍流的输运过程. 这些方法可分为两类. 方法A是考虑由于分子运动引起的通过控制面的输运率,并用扩散系数将输运率表示为平均特性的局部梯度. 方法B是考虑从空间一点或一平面的特性扩散. 这里,也可用扩散系数来描述扩散. 后一方法常用在瞬时过程或非平稳过程. 因此这两种方法都用拉格朗日法描述.

就下面的意义上说,这两种方法基本上是相同的,它们都导出有关欧拉描述中的特性平衡的相同微分方程. 虽然,如前所述,这两种方法对扩散过程的描述都是拉格朗日型的.

5-2 混合长与唯象理论

这些理论主要用于描述由湍流作用引起的物理量(动量、热量、质量等)的平均值分布.

早期的理论,譬如混合长理论,认为湍流的扩散作用可归结为涡粘性系数或涡热传导率的作用.这意味着假定扩散是梯度型的,因而可传递特性 $\mathscr{P}$ 的通量 $\mathfrak{F}_{\mathscr{P}}$,可用平均特性的局部梯度来表示.

我们从运动方程和 Boussinesq 给出的输运方程出发[见方程(1-18)与(1-21)和方程(1-33)与(1-34)]. Boussinesq 本人假定了涡扩散系数 ε_m 和 ε_T 的标量值. Prandtl[1] 试图把这些量与湍

流特征联系起来．根据气体分子运动论，运动粘性系数等于分子速度均方根值与平均自由程的乘积． 仿此，Prandtl 假定涡粘性系数等于“混合长”与某一适当速度的乘积（混合长理论）． 现将 Prandtl 的思路(它与气体分子运动论中应用于分子输运过程的思路相似)简述如下．

为简单起见，考虑二维流动中，x_1 方向的平均速度为 $\overline{U}_1$，每单位质量的可传递特性 $\mathscr{P}$ 穿过平行于 $\overline{U}_1$ 的平面的平均输运，是由湍流运动速度 u_2 引起的．Prandtl 假定，受湍流运动支配的每一流体微团可以考虑为一个独立的实体，并假定此流体微团的特性 $\mathscr{P}$ 在某一时间内——即在某一距离上——是守恒的．完全类似于气体分子运动论中的分子扩散，我们可将涡扩散系数 $\varepsilon_{\mathscr{P}}$ 写为

$$\varepsilon_{\mathscr{P}} = 常数 \times u_2' \Lambda$$

这里 Λ 是积分长度尺度． 为了估计 u_2' 和 Λ，Prandtl 作了如下假定：

1．距离 $L_{\mathscr{P}}$ 相当小．这 $L_{\mathscr{P}}$ 系指经过此距离后，在垂直于控制面的运动过程中，流体微团所输运的某一可传递特性已具有新环境的值．所以，与梯度型扩散的假定相一致，平均特性的梯度在距离 $L_{\mathscr{P}}$ 内为常数．

2．湍流速度的轴向分量与横向分量，大致为同样大小．

令 $\mathfrak{p}$ 为特性 $\mathscr{P}$ 相对于控制面处平均 $\overline{\mathscr{P}}$ 的脉动量，并假定控制面在 $x_2 = 0$ 处．则通量，或单位面积与单位时间内穿过控制面的平均输运为

$$(\mathfrak{F}_{\mathscr{P}})_2 = \rho \overline{u_2 \mathfrak{p}} \tag{5-1}$$

这里，平均是指对穿过控制面的许多流体微团所取的系综平均．根据假定（1），我们可假定

$$\mathfrak{p} = L_{\mathscr{P}} \frac{d\overline{\mathscr{P}}}{dx_2} \tag{5-2}$$

这样，假定了脉动 $\mathfrak{p}$ 完全是由于流体微团的系综在 $L_{\mathscr{P}}$ 内的变化引起的，而不是由流体微团在开始点处的 $\mathscr{P}$ 的瞬时值引起的． 我们可将这流体微团的系综分成许多子系综，使每一子系综的流体微

团起源于同一距离$L_{\mathscr{P}}$处. 于是,对这子系综, $\mathscr{P}$相对于 $x_2=0$ 处的$\mathscr{P}$的差值的平均值,由上面的p的表达式即方程 (5-2) 给出. 这样,对所有子系综全体,我们得到

$$(\mathfrak{F}_{\mathscr{P}})_2=\rho\overline{u_2L_{\mathscr{P}}}\frac{d\overline{\mathscr{P}}}{dx_2} \tag{5-3}$$

根据假定 (2), 我们令

$$u_2=\text{常数}\cdot u_1=-\text{常数}\ L_{\mathscr{P}}\left|\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right|$$

(—) 号来源于下述事实: u_2的符号完全由$L_{\mathscr{P}}$的符号确定,并假定当流体微团起源于负x_2方向时, $L_{\mathscr{P}}$的符号为负. 于是,

$$(\mathfrak{F}_{\mathscr{P}})_2=-\text{常数}\cdot\rho\,\overline{L^2_{\mathscr{P}}}\left|\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right|\frac{d\overline{\mathscr{P}}}{dx_2}$$

比例常数可以方便地包括在一新的长度参数之内,此参数为

$$l^2_{\mathscr{P}}=\text{常数}\overline{L^2_{\mathscr{P}}}$$

根据定义

$$(\mathfrak{F}_{\mathscr{P}})_2=-\rho\varepsilon_{\mathscr{P}}\frac{d\overline{\mathscr{P}}}{dx_2} \tag{5-4}$$

我们有

$$\varepsilon_{\mathscr{P}}=-\overline{u_2L_{\mathscr{P}}}=l^2_{\mathscr{P}}\left|\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right| \tag{5-5}$$

应该指出, $\overline{u_2L_{\mathscr{P}}}$本质上为负值. 还注意 Prandtl 混合长概念中所遵循的方法,就是前节中提到的方法 A.

虽然, 最初 Prandtl 混合长理论是对一维湍流输运发展起来的,但不难推广到三维情况. 仍按方法 A, 考虑沿 x_i 方向通过垂直于该方向的控制面上的输运. 特性$\mathscr{P}$的输运值等于

$$\overline{U_i\mathscr{P}}=\overline{U}_i\overline{\mathscr{P}}+\overline{u_i\mathrm{p}}$$

这里,我们仅对由湍流运动引起的输运$\overline{u_i\mathrm{p}}$感兴趣. 现在, 以速度u_i穿过此控制面的一个流体微团可来自这样一个区域, 其中心到该流体微团中心穿过控制面的那一点的距离为 $(L_{\mathscr{P}})_i$. 假定扩散为梯度型,则有

$$\mathfrak{p}=(L_{\mathscr{P}})_j\frac{\partial\overline{\mathscr{P}}}{\partial x_j}$$

于是

$$(\mathfrak{F}_{\mathscr{P}})_i=\rho\overline{u_i(L_{\mathscr{P}})_j}\frac{\partial\overline{\mathscr{P}}}{\partial x_j}$$

如果又引入一涡扩散系数

$$(\varepsilon_{\mathscr{P}})^*_{ij}=-\overline{u_i(L_{\mathscr{P}})_j}$$

我们得出结论：这系数一般为二阶张量。

现在互换 i 与 j，$\overline{u_i(L_{\mathscr{P}})_j}$ 不是不变量，因此，$(\varepsilon_{\mathscr{P}})^*_{ij}$ 对 i 与 j 是不对称的。用一星号"＊"来与涡扩散张量 $(\varepsilon_{\mathscr{P}})_{ij}$ 相区别，而此 $(\varepsilon_{\mathscr{P}})_{ij}$ 是出现在 Fick 扩散方程中的系数，它对 i 与 j 是对称的。现在有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathfrak{F}_{\mathscr{P}})_i=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{(\varepsilon_{\mathscr{P}})^*_{ij}\frac{\partial\overline{\mathscr{P}}}{\partial x_j}\right\}$$

记住 $(\varepsilon_{\mathscr{P}})^*_{ij}$ 中的下标 i 对应于 u_i，下标 j 对应于 $(L_{\mathscr{P}})_j$，我们又可写出

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathfrak{F}_{\mathscr{P}})_j=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(\varepsilon_{\mathscr{P}})^*_{ji}\frac{\partial\overline{\mathscr{P}}}{\partial x_i}\right\}$$

如果我们只考虑单位体积内湍流输运对 $\mathscr{P}$ 随时间变化的贡献，我们得到

$$\frac{\partial\overline{\mathscr{P}}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathfrak{F}_{\mathscr{P}})_i=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{(\varepsilon_{\mathscr{P}})^*_{ij}\frac{\partial\overline{\mathscr{P}}}{\partial x_j}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(\varepsilon_{\mathscr{P}})^*_{ji}\frac{\partial\overline{\mathscr{P}}}{\partial x_i}\right\}\right]$$

对均匀湍流，我们有如下 Fick 扩散方程：

$$\frac{\partial\overline{\mathscr{P}}}{\partial t}=-(\varepsilon_{\mathscr{P}})_{ij}\frac{\partial^2\overline{\mathscr{P}}}{\partial x_i\partial x_j}\tag{5-6}$$

其中

$$(\varepsilon_{\mathscr{P}})_{ij}=\frac{1}{2}[(\varepsilon_{\mathscr{P}})^*_{ij}+(\varepsilon_{\mathscr{P}})^*_{ji}]\tag{5-7}$$

它对 i 与 j 是对称的。

现在让我们回到 Prandtl 一维混合长理论，并考虑轴向动量在横向 x_2 方向上的输运（Prandtl 动量输运理论）. 于是根据方程 (5-5)，涡粘性系数表达式可写为

$$\varepsilon_m = l_m^2\left|\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right| \tag{5-8}$$

因而有

$$\sigma_{21} = \rho l_m^2\left|\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right|\frac{d\overline{U}}{dx_2} \tag{5-9}$$

这关系式也可用不同方法，即用

$$\sigma_{21} = -\rho\,\overline{u_1u_2}$$

求得. 在同一点引入速度分量 u_1 与 u_2 的二阶相关系数 $\boldsymbol{R}_{21}$：

$$\boldsymbol{R}_{21}(0) = \frac{\overline{u_1u_2}}{u_1'u_2'}$$

则表达式 σ_{21} 为

$$\sigma_{21} = -\rho\boldsymbol{R}_{21}(0)u_1'u_2'$$

如果我们又假定 u_1' 与 u_2' 都正比于 $|d\overline{U}_1/dx_2|$，并记住 σ_{21} 与 $\boldsymbol{R}_{21}(0)$ 的符号相反，我们得到关系式 (5-9)；比例常数包括在长度参数 l_m 之中.

这后一考虑表明 Prandtl 理论包含着这样的假定：在流动区域的一横截面上，u_1 与 u_2 之间的相关系数为常值，u_1' 与 u_2' 之间比值也为常值，如果假定在这区域中 l_m 为常数的话. 在自由湍流中，Prandtl 假定 l_m 正比于湍流混合区的宽度，所以它仅是轴向坐标的函数，而不是横向坐标的函数（见第 6 章）.

如果 $\mathscr{D}$ 是标量函数 Γ，类似于方程 (5-9)，我们可得到

$$(\mathfrak{F}_\gamma)_2 = \overline{\rho u_2(L_\gamma)_2}\,\frac{d\overline{\Gamma}}{dx_2} = -\rho l_\gamma^2\left|\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right|\frac{d\overline{\Gamma}}{dx_2} \tag{5-10}$$

涡扩散率表达式为

$$(\varepsilon_\gamma)_2 = l_\gamma^2\left|\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right| \tag{5-11}$$

当然，事先不需要假设 l_γ 等于 l_m，虽然人们经常这样假定.

将 Prandtl 动量输运理论应用于自由射流与圆柱或球的尾流

的平均速度分布上，给出了与测得的速度分布相当一致的结果(见第6章). 在这些应用中，l_m 是这样选择的，使计算的分布与测量的分布在平均速度为截面最大速度之半处彼此相等.

已经发现，计算的分布与测量的分布之间有偏差，特别是在 $d\overline{U}_1/dx_2=0$ 的那些点上. 根据 Prandtl 理论，在这些点上 $\varepsilon_m=0$，而实际上是有限值. Prandtl[2] 本人已注意到他的理论中的这个缺点，并建议采用下面更一般的涡粘性系数表达式：

$$\varepsilon_m = l_m^2\left[\left(\frac{d\overline{U}_1}{dx_2}\right)^2 + l_m'^2\left(\frac{d^2\overline{U}_1}{dx_2^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

这一假定使计算复杂多了. 但显然，只要有二个参数 l_m 与 l_m' 可用来调节，从而使理论分布适合于测量分布，则它应该导致与实验更为一致的结果.

包括二阶导数 $d^2\overline{U}_1/dx^2$ 与附加长度 l_m' 这一事实，也可解释为(以级数展开形式) $d\overline{U}_1/dx_2$ 在混合长的距离上允许有变化. 或者我们必须考虑较大尺度运动对动量输运所作的贡献，因为在 $d\overline{U}_1/dx_2$ 很小或为零的区域内，这种贡献很明显.

动量输运理论另一个更根本的缺点是，这一理论不考虑压力脉动对动量输运的影响. 正如从运动方程组作出的推论那样，虽然流体微团本身未被输运，单是压力差就能传递动量. 换句话说，由于在距离 L 的路径上，每个流体微团都受到压力脉动的影响，微团的动量不再保持常数，所以，这个动量是不守恒的，因而，就不满足 Prandtl 意义下可传递量的要求.

根据 Thompson 旋涡运动定律之一，在二维运动中，涡量必须保持常数. 于是，在二维流场内，涡量 ω 在 Prandtl 意义下是一个可传递量. 早在多年以前，Taylor[3] 就发展了一个类似于 Prandtl 的理论，但他假定可把此涡量看成是一个可传递量 (Taylor **涡量输运理论**).

如果我们还是考虑二维流动，沿 x_1 方向有均匀速度 $\overline{U}_1$，则

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\overline{u_2^2} = 0$$

我们有

$$\frac{d\sigma_{21}}{dx_2} = -\rho \frac{d}{dx_2}\overline{u_1u_2} = \rho\overline{u_2\omega_3}$$

其中

$$\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

由于假定 ω_3 为一可传递量，有

$$\overline{u_2\omega_3} = +\overline{u_2L_\omega}\frac{d\bar{\Omega}}{dx_2}$$

因为

$$\bar{\Omega} = -\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}$$

我们得到

$$\frac{d\sigma_{21}}{dx_2} = -\rho\,\overline{u_2L_\omega}\,\frac{d^2\bar{U}_1}{dx_2^2} = \rho l_\omega^2\left|\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\right|\frac{d^2\bar{U}_1}{dx_2^2} \qquad (5\text{-}12)$$

根据动量输运理论我们得到

$$\frac{d\sigma_{21}}{dx_2} = \rho\frac{d}{dx_2}\left[l_m^2\left|\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\right|\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\right] \qquad (5\text{-}13)$$

当 l_m 不依赖于 x_2 时，表达式 (5-12) 与 (5-13) 是一样的.

根据 Prandtl 理论，在平均速度沿 x_1 方向的湍流中，可以假定 l_m 不依赖于 x_2，因此，在这种情况中两种理论给出相同的解. 两公式之间所差的因子 2 可以包含在 l 值之内，即 l_ω 等于 $l_m\sqrt{2}$.

涡粘性系数的表达式写为

$$\varepsilon_m = \varepsilon_\omega = \frac{l_\omega^2}{2}\left|\frac{d\bar{U}_1}{dx_2}\right| \qquad (5\text{-}14)$$

如果我们分别比较 ε_m，ε_γ 和 ε_ω 的表达式 (5-8)，(5-11) 和 (5-14)，我们发现

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_\gamma} = \frac{l_m^2}{l_\gamma^2}, \qquad \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_\omega} = \frac{2l_m^2}{l_\omega^2} = 1, \qquad \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\omega} = \frac{2l_\gamma^2}{l_\omega^2}$$

若取 $l_\gamma = l_\omega$，根据涡量输运理论，$\bar{\Gamma}$ 比 $\bar{U}_1$ 扩展得更快. 若取 $l_\gamma = l_m$，根据动量输运理论，情况就不是这样.

如果湍流是三维的，在上述意义下涡量不再是可传递的．由于实际湍流是三维的，即使在平均运动的平面流动中也是这样，流体微团的涡量会连续变化，因为在由湍流空间运动引起的流体元的变形过程中，涡线变得更长了．

Taylor[4] 考虑到这种影响，把他的二维涡量输运理论推广到三维理论(广义涡量输运理论)，但其表达式实际上变得很难进一步应用．因此，为了能得到简化，Taylor 不得不牺牲精确性；他必须假定在三维流动中涡量也保持守恒．这一简化理论现在称为修正的涡量输运理论．

我们假定有一定常流动，并忽略其粘性影响． 因此运动方程(1-18)可写为

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j}$$

我们将等式右边最后一项改写如下：

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j} = \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} + \overline{u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}$$

$$= -\overline{u_j \omega_k} \varepsilon_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\overline{u_j u_j}}{2}$$

其中

$$\omega_k \varepsilon_{ijk} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

(见 1-2 节)．于是

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\overline{u_j u_j}}{2} + \overline{u_j \omega_k}\varepsilon_{ijk} \tag{5-15}$$

根据混合长理论我们有

$$\overline{u_j \omega_k} = \overline{u_j (l_\omega)_l}\frac{\partial \bar{\Omega}_k}{\partial x_l}$$

Taylor 进一步假定湍流的各向异性足够小，以致对 $\overline{u_j (l_\omega)_l}$ 可用各向同性条件．这样，当 $j \neq l$ 时(在反射下的不变性)其值为零，而当 $j = l$ 时其值等于标量 $-\varepsilon_\omega$．于是

$$\overline{u_j\omega_k}\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_\omega\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\bar{\Omega}_k}{\partial x_j} = \varepsilon_\omega\frac{\partial^2\bar{U}_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

因此，方程 (5-15) 可写为

$$\bar{U}_j\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\overline{u_ju_j}}{2} + \varepsilon_\omega\frac{\partial^2\bar{U}_i}{\partial x_j\partial x_j} \quad (5\text{-}16)$$

根据动量输运理论，我们得到

$$\bar{U}_j\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\varepsilon_m)_{ik}\left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\bar{U}_k}{\partial x_j}\right)\right] \quad (5\text{-}17)$$

由此可见，这两个微分方程仅在某些条件下才变成一样．湍流必须是均匀的，才能忽略方程 (5-16) 右端的第二项．我们必须引进湍流各传递量接近于各向同性的假定（它与 Taylor 对方程 (5-15) 所做的假定类似），$(\varepsilon_m)_{ik}$ 才可简化为一标量，而且它应与 x_j 无关．

根据 Prandtl 的混合长假定，涡粘性系数 ε_m 可写为混合长的平方与平均速度横向导数的乘积．如前所述，Prandtl 作了如下假定：(1) 在自由湍流混合区的一横截面内，这个混合长是常数；(2) 混合长正比于混合区的宽度．这些假定隐含着如下意思：在混合区的一横截面内，平均说来，与混合长有关的湍流尺度必须为常数值，它由混合区的总宽度决定．

关于混合长的值，Von Kármán[5] 作过另一假定，即此混合长由局部流动条件确定，并可以用这些局部条件所确定的量来描述．例如，流场内某点平均速度的导数就是这种量．此外，Von Kármán 还假定，在整个流场内流型处处是几何相似的．根据完全相似性的定义(见 3-1 节)，仅仅一个长度尺度和一个速度尺度就足以确定湍流结构．由于已假定平均速度的导数是由局部条件确定的量，最简单的方法是用两个相邻导数(例如，平均速度的一阶与二阶横向导数)之间的比值来得到特征长度尺度．

如果我们考虑一个平面流动，它的平均速度沿 x_1 方向，则几何相似条件要求

$$l\frac{(\partial^2\bar{U}_1/\partial x_2^2)}{(\partial\bar{U}_1/\partial x_2)} = 常数 = K$$