

高等学校教材

机械动力学

张策



高等教育出版社

TH113

Z11

461410

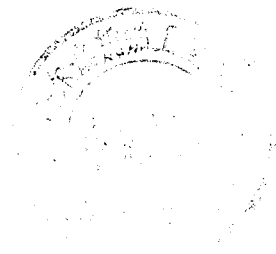
高等学校教材

机械动力学

张策



00461410



高等教育出版社

228131

内容简介

本书阐述机械动力学的理论和方法。全书除绪论外,包括三篇:机械刚体动力学、机械振动学基础、机械弹性动力学。本书可作为硕士研究生课程和高年级本科生选修课的教材,也可供高等工科院校的教师和从事机械设计和研究的技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械动力学/张策编著. —北京:高等教育出版社,
2000
高等学校教材
ISBN 7-04-008000-1

I. 机… II. 张… III. 机械学:动力学-高等学校-教材 IV. TH113

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 17619 号

机械动力学
张 策

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 北京印刷二厂

开 本 787×1092 1/16

版 次 2000 年 4 月第 1 版

印 张 12.75

印 次 2000 年 4 月第 1 次印刷

字 数 300 000

定 价 13.90 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

这本《机械动力学》是在作者多年来讲授研究生课程所用讲义的基础上撰写而成的。

为适应机械的高速化、轻量化、精密化和自动化，机械动力学在过去二三十年间得到了迅速的发展，不仅有大量的研究成果问世，而且早已成为发达国家机械工程专业本科生和研究生的重要课程。近十年来，我国许多大学也都将该课程列为机械工程类各专业研究生和本科生的重要选修课。

在机械动力学发展历程中，先后形成且目前仍并存着四种分析方法，即静力分析、动态静力分析、动力分析和弹性动力分析。这些分析方法有着不同的基本假定，代表着不同时期所达到的分析水平。本书试图对这些分析方法给予历史的、系统的阐述。

这四种分析方法和相应的设计方法可以划分为两大部分：机械刚体动力学和机械弹性动力学。用这样一种划分可以清晰地同类问题组织到一起，也便于引导学生认识同类问题在基本假定、力学模型、求解方法等方面的共性。尤其在今天，机械弹性动力学迅速发展，这样一种划分可能有利于深化认识，加速进一步的研究。

本书是基于上述对机械动力学体系的新认识来组织内容的。全书分为机械刚体动力学、机械振动学基础和机械弹性动力学三篇。机械刚体动力学篇介绍动态静力分析方法、动力分析方法和以这两种分析方法为基础的综合方法。机械弹性动力学篇介绍各种机构和机械系统的弹性动力分析方法和综合方法。机械振动学基础既作为学习机械弹性动力学的基础知识，同时它也有着独立的、重要的工程应用价值。

这本《机械动力学》主要用作机械学、机械制造等专业的研究生教材，也可供机械类专业的本科生和从事机械动力学教学、研究和设计的人员参考。

本书内容反映了作者多年来从事机构学和机械动力学研究中形成的独特的学术观点，纳入了作者和合作研究者以及研究生的一些研究成果(如博士研究生常宗渝、姚燕安分别撰写了§5.3和§12.2)。此外，也纳入了国内外学者的一些研究成果。在此，向这些学者表示衷心的感谢。

机械工程学会机构学专业委员会副主任黄真教授认真地审阅了全书，并提出了宝贵的意见，特表示衷心的感谢。

由于国内外机械动力学领域的研究发展迅速，作者对近年发展之把握难免挂一漏万，真诚地欢迎学术界朋友和广大读者批评指正。

张 策

1999年6月于天津大学

目 录

绪 论	1	§ 7.1 多自由度系统振动方程的建立	99
§ 0.1 机械动力学的研究内容	1	§ 7.2 多自由度系统的自由振动	103
§ 0.2 研究机械动力学的重要意义	4	§ 7.3 用振型叠加法求系统对激励的响应	109
第一篇 机械刚体动力学	7	§ 7.4 机械振动理论的进一步介绍	112
第一章 机构的动态静力分析	8	第三篇 机械弹性动力学	115
§ 1.1 平面连杆机构的动态静力分析	8	第八章 机械弹性动力学基础	116
§ 1.2 平面凸轮机构的动态静力分析	13	§ 8.1 概 述	116
第二章 平面机构的平衡	16	§ 8.2 有限单元法简介	118
§ 2.1 概 述	16	第九章 轴和轴系的振动	125
§ 2.2 质量代换	17	§ 9.1 概 述	125
§ 2.3 曲柄滑块机构的摆动力部分平衡	20	§ 9.2 轴的横向振动临界转速计算	126
§ 2.4 平面连杆机构的完全平衡	22	§ 9.3 轴系的扭振固有频率计算	128
§ 2.5 平面连杆机构的优化综合平衡	29	§ 9.4 转子动力学概述	135
第三章 单自由度机械系统动力学	33	第十章 凸轮机构弹性动力学	136
§ 3.1 概 述	33	§ 10.1 概 述	136
§ 3.2 作用在机械上的力	34	§ 10.2 高速凸轮常用运动规律	137
§ 3.3 等效力学模型	36	§ 10.3 凸轮机构的动力学模型	143
§ 3.4 运动方程式的求解方法	41	§ 10.4 凸轮机构的弹性动力分析	147
§ 3.5 稳定运动状态的动力学分析	48	§ 10.5 凸轮机构的动力学设计	151
§ 3.6 周期性速度波动的调节	54	第十一章 连杆机构弹性动力学	155
第四章 多自由度机械系统动力学	59	§ 11.1 概 述	155
§ 4.1 概 述	59	§ 11.2 单元运动微分方程的建立	158
§ 4.2 二自由度机械系统动力分析	59	§ 11.3 系统运动微分方程的形成	165
§ 4.3 二自由度机械手的动力学问题	65	§ 11.4 机构的弹性动力分析	168
§ 4.4 机器人操作机的动力学问题简介	69	§ 11.5 连杆机构弹性动力响应的抑制	170
第五章 含间隙机构的动力学问题	73	第十二章 机械系统弹性动力学	173
§ 5.1 考虑运动副间隙影响的连杆机构 动力学研究	73	§ 12.1 仅含定传动比机构的机械系统的 弹性动力分析	173
§ 5.2 凸轮机构和间歇机构中的横越冲击现象	80	§ 12.2 从机械系统弹性动力学出发进行 凸轮廓线设计	176
§ 5.3 含间隙机械系统的研究现状	82	附录	182
第二篇 机械振动学基础	87	附录 I 平面连杆机构运动分析的子程序	182
第六章 单自由度系统的振动	88	附录 II 求解超越方程的二分法和线性插值法	192
§ 6.1 单自由度系统的自由振动	88	附录 III 常微分方程的数值解法——龙格— 库塔法	193
§ 6.2 单自由度系统的受迫振动	92	参考文献	197
第七章 多自由度系统的振动	99		

绪 论

§ 0.1 机械动力学的研究内容

任何机械都有运动，任何机械都受到力的作用。机械动力学就是研究机械在力作用下的运动和机械在运动中产生的力的科学。

动力学和运动学一样，研究分析与综合两方面的问题。分析，就是进行现有机械的研究；综合，是设计机械使之达到给定的运动学、动力学要求。分析是综合的基础。

一、动力学的分析方法按功能分类

机械动力学的分析过程，按其任务之不同，可分为两类问题：

1) 动力学反问题(Inverse Dynamics)：已知机构的运动状态和工作阻力，求解输入转矩和各运动副反力及其变化规律(即已知运动求力)；

2) 动力学正问题(Forward Dynamics)：给定机器的输入转矩和工作阻力，求解机器的实际运动规律(即已知力求运动)。

我们以一个牛头刨床(图 0.1.1)为例来说明动力学正问题和动力学反问题在设计阶段的应用。在牛头刨床的设计过程中，首先根据刨床工作的特点选择了这个特定的六杆机构，并完成了其运动学设计，确定了电动机的转速、各级传动的传动比和各构件的基本几何尺寸。为确定电动机的功率，为了验算各构件的强度和轴承的寿命，就需要根据牛头刨床的载荷求出应施加于原动构件(曲柄)上的平衡力矩和各运动副中的约束反力。这就是求解动力学反问题。在求解动力学反问题时，我们做了一个假定，认为电动机和曲柄都是等速回转的。而实际上，电动机输出的转矩并不能严格地等于求解动力学反问题所算出的平衡力矩。因而，曲柄并不能严格地保持等速回转这一假定，而存在角速度的周期性波动。这一角速度波动对刨削加工不利，对牛头刨床的强度和寿命也是不利的，需要通过安装飞轮加以控制。这就需要根据电动机的机械特性和牛头刨床的负载，来计算机器的实际运动规律，也即求解动力学正问题。

我们再以机器人的设计为例加以说明。在机器人(图 0.1.2)的设计中，首先根据机器人手部应完成的工作，进行轨迹规划，即给定机

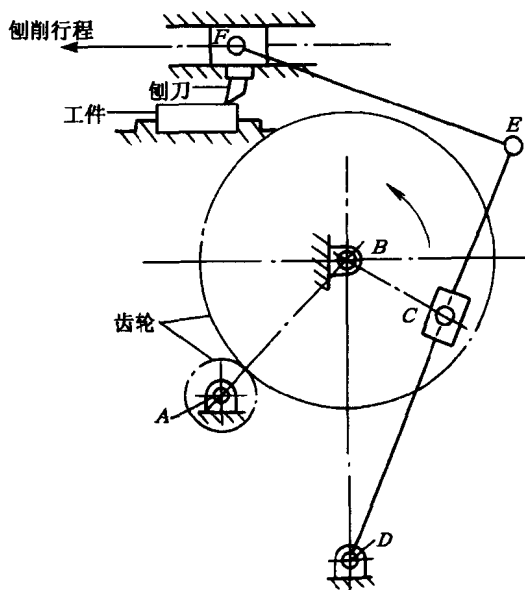


图 0.1.1 牛头刨床

器人手部的运动路径以及轨迹上各点的速度和加速度。然后，通过求解动力学反问题，求出应施加于各主动关节处的广义驱动力的变化规律。动力学反问题在机器人分析中至关重要，它是机器人控制器设计的基础。若已知各关节的驱动力矩，求解手部的真实运动，则需要求解动力学正问题分析，它是机器人动态仿真的基础。

二、动力学的分析方法按水平分类

还可以按分析方法的水平对动力学分析过程作另一种分类。

近百年来，尤其是近几十年来，人们对生产率的不断追求，使机械的运转速度不断地提高；而与此同时，人们又总是希望机械能轻巧一些，材质的改善使得构件的截面可以设计得更小一些，以减轻重量，节约材料，节约能源。速度高了，机械中的惯性力大大增加，而构件柔度加大，则使得系统更容易

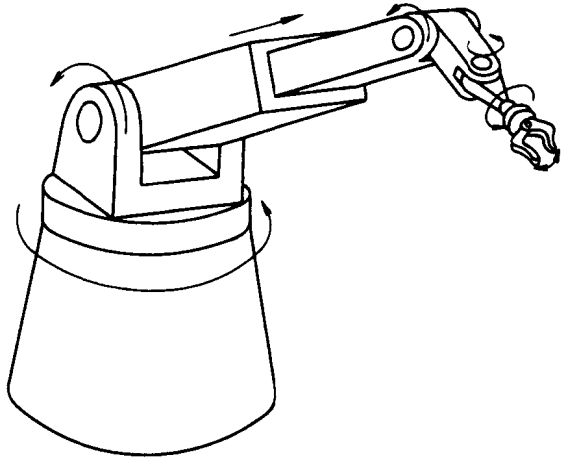


图 0.1.2 机器人

产生振动。振动降低了机械的精度和寿命，恶化了劳动条件，污染了环境。机械产品高速化、轻量化、精密化、大功率化的趋向不断促进着机械动力学的发展。

力学理论的发展、电子计算机在设计领域的应用则为不断进步的动力学分析方法提供了理论基础和实现手段。

由于动力学研究的复杂性，人们常常引入一些假定，使问题简化。随着生产实践的发展，对动力学分析的准确度提出了新的要求；而科学技术的发展，为动力学分析提供了新的理论和手段。因而，动力学研究发展的总趋向是：逐步地将这些假定抛弃，日益地使分析更接近客观实际情况。动力学分析方法的水平在逐步提高。

在机械动力学发展历史上，先后提出了四种不同水平的分析方法：静力分析、动态静力分析、动力分析、弹性动力分析。在当代机械的分析与设计中，这四种分析方法也仍然都有所应用。

1. 静力分析(Static Analysis)

对低速机械，运动中产生的惯性力可以忽略不计。对机械的运动过程中的各个位置，可用静力学方法求出为平衡载荷而需在驱动构件上施加的输入力或力矩，以及各运动副中的反作用力。这是历史上最早出现的力分析方法。对许多速度不太高的机械，现在仍用静力分析方法来计算原动机的功率，进行构件和运动副的承载能力计算。

2. 动态静力分析(Kineto-Static Analysis)

随着机械速度的提高，惯性力不能再被忽略。根据达朗贝尔原理，可将惯性力计入静力平衡方程来求出为平衡静载荷和动载荷而需在驱动构件上施加的输入力或力矩，以及各运动副中的反作用力。这样一种分析方法称为动态静力分析。在这种分析方法中要计入惯性力，而为求出惯性力又需知道构件的加速度。因此在进行动态静力分析之前首先要进行运动分析。在进行运动分析时是假定驱动构件按某一给定的理想运动规律运动的(多数驱动构件均被假定为作等

速回转运动)。由于采用了“驱动构件等速回转”这一假定,在动态静力分析中便不涉及原动机的特性,因而,这在本质上是一种理想化运动状态下的力分析。现在对许多速度较高的机械,均用动态静力分析代替了静力分析。动态静力分析应用在动力学反问题中。

3. 动力分析(Dynamic Analysis)

在力的作用下,机械并不能维持“驱动构件等速回转”这种理想化的假定。尽管这种假定在许多情况下是允许的,但在实际的运动中也常常要求知道机械系统的真实运动。进行“动力分析”的目的就是要求出在外力作用下机械的真实运动。它应用于动力学正问题中。

在动力分析中,抛弃了对驱动构件运动规律的理想假定,因而自然地要把原动机包括在机械系统之内来进行分析。所以动力分析的对象是整个机械系统,在有的文献中常将它称为“机械系统动力学”。

静力分析和动态静力分析的数学模型均归结为一个代数方程组的求解,而动力分析则需要求解微分方程或代数-微分混和方程。

4. 弹性动力分析(Elasto-Dynamic Analysis)

在上述三种分析方法中,构件均被假定为刚性的。随着机械向轻量化方向发展,构件的柔度加大;随着机械向高速化方向发展,惯性力急剧增大。在这种情况下,构件的弹性变形可能给机械的运动输出带来误差。对于一些高精密度的机械,就必须计入这种弹性变形对精度的影响。机械系统的柔度加大,系统固有频率下降;而机械运转速度提高,激振频率上升。随着激振频率和固有频率的靠近,可能会发生较强的振动现象,从而既破坏机械的运动精度,又影响构件的疲劳强度,并引发噪声。在这种情况下,出现了计入构件弹性的动力分析方法——弹性动力分析。

轴和轴系的振动问题是最早引起人们注意的弹性动力学问题,对它已有很长的研究历史了。但是在轴系的分析中一直没有采用“弹性动力分析”这一术语。随着机械动力学的发展,对凸轮机构、连杆机构、齿轮机构和传动系统的动力学分析均已发展到计入构件弹性影响的阶段。因而机械动力学可以划分为两大部分——机械刚体动力学和机械弹性动力学。

本科生机械原理课程中已包含了静力分析和动态静力分析(图解法)等内容。硕士研究生机械动力学课程是对机械原理课程的动力学部分的深化和扩展。本书包含三大部分内容:机械刚体动力学(第1章至第5章),机械振动基础(第6章、第7章)和机械弹性动力学(第8章至第12章)。机械振动基础部分是学习机械弹性动力学的理论基础,同时,在实践中也有其独立的、重要的实用价值。

在机械刚体动力学部分,将介绍机构的动态静力分析(解析法)、连杆机构的平衡(机构的平衡本质上是动态静力分析水平上的一种动力学综合)、机械系统动力分析和含运动副间隙的机构的动力学分析。

在机械弹性动力学部分,将介绍回转机械的振动问题、凸轮机构弹性动力学、连杆机构弹性动力学和机械系统弹性动力学。

机械动力学也和机构运动学一样,研究分析与综合两方面的问题。分析,就是进行现有机械的研究;综合,却是设计机械使之达到给定的运动学、动力学要求。限于篇幅,本书以分析问题为主。综合问题在某些章节虽也涉及到,但一般不作深入研究。

§ 0.2 研究机械动力学的重要意义

生产力的不断提高是推动科学技术发展的动力源。机械工业为国民经济提供设备，它的技术水平和现代化程度极大地影响着整个国民经济的技术水平。现代化的工业、农业、交通等各个部门的发展要求设计出更多生产率高、性能良好的机械设备，由此而导致机械产品市场上的激烈竞争。这始终是，而且至今仍是推动着机械动力学发展的动力。

追踪近三百年机械产品的发展历史，机械运转速度的不断提高是最为突出的特征，它是推动机械动力学和机械振动学发展的第一因素。动力学分析方法从静力分析发展到动态静力分析，又发展到动力分析和弹性动力分析，考虑因素越来越多，越来越更符合客观真实情况，分析复杂程度越来越高，其背后的第一推动力就是机械速度的不断提高。例如，汽车的高速化推动了对整车振动和传动系统振动与噪声的研究，内燃机和各种自动机械的高速化推动了高速凸轮机构动力学的研究。

轻量化是现代机械设计的另一特征。能源与资源的危机，向机械产品提出了节能、节材的要求；而材质的改善和最小重量优化方法的发展促使机械产品的轻量化成为可能。机械弹性动力学的发展直接与轻量化相联系。

精密化要求机械的实际运动尽可能与期望运动相一致。这一要求使我们在分析误差时必须尽可能地计入各种因素的影响，如间隙、弹性、制造误差。特别是要注意机械在高速下的动态精度与静态时有很大区别。精密机床的动态特性研究、高速间歇机构的动态定位精度研究就是这样发展起来的。

动态设计方法是近些年来提出的新的设计方法。长期以来普遍采用静态设计方法。所谓静态设计是指在设计机械时，只考虑静态载荷和静特性，待产品试制出来以后再作动载荷和动特性测试，发现有不合要求之处再采用补救措施。这种设计方法可以简称为“静态设计、动态校核补救”。这是一种头疼医头，脚疼医脚的办法，对一些局部枝节问题可能有效，但对于一些涉及全局性的重大问题，即使能补救，也是少慢差费，甚至无法补救，最终造成重大返工事故。对于动态特性是起决定性因素的机械，必须在设计、制造、管理各阶段，采取综合性技术措施，直接地、早期就考虑动力学问题。例如，高速旋转机械可以用静态方法设计，而在制造出来以后通过动平衡减小振动，还要使运转速度避开共振的临界转速。但是随着转速的提高和柔性转子的出现，就必须采用全方位的综合措施，不仅在设计时要进行认真的动力分析，而且在运行过程中还要进行状态监测和故障诊断，及时维护，排除故障，避免重大事故。

在飞机设计中早已采用了动态设计方法。自从飞机因颤振失事引起人们注意之后，避免颤振便成为设计阶段的必要指标。在设计阶段就要包括被动减振措施和主动控振系统的设计。又如，由于弹性的存在，连杆机构实现的运动轨迹会不同于按刚体运动学设计的轨迹。这种误差在连杆机构制造好以后就难以消除了。这说明，有些情况下按“静态设计、动态校核补救”的设计方法是不能解决问题的。若采用弹性动力综合方法设计连杆机构，就可以使考虑弹性变形后的连杆曲线逼近我们期望的轨迹。

对于车辆等机械设备，若振动和噪声过大，则会影响舒适性并污染环境，从而使其不受人们欢迎而被挤出市场。所以必须在设计阶段就分析车辆的振动情况，即采用动态设计方法。

我国机械工业的综合水平落后于世界先进水平 20 余年，关键问题之一是设计水平落后。目前，我国的机械设计基本上仍停留在静态设计阶段，甚至还存在着大量的类比设计。要改变这种现状，必须重视对现代设计方法的研究和推广，而大力推进从静态设计向动态设计的转变是其主要内容之一。

动态设计的基础是动力学分析。由于课时的限制，本书难以纳入很多动态设计的内容，而只能以介绍动力学分析方法为主，这将为掌握动态设计奠定必要的基础。

第一篇

机械刚体动力学

在机械动力学发展历史上，先后提出了四种不同水平的分析方法：静力分析、动态静力分析、动力分析、弹性动力分析。在前三种方法中均忽略构件的弹性变形，而假定构件为刚体。我们将研究这三种不同水平的分析方法和相应的综合方法的科学统称为机械刚体动力学，以区别于考虑构件弹性的机械弹性动力学。

第一章 机构的动态静力分析

在机械的速度很低的时代，把机构作为一个静力系统，只进行静力分析即可满足要求。随着机械速度的提高，构件的惯性力不能再被忽略。根据达朗贝尔原理，可将惯性力计入静力平衡方程来求出为平衡静载荷和动载荷而需在驱动构件上施加的输入力或力矩，以及各运动副中的反作用力。这样一种分析方法称为动态静力分析。今天，对低速机械仍可用静力分析方法求出构件的受力。在根据强度、刚度设计构件的尺寸和计算所需的原动机功率时，再用所谓动载系数来考虑动态载荷的影响，将构件尺寸和原动机功率适当放大。但是对速度较高的机械，或要求较为准确地估计惯性载荷影响的场合，均应采用动态静力分析。

在动态静力分析中要计入惯性力，而为求出惯性力又需知道构件的加速度，所以在动态静力分析中首先要进行运动分析。在进行运动分析时是假定运动构件按某种理想的运动规律运动的，例如，多数机构的驱动构件均被假定为作等速回转运动。由于采用了这样一种假定，在动态静力分析中便不涉及到原动机的特性。因而，这在本质上是一种理想化运动状态下的力分析。它应用于逆动力学分析中：已知机构的运动状态和工作阻力，求解平衡力矩、各运动副反力及其变化规律，并可在此基础上求出对机座的摆动力和摆动力矩。

在机械原理课程中介绍过动态静力分析的图解法，在本章中介绍适用于计算机计算的解析法^[7,8]。

§ 1.1 平面连杆机构的动态静力分析

一、构件的惯性力和惯性力矩

如图 1.1.1 所示，平面机构中作一般平面运动的构件会产生一个惯性力(Inertia Force) $-m_i \ddot{s}_i$ 和一个惯性力矩(Inertia Moment) $-J_i \ddot{\varphi}_i$ ，其中 m_i 、 J_i 分别为构件的质量和转动惯量， \ddot{s}_i 和 $\ddot{\varphi}_i$ 分别为构件质心的加速度和构件的角加速度。负号表示惯性力的方向与质心加速度方向相反，惯性力矩的方向与构件角加速度方向相反。有两种特殊情况：对作往复直线运动的构件，惯性力矩为零；对绕质心回转的构件，惯性力为零。

二、平面连杆机构的动态静力分析

本章以平面四杆机构为例介绍一种机构动态静力分析的解析方法。在这一分析中忽略了运动副中的摩擦。

如图 1.1.2 所示为一平面铰链四杆机构，首先讨论其中构件 I 在某一位置时的力平衡方程。如图 1.1.3 所示，在铰链 $i-1$ 处构件 I 与前一个构件 $I-1$ 相连，所受的约束反力为 $-F_{Ri-1}$ ；在铰链 i 处与下一个构件 $I+1$ 相连，所受到的约束反力为 F_{Ri} 。作用于构件 I 上的所有外力和外力矩(不包括未知的平衡力矩)向构件的质心简化，可得到一个合

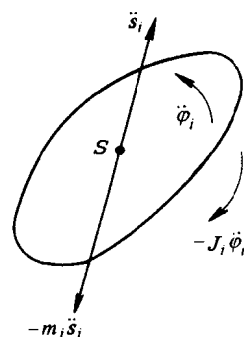


图 1.1.1 构件的惯性力和惯性力矩

力 F_I 和所有外力矩之和 M_I 。该构件的矢量形式的力和力矩平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{R_i} - \mathbf{F}_{R_{i-1}} + \mathbf{F}_I &= m \ddot{\mathbf{s}}_I \\ (\mathbf{p}_I \times \mathbf{F}_{R_i}) - (\mathbf{q}_I \times \mathbf{F}_{R_{i-1}}) + M_I &= J_I \ddot{\varphi}_I \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

式中 m_I 、 J_I 分别为构件的质量和对质心的转动惯量； $\ddot{\mathbf{s}}_I$ 为质心的加速度矢量； $\ddot{\varphi}_I$ 为角加速度矢量； \mathbf{p}_I 、 \mathbf{q}_I 为从质心至铰链的矢量：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_I &= \mathbf{r}_i - \mathbf{s}_I \\ \mathbf{q}_I &= \mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{s}_I \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2)$$

式中 \mathbf{r}_i 、 \mathbf{r}_{i-1} 为从坐标原点到铰链的矢量， \mathbf{s}_I 为从坐标原点到质心的矢量。这三个量均为已知量，则后面要用到的 \mathbf{p}_I 、 \mathbf{q}_I 在 x 、 y 两个方向的分量 p_{Ix} 、 p_{Iy} 、 q_{Ix} 、 q_{Iy} 不难求出。

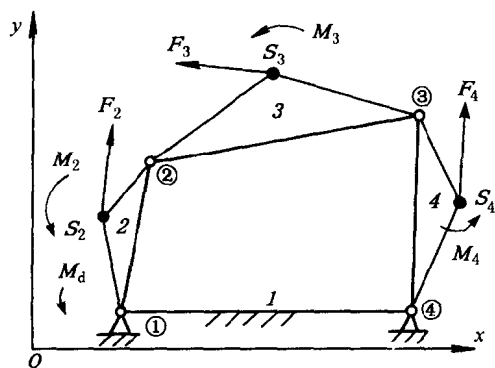


图 1.1.2 平面铰链四杆机构的动态静力分析

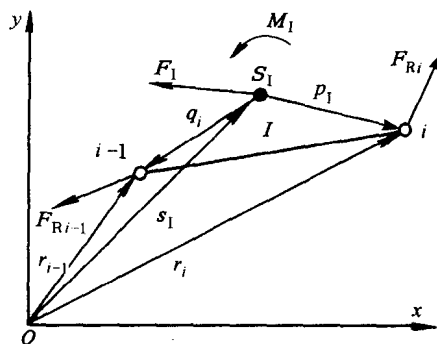


图 1.1.3 构件上所受的力

根据式(1.1.1)可写出图 1.1.2 中各构件的力平衡方程。

$$\left. \begin{aligned} \text{构件 2:} \quad \mathbf{F}_{R2} - \mathbf{F}_{R1} &= m_2 \ddot{\mathbf{s}} - \mathbf{F}_2 \\ (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{F}_{R2}) - (\mathbf{q}_2 \times \mathbf{F}_{R1}) + M_d &= J_2 \ddot{\varphi}_2 - M_2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{构件 3:} \quad \mathbf{F}_{R3} - \mathbf{F}_{R2} &= m_3 \ddot{\mathbf{s}} - \mathbf{F}_3 \\ (\mathbf{p}_3 \times \mathbf{F}_{R3}) - (\mathbf{q}_3 \times \mathbf{F}_{R2}) &= J_3 \ddot{\varphi}_3 - M_3 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{构件 4:} \quad \mathbf{F}_{R4} - \mathbf{F}_{R3} &= m_4 \ddot{\mathbf{s}} - \mathbf{F}_3 \\ (\mathbf{p}_4 \times \mathbf{F}_{R4}) - (\mathbf{q}_4 \times \mathbf{F}_{R3}) &= J_4 \ddot{\varphi}_4 - M_4 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

注意，这三个构件的力平衡方程中，只是原动构件 2 的方程略有不同：在原动构件上作用有平衡力矩 M_d 。平衡力矩的定义是：为维持原动构件按假定的理想运动规律运动(对原动构件作回转运动的单自由度机械一般是等速回转运动)所需施加于原动构件上的驱动力矩。在下一章中我们将进一步看出，原动机传给原动构件的驱动力矩并不等于本章所算出的平衡力矩。

这三个方程组都是矢量式，用计算机计算需展成为标量式，如式(a)展成为

$$\left. \begin{aligned} F_{R2x} - F_{R1x} &= m_2 \ddot{x}_{S2} - F_{2x} \\ F_{R2y} - F_{R1y} &= m_2 \ddot{y}_{S2} - F_{2y} \\ p_{2x} F_{R2y} - p_{2y} F_{R2x} - q_{2x} F_{R1y} + q_{2y} F_{R1x} + M_d &= J_2 \ddot{\varphi}_2 - M_2 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

式中 \ddot{x}_{S2} 、 \ddot{y}_{S2} 为质心 S_2 沿坐标轴方向的加速度。将式(b)、(c)也可同样地展开。这样我们可从三个构件的动态静力平衡条件得到 9 个方程，组成一个 9 元的线性方程组：

$$AR = B$$

(1.1.3)

式中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{2y} & -q_{2x} & -p_{2y} & p_{2x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{3y} & -q_{3x} & -p_{3y} & p_{3x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{4y} & -q_{4x} & -p_{4y} & p_{4x} & 0 \end{bmatrix} \quad (e)$$

为一 9×9 的已知方阵，其元素与构件的质心位置有关；

$$B = [m_2\ddot{x}_{S2} - F_{2x} \quad m_2\ddot{y}_{S2} - F_{2y} \quad J_2\ddot{\phi}_2 - M_2 \quad m_3\ddot{x}_{S3} - F_{3x} \quad m_3\ddot{y}_{S3} - F_{3y} \quad J_3\ddot{\phi}_3 - M_3 \quad m_4\ddot{x}_{S4} - F_{4x} \quad m_4\ddot{y}_{S4} - F_{4y} \quad J_4\ddot{\phi}_4 - M_4]^T \quad (f)$$

为一 9×1 的已知列阵，包含了机构所受的外力和惯性力、惯性力矩；

$$R = [F_{R1x} \quad F_{R1y} \quad F_{R2x} \quad F_{R2y} \quad F_{R3x} \quad F_{R3y} \quad F_{R4x} \quad F_{R4y} \quad M_d]^T \quad (g)$$

为未知量，包含了机构各运动副中的反力和作用于原动构件上的平衡力矩。

式(1.1.3)就是平面四杆铰链机构的动态静力分析方程。在完成了机构的运动分析之后，有了机构的位置参数 p_{ix} 、 p_{iy} 、 q_{ix} 、 q_{iy} ，各构件的角加速度 ϕ_i 和质心加速度 \ddot{S}_{ix} 、 \ddot{S}_{iy} ，即可确定列阵 B 和方阵 A ，求解这一线性方程组，即可求得列阵 R ，得到机构各运动副中的反力和作用于原动构件上的平衡力矩。方阵 A 中的 p_{ix} 、 p_{iy} 、 q_{ix} 、 q_{iy} 是各杆质心到铰链的矢量在坐标轴上的投影，是随着机构位置的不同而变化的；列阵 B 中除去构件质量 m_i 、转动惯量 J_i 外，其余各量也都是或可能是随机构位置而变化的量。因而，求解一次线性方程组(1.1.3)，只能求得机构某一位置的各运动副中的反力和平衡力矩。要求得在机构的一个运动周期中运动副反力和平衡力矩的变化情况，则需将机构的运动周期离散化，得到一系列的机构离散位置。按图 1.1.4 的框图，对 n 个离散位置各进行一次运动分析和动态静力分析。

设机构中的活动构件数为 n ，含低副(如回转副或移动副)数目为 p_5 ，含高副数目为 p_4 ，则机构之自由度数为

$$f = 3n - 2p_5 - p_4 \quad (1.1.4)$$

若不计摩擦，每增加一个低副便增加两个未知的约束反力，每增加一个高副便增加一个未知的约束反力，每增

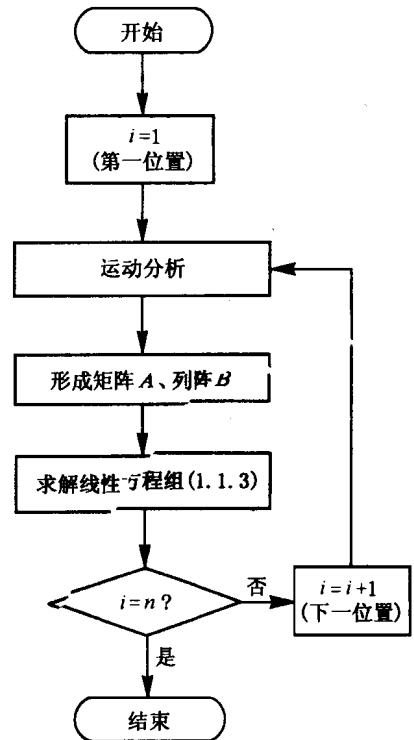


图 1.1.4 机构的动态静力分析框图

加一个自由度便增加一个平衡力矩，而每增加一个构件便可多列出三个力平衡方程。待求的未知约束反力总数为 $2p_5 + p_4$ ，待求的平衡力矩数为 f ，动态静力分析的未知量总数为 $2p_5 + p_4 + f = 3n$ ；而 n 个运动构件能提供的方程总数也恰为 $3n$ 。所以对不存在多余约束和附加自由度的机构，动态静力分析是一个静定问题。

三、机构的摆动力和摆动力矩

前面我们已经通过动态静力分析求出了各运动副中的反力。然而，我们对运动构件与机座相连的运动副中的约束反力更为重视，因为这涉及到机构在机座上的振动。进一步说，我们对这些运动副中由于惯性载荷引起的那部分约束反力更为重视，因为在高速下惯性载荷占主要成分，而且惯性载荷是周期性波动的，是引起振动的主要激励。

图 1.1.5a 为一单缸内燃机的机构简图，其核心部分是一个曲柄滑块机构。图中标出了各构件的惯性力和惯性力矩：连杆 3 有一个惯性力 F_{I3} 和一个惯性力矩 M_3 ，滑块 4 有惯性力 F_{I4} ，假定曲柄为等速回转，且其质心与其转动中心重合，则曲柄没有惯性力和惯性力矩。由于这些惯性载荷的存在，在滑块 4 与机座 1 的移动副中产生附加动反力 F_{14} ，在回转副 O 中产生附加动反力 F_{12}^x 和 F_{12}^y 。而机构通过这两个运动副传给机座的力如图 1.1.5b 所示。这三个附加动反力向 O 点折算，得到一个合力 F_s 和一个力矩 M_s ，如图 1.1.5c 所示。这个合力 F_s 称之为摆动力 (Shaking Force)，力矩 M_s 称之为摆动力矩 (Shaking Moment)。由此可知，摆动力为机构所有运动构件惯性力之合力，它与折算的基点 O 的选取无关；而摆动力矩为机构所有运动构件的惯性载荷对点 O 的合力矩，它与基点 O 的选取有关。

根据摆动力、摆动力矩与运动构件的惯性力、惯性力矩的关系，可直接写出摆动力和摆动力矩的表达式。对图 1.1.2 所示之机构，摆动力在两个坐标轴方向的分量和摆动力矩分别为：

$$\left. \begin{aligned} F_{sx} &= \sum_{i=2}^4 m_i \ddot{x}_{Si} \\ F_{sy} &= \sum_{i=2}^4 m_i \ddot{y}_{Si} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5)$$

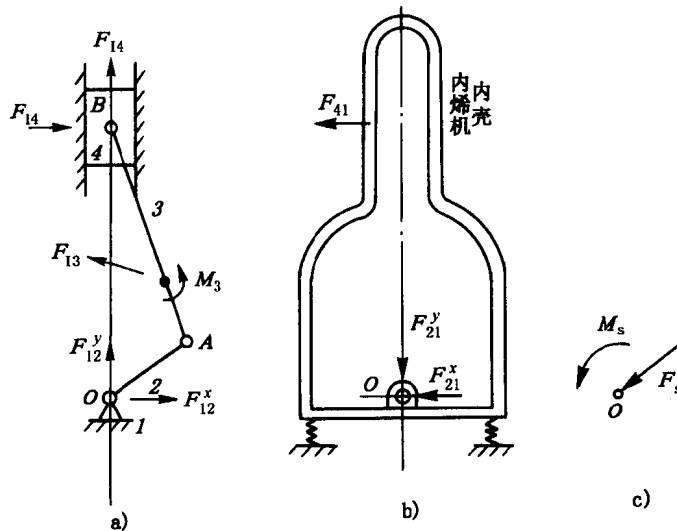


图 1.1.5 机构的摆动力和摆动力矩

$$M_s = \sum_{i=2}^4 [J_i \ddot{\varphi}_i + m_i (x_{Si} \ddot{y}_{Si} - y_{Si} \ddot{x}_{Si})] \quad (1.1.6)$$

摆动力和摆动力矩也可通过另一种方法求出。将式(f)中的外力和外力矩去掉, 求出只含惯性载荷的列阵 B , 代入式(1.1.3), 则得到由惯性载荷所引起的附加动反力。根据两个固定铰链中的附加动反力不难求出摆动力和摆动力矩。这种方法的优点是可同时求出各运动副的受力和需加于原动构件上的动态力矩。

例题 1.1.1 图 1.1.6a 所示为一对心曲柄滑块机构。曲柄以转速 $\omega_1 = 100 \text{ rad/s}$ 作等速回转运动。曲柄长度 $r = 50.8 \text{ mm}$, 质心与其回转中心 A 重合。连杆长度 $l = 203 \text{ mm}$, 连杆质心 S_2 到铰链 B 的距离 $\overline{BS_2} = 50.8 \text{ mm}$, 连杆质量 $m_2 = 1.36 \text{ kg}$, 对其质心的转动惯量 $J_2 = 0.0102 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。滑块质量 $m_3 = 0.907 \text{ kg}$, 其质心与铰链 C 重合。绘出摆动力、对 A 点的摆动力矩和与惯性载荷相对应的那一部分平衡力矩随曲柄位置角 θ_1 变化的情况。

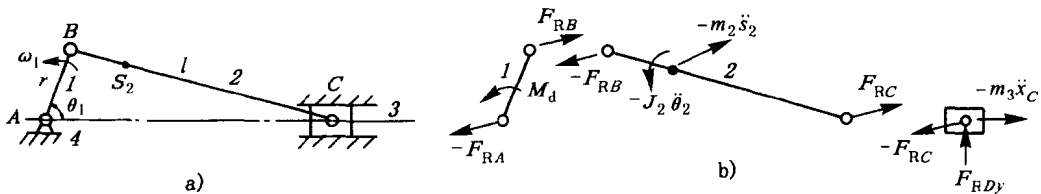


图 1.1.6 对心曲柄滑块机构

解 绘出各构件的受力图, 如图 1.1.6b 所示。注意, 对对心曲柄滑块机构, 若不考虑摩擦, 则滑块所受的力为一平面汇交力系, 因而缺少一个力矩平衡方程; 而滑块导路中的约束反力也只有一个 y 向的反力。按照与曲柄摇杆机构相同的方法, 可推出曲柄滑块机构的动态静力分析方程, 形式与式(1.1.3)相同:

$$AR = B \quad (1.1.3)'$$

其中的方阵和列阵分别为:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_B & x_B & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_B - y_{S2} & x_{S2} - x_B & y_{S2} - y_C & x_C - x_{S2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (h)$$

为一 8×8 已知方阵, 其元素与构件的位置有关;

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ m_2 \ddot{x}_{S2} \ m_2 \ddot{y}_{S2} \ J_2 \ddot{\theta}_2 \ m_3 \ddot{x}_C \ 0]^T \quad (i)$$

为一 8×1 已知列阵, 包含了机构所受的外力和惯性力、惯性力矩;

$$R = [F_{RAx} \ F_{RAy} \ F_{RBx} \ F_{RBy} \ F_{RCx} \ F_{RCy} \ F_{RDy} \ M_d]^T \quad (j)$$

为未知量, 包含了机构各运动副中的反力和作用于原动构件上的平衡力矩。

将曲柄的运动周期 2π 分为 180 等份, 对每隔 2° 的 180 个离散位置分别求解方程(1.1.3)', 得到铰链 A 中的约束反力 F_{RAx} 、 F_{RAy} 和滑块导路中的约束反力 F_{RDy} 。这样, 在两个坐标轴方向的摆动力即为

$$\left. \begin{aligned} F_{sx} &= F_{RAx} \\ F_{sy} &= F_{RAy} + F_{RDy} \end{aligned} \right\} \quad (k)$$