D. J. 克莱门茨
B. D. O. 安德森 著

奇异最优控制

线性二次问题

科学出版社

奇异最优控制

线性二次问题

D. J. 克莱门茨
B. D. O. 安德森 著

王肇明 译

郑应平 校

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书讨论的是奇异线性二次最优控制问题，论证严谨，内容丰富．该书首先介绍奇异最优控制问题的由来及其历史发展概况；其次使用鲁棒性概念研究了奇异线性二次最优控制的算法；接着引进了常值方向，并讨论了离散时间的奇异最优控制问题；最后提出了尚待解决的问题．本书可供从事自动控制的科研人员及高等院校有关专业的师生参考．

D. J. Clements B. D. O. Anderson

SINGULAR OPTIMAL CONTROL

The Linear-Quadratic Problem

Springer-Verlag 1978

奇异最优控制

线性二次问题

D. J. 克莱门茨
B. D. O. 安德森 著

王肇明 译

郑应平 校

2P76/10

责任编辑 刘兴民 袁放尧

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年10月第一版 开本：787×1092 1/32

1985年10月第一次印刷 印张：4 1/4

印数：0001—5,200 字数：92,000

统一书号：15031·681

本社书号：4594·15—8

定价：1.05 元

著者为中译本写的序

1984 年，我曾荣幸地访问了中国的一些院校和研究所，其中包括中国科学院的系统科学研究所、山东大学和复旦大学．在这些院校和研究所中，我报告了本书所涉及的内容．在奇异控制领域中工作的中国科学家和工程师们，在这方面表现出浓厚的兴趣和丰富的知识，因此，肯定对许多人来说这本书并没有多少新的东西．然而，我相信它对某些读者仍会是有益的．我为它能作为我们两国友好交流的一个具体范例而感到十分高兴．

B. D. O. 安德森

1984 年 12 月于澳大利亚，堪培拉

序　　言

《奇异最优控制——线性二次问题》一书是供从事奇异最优控制方法研究的高年级研究生、研究人员和其他使用这一方法的人员阅读的一本专著．它假定读者已经熟悉标准的线性二次调节器问题，并对线性系统理论有相当的了解．

最近，在线性二次奇异控制方面取得了许多进展．这本书介绍的就是有关这方面的最新成就．同时，本书力图用统一的观点把初看起来互不相关的有关奇异最优控制的各种研究方法联系起来．

目　　录

第一章　奇异线性二次最优控制的概述

1.1　问题的提出

本书讨论的是奇异线性二次最优控制问题．在本章的第一节里，我们要阐明这些问题的由来，而在其余各节中将阐述它的历史发展概况，以及说明本书将怎样综述当前有关这方面的主要内容．

我们首先复习一下线性二次问题的概念（不管它是否是奇异的），接着再考察奇异控制问题的概念（不管它是否是线性二次的），然后再把这两个概念联系到一起．

线性二次最优控制问题，不论它是奇异的，还是非奇异的，通常在以下两种不同的情况下发生．第一种情况，给定线性系统

$$\dot{x} = F(t)X + G(t)u$$

和 (1.1)

$$x(t_0) = x_0$$

这里 x_0 是确定的．同时还给定一个 u 和 x 的二次性能指标；对于线性调节问题，这个性能指标可以是

$$V[x_0,u(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f}[x'Q(t)x + u'R(t)u]dt + x'(t_f)Sx(t_f) \qquad (1.2)$$

通常这里的 Q, R 和 S 是对称的，Q 和 S 是非负定的，而 R 是正定的．当然，问题是要寻找一个控制 $u(\cdot)$，使 $V[x_0, u(\cdot)]$ 取极小值． Kalman 的开创性工作（参阅文献 [1,2]）已经引

起了对这类问题的广泛研究（参阅文献[3，4]）．任何性能指标通常都反映了对于控制的品质或质量的某种物理上的要求，而由满足上述限制的 Q，R 和 S 所组成的（1.2）式经常是有明确的物理意义的．然而，对于 Q，R 和 S 的限制也可以放松一些，在（1.2）式的被积函数中还可以出现交叉项 $2x'H(t)u$．这样一来，就得到了线性二次控制问题的最一般的形式．

第二种情况，当我们用摄动方法(二次变分原理)来分析一般的最优控制问题时，也会得到线性二次问题，这时原来的系统可能不是线性的，而原来的性能指标也可能不是二次的．对于一个一般的最优控制问题，给定了某个初始状态和相应的最优控制，要问初始状态有了一个微小的改变之后，为了保持最优性，应该怎样调整原来的最优控制呢；这个控制的调整量的近似，乃是某个线性二次问题的解．在文献[5]中给出了从一般问题到线性二次问题的摄动步骤，包括具体的计算细节在内．

奇异最优控制问题是在以下情况下产生的．对于任何最优控制问题，无论是奇异的或非奇异的，使 Hamilton 函数 $\mathscr{H}$ 取极值的弧被定义为极值弧．如果此要求不能使控制向量表示成状态向量和协状态向量的函数，那么，问题就是奇异的．在 $\mathscr{H}_u$ 为零且 $\mathscr{H}_{uu}$ 是奇异时，就会出现这种情况．

Johnson 和 Gibson 在文献[6]中对某些问题证明了最优奇异解的存在性；在文献[5,7—9]中提供了另外一些例子，而文献[10]这本书对此作了极好的综述．在大多数奇异问题中，Hamilton 函数对 $u(\cdot)$ 是线性的；当系统方程和损耗函数都只包含 $u(\cdot)$ 的线性项时，就是这样的．

直接把奇异和线性二次这两个概念结合到一起就得到了奇异线性二次问题这个概念．一个线性二次问题的奇异性等

价于性能指标的被积函数 $x'Qx+2u'Hx+u'Ru$ 中矩阵 R 的奇异性．奇异的线性二次问题可以是直接提出的，也可以作为对一般的最优控制问题应用二次变分原理的结果而产生的．

在考虑任何最优控制问题时，都会产生许多问题．例如：问题是否可解？或能否选择适当的控制，而使性能指标达到任何指定的负值？如果问题有解，那么，又怎样才能算得出性能指标的最优值和最优控制呢？

读者知道，对于非奇异的线性二次问题已有相当好的解法(参阅文献［5，11—14］)．这些解法大多涉及到一个含有 R^{-1} 的矩阵 Riccati 微分方程．正如文献［10］中所指出的，奇异问题的解法大体上是在最近一段时期内才得到的，有些还不很成熟．在下一节中我们来讨论那些已经肯定了的有关奇异线性二次问题的结果．

1.2 奇异线性二次控制的历史概况

至今，至少有四种互不相干的研究奇异线性二次问题的方法．在这一节中将分别加以说明．

第一种方法是在 Goh[15,16]，Kelley[9,17,18] 和 Robbins[19] 的工作中给出的；这一方面的工作尚未终结，仍有新的成果在继续发表[20]．他们的工作主要(但不是唯一的)致力于问题的计算方面，而文章中反复讨论的主题是要用一个非奇异线性二次控制问题去代替奇异线性二次控制问题，且能使得这个非奇异问题的解在一定程度上决定了原来的奇异问题的解．

第二种方法是由 Jacobson 的工作[21,22]所提供的．而后 Anderson[23] 进行了推广，并由 Molinari[24] 而臻完善．这里强调的是寻找奇异线性二次问题可解性的必要和（有时是不一

样的)充分条件. 当然,有些条件(例如 $R \geqslant 0$)是很早就知道了的;在文献[21—24]中所给出的条件的特点在于它们包括了以前所给出的所有的条件，而且当必要条件和充分条件不相一致时,其差异也是十分微小的. 事实上，最近的工作[25,26]已在逐渐地消除这种差别.

第三种方法是正则化方法，也就是利用摄动方法把一个奇异问题化成为相应的非奇异问题，这种摄动应使非奇异问题的解在某种意义上能逼近原来的奇异问题的解. 这个思想主要是由 Jacobson 提出的(参阅文献[27，28])，在文献[28]中还尽力导出问题可解性的充分必要条件. 所采用的正则化方法是一个很简单的方法，这就是在性能指标的被积函数中加上一项 $\varepsilon u'u$，其中 ε 是一个正的小量. 其效果是对最优性能指标作了一个微小摄动;然而,在最优控制中这种摄动的影响可能是很难控制住的(参阅文献[29]).

本书将很少涉及正则化方法，这并不是因为这个方法所固有的缺陷,而是因为一旦得到了一个非奇异问题,就不再有什么特殊的困难了. 而且，通过对 $\varepsilon \to 0$ 时的一系列正则化问题的研究所得到的那些有关奇异问题的理论性条件大体上可以通过其他方法更为简便地得到.(当然,对特定的问题而言，用这样的一个序列来推出最优控制的方法在计算上也是很有吸引力的.)

第四种方法与其说是研究奇异线性二次问题的方法，不如说是另一个有关的研究方向. 在无源网络的综合和协方差因式分解中,有些问题是和奇异线性二次控制问题有联系的. 更确切地说，最近才发现与研究控制问题有关的一些矩阵微分和积分不等式已经被用于研究网络和协方差的问题中了[30,31].

作为一般的评论,应该指出,经验表明向量控制问题经常

要比标量控制问题困难得多．本书考虑的正是向量控制的情形．

1.3 本书的目的

本书主要介绍与奇异线性二次问题有关的存在性和计算方法问题．然而，在这一过程中，我们还要说明怎样才能把上一节中所讲过的四种方法结合起来，以便形成一个统一的理论．

这样作了之后，我们将把许多有关的思想推广到离散时间的问题中去．下一节将对此作进一步的说明．

1.4 各章的梗概

请读者注意在这一节中，我们只对本书要研究的问题的背景作一简要的说明；详细的介绍将放在每一章的引言中．

第二章的中心议题是线性二次极小化问题的鲁棒性．我们先不去讲述这一章的具体内容，而来谈谈为什么要如此安排．

在研究二次变分问题时，通常有关的线性二次问题中的初始状态总是零，而且我们想要寻求的是对于所有控制$u(\cdot)$，性能指标均为非负的充分和必要条件．在可控性假定下，可以得到相应的必要条件，没有可控性假定，可以得到相应的充分条件(参考文献[21—24])．这些必要条件和充分条件是很相似的，但又不完全相同；这个充分条件基本上是非奇异问题中的 Riccati 方程在$[t_0, t_f]$上没有逃逸时间的条件在奇异情况下的推广。

接着提出的问题是如何弥合有关非负性要求的必要条件

和充分条件之间的细微差别．问题的解决是十分简单的：只要稍微改变一下问题的提法．我们并不寻找非负性的必要充分条件，而寻找对于所有初始状态、最优性能指标均为有限的必要充分条件．也就是说，要求极小化问题（或者，更一般地说，有下确界的问题），不仅对零初始状态，而且对于所有接近于零的初始状态（由于问题的线性二次性质，因而也就对于所有在幅度上没有限制的初始状态）都是有解的．我们认为一个实际的控制系统的任何合理的模型，如果对零初始条件有解，那么，对它邻域内的任何初始条件也应有解．否则，当系统的初始条件有一个任意小的改变时，控制这系统的最优指标可能从一个有限值变为$-\infty$．显然，这是不符合实际情况的．

在第二章中首先使用了鲁棒性的概念来比较简单地推导出线性二次问题的最优性能指标对于所有的初始状态均为有限的充分条件和必要条件，而且这些条件是相同的．然而，一旦由此引进了鲁棒性的概念，我们就要进一步考察这种概念对其他各种鲁棒性，例如关于初始时间、终端时间、终端加权量以及初始和终端约束的鲁棒性的适用程度．

实际上，关于初始时间的鲁棒性概念在别的地方已经使用过了，例如在文献[14]中被称为“可延拓性”．它证明了一个极小化问题关于初始时间是鲁棒的，当且仅当它对于初始状态是鲁棒的．

第二章的其余部分讨论的是终端有约束的问题．这里再一次研究了存在性问题，并且在鲁棒性的假定下再一次弥合了早先的必要条件和充分条件之间的间隙．这里可能有三种（而不是两种）不那么明显地互相等价的鲁棒性假定：关于终端状态、终端时间以及性能指标中对终端状态的加权矩阵的鲁棒性．

在第二章中，各种条件几乎都是用矩阵积分不等式来表示的，也就是采用了前面提到的研究奇异问题的第二种方法[21-24]所发展起来的形式．这里推导了这些不等式的几个新的性质．有些曾在文献[25,26]中出现过，另一些则是第一次在这里发表．

鉴于第二章讲的是存在性问题，第三章将要讲计算问题，更确切地说，是要讲述检查零初始状态及任意控制下性能指标的非负性的算法，在任意初始状态下计算最优性能指标的值(并在这过程中校核它的存在性)和(或)计算最优控制的算法．这些算法来自前面所述的，研究奇异问题的第一、第二和第四种方法，也就是除了正则化方法以外的所有方法．这表明原来多少不大相干的许多思想有着令人注目的一致性．

遗憾的是，这里存在着一个缺陷．为了实现这些算法，必须作某些平滑性和秩数不变的假定，而这些假定并不总是成立的．

我们把算法的详细说明留到第三章中去讲，这里只是提一下它们的几个基本观点．这些算法是用一个具有较低维控制空间和(或)较低维状态空间的线性二次问题来代替原来的奇异线性二次问题．这个新的问题可以是非奇异的，也可以是奇异的．一系列这样的代换最后将使问题变成或者是零维控制空间的，或者是零维状态空间的，或者是非奇异的．对于这三种情况，问题都是容易解决的，把它的解再反代回去，就可以得到原来奇异问题的解．

在第四章中，定义并讨论了离散时间的奇异问题．从某种观点看来，可以认为对离散时间问题的研究不会带来什么新的东西，因为决定最优指标的 Riccati 差分方程和关于最优控制的公式总是适用的．尽管如此，仍然可以得到许多平行于连续时间的奇异问题的重要结果，包括首先在文献［32—

34] 中引进与研究过的退化方向和常值方向的十分一般的理论。

第五章十分简要地提出了进一步的研究方向。

参　考　文　献

[1] R. E. Kalman, "Contributions to the theory of optimal control", *Bol. Soc. Mat. Mex.* 1960, pp. 102—119.

[2] R. E. Kalman, "The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations", Chapter 16 of Mathematical Optimization Techniques, ed. R. Bellman, University of California Press, 1963.

[3] H. Kwakernaak and R. Sivan, Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience, New York, 1972.

[4] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, Linear Optimal Control, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

[5] A. E. Bryson and Y. C. Ho, Applied Optimal Control, Blaisdell Publishing Co., Mass., 1969.

[6] C. D. Johnson and J. E. Gibson, "Singular solutions in problems of optimal control", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-8, 1963, pp. 4—15.

[7] W. M. Wonham and C. D. Johnson, " Optimal bang-bang control with quadratic performance index", *Trans. ASME, Series D, J. Bas. Eng.,* Vol. 86, 1964, pp. 107—115.

[8] C. D. Johnson and W. M. Wonham, "On a problem of Letov in optimal control", *Trans. ASME, Series D, J. Bas. Eng.,* Vol. 87, 1965, pp. 81—89.

[9] H. J. Kelley, R. E. Kopp and H. G. Moyer, "Singular Extremals", Chapter 3 in Topics in Optimization, ed. by G. Leitmann, Academic Press, New York, 1967.

[10] D. A. Bell and D. H. Jacobson, Singular Optimal Control Problems, Academic Press, New York, 1975.

[11] I. M. Gelfand and S. W. Fomin, Calculus of Variations, Prentice-Hall, New Jersey, 1963.

[12] J. V. Breakwell, J. L. Speyer and A. E. Bryson, "Optimization and control of nonlinear systems using the second variation", *SIAM J. Control,* Vol. 1, 1963, pp. 193—223.

[13] W. A. Coppel, Disconjugacy, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 220, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[14] J. B. Moore and B. D. O. Anderson, "Extensions of quadratic minimization theory, I: Finite time results", *Int. J. Control,* Vol. 7, 1968, pp. 465—472.

[15] B. S. Goh, "The second variation for the singular Bolza problem", *SIAM J. Control,* Vol. 4, 1966, pp. 309—325.

[16] B. S. Goh, "Necessary conditions for singular extremals involving multiple control variables", *SIAM J. Control,* Vol. 4, 1966, pp. 716—731.

[17] H. J. Kelley, "A second variation test for singular extremals", *AIAA J.,* Vol. 2, 1964, pp. 1380—1382.

[18] H. J. Kelley, "A transformation approach to singular subarcs in optimal trajectory and control problems", *SIAM J. Control,* Vol. 2, 1964, pp. 234—240.

[19] H. M. Robbins, "A generalized Legendre-Clebsch condition for the singular cases of optimal control", *IBM J. Res. Develop.,* Vol. 3, 1967, pp. 361—372.

[20] J. B. Moore, "The singular solutions to a singular quadratic minimization problem", *Int. J. Control,* Vol. 20, 1974, pp. 383—393.

[21] D. H. Jacobson, "Totally singular quadratic minimization problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-16, 1971, pp. 651—658.

[22] J. L. Speyer and D. H. Jacobson, "Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems: a transformation approach", *J. Math. Anal. Appl.,* Vol. 33, 1971, pp. 163—187.

[23] B. D. O. Anderson, "Partially singular linear-quadratic control problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-18, 1973, pp. 407—409.

[24] B. P. Molinari, "Nonnegativity of a quadratic functional", *SIAM J. Control,* Vol. 13, 1975, pp. 792—806.

[25] D. J. Clements, B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Matrix inequality solution to linear-quadratic singular control problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-22, 1977, pp. 55—57.

[26] D. J. Clements and B. D. O. Anderson, "Transformational solution of singular linearquadratic control problems", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-22, 1977, pp. 57—60.

[27] D. H. Jacobson, S. B. Gershwin and M. M. Lele, "Computation of optimal singular controls", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-15, No. 1, February 1970, pp. 67—73.

[28] D. H. Jacobson and J. L. Speyer, "Necessary and sufficient conditions for singular control problems: a limit approach", *J. Math. Anal. Appl.,* Vol. 34, 1971, pp. 239—266.

[29] R. E. O'Malley, Jr., and A. Jameson, "Singular perturbations and singular arcs-Part I", *IEEE Trans. Automatic Control,* Vol. AC-20, 1975, pp. 218—226.

[30] B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Synthesis of linear time varying passive networks", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-21, 1974, pp. 678—687.
[31] B. D. O. Anderson and P. J. Moylan, "Spectral factorization of a finite-dimensional nonstationary matrix covariance", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-19, 1974, pp. 680—692.
[32] R. S. Bucy, D. Rappaport and L. M. Silverman, "Correlated noise filtering and invariant directions of the Riccati equation". *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-15, 1970, pp. 535—540.
[33] D. Rappaport, "Constant directions of the Riccati equation", *Automatica*, Vol. 8, 1972, pp. 175—186.
[34] M. Gevers and T. Kailath, "Constant, predictable and degenerate directions of the discrete-time Riccati equation", *Automatica*, Vol. 9, 1973, pp. 699—711.