

随机方法与 模糊数学应用

黄克中 毛善培 编著



同济大学出版社

随机方法与模糊数学应用

黄克中 毛善培

同济大学出版社

内 容 提 要

本书分随机方法与模糊数学两篇,包括参数估计、随机变量分布模型的经验确定、回归分析与相关分析、Bayes方法、质量控制与验收抽样、马尔可夫链、蒙特卡罗方法、可靠性分析以及模糊数学的综合评判等章节。本书立足于应用,故内容取舍以各工程系统中建立数学模型的需要为依据,并着重物理概念的阐述,列举较多的工程计算实例,供读者参考应用。

本书可作为各工科大专院校的教材和工程技术人员的参考书。

责任编辑 洪建华

封面设计 王肖生

随机方法与模糊数学应用

黄克中 毛善培 编著

同 济 大 学 出 版 社 出 版

(上海四平路 1239 号)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 22.125 字数: 566 千字
1987年1月第一版 1987年1月第一次印刷 科技新书目: 125-180
印数 1—7000 统一书号: 13335·025 定价: 3.65 元

前 言

在近代工程技术中,越来越多地应用了各种数学工具。由于电子计算机的发展,过去被认为某些运算复杂而不适用的方法,今天也有了新的见解。在建立数学模型方面也更多地考虑问题本身的性质,使之更切合实际。其中重要的一点是考虑到客观事物的随机性。实际上这种随机现象是广泛存在的。以一项工程为例,在施工之前有原材料供应期限和数量的不确定性;在施工期间又可能出现诸如气象之变化、人员的出勤率和工程的质量指标等方面的因素;在施工之后,又会发生外荷载的增减、地基承载力的变化等,所有这些情况,事先都是无法预知的。总的来说,是由于人们对复杂事物的认识有局限性,对因果关系未能全面掌握的缘故。除了随机性以外,还有大量问题具有另一种不确定性——模糊性,例如对某种自然现象(地震)进行分级或对某项质量(如水质)进行评价时,通常总是按照预先规定的指标来套算。显然,不仅指标的规定具有很大的主观因素,其归属关系也是不尽合理的。还有一些问题同时具有上述两种性质——随机性和模糊性,那就构成更为复杂的模糊概率问题了。

为使工程规划设计尽可能经济合理、安全可靠,就应当对各类不确定因素分析研究,以便掌握运用。随着工程建设的规模愈来愈大,耗资日益增加,处理得好坏,举足轻重,因此随机方法的应用已成为当务之急了。

随机分析的数学基础主要是概率论。事实上概率的概念在应用中早已被一些学者所注视。伟大的物理学家 A·Einstein 在教育他十岁的儿子(后来成为国际著名的泥沙动力学家的 H·A·Einstein)时就曾向他提出过这样的问题:假定降雨强度为每小时 10 毫米,问需要多长的时间将 1 米²的地面浸湿? H·A·Einstein 在追忆这件往事时说:……概率和统计的描述完全可以为少年儿童所接受,因此应该纳入少年数学教育计划中去。

编者从事教学工作数十年,深感缺乏一本以数学理论为工具、工程技术为背景的理想教材,而这正是研习工程技术的学生所迫切需要的。许多学生尽管数学理论学得不少,但解决实际问题的能力却不很强,也就是存在着如何学以致用用的问题。1984 年编者之一黄克中在美国开会期间遇到 Illinois 大学教授颜本琦、邓汉忠等人,他们谈及在美国工科大学生中也存在同样的问题。为此洪华生、邓汉忠两教授编写了“工程规划及设计中的概率原理”一书,并由工程教授讲授,实践证明卓有成效。当时适逢该书第二卷正式出版(第一卷于 1975 年出版)。编者遂将一二两卷带回国内,详细研读,发现确有特色。后来又遇到国际水力学研究协会(IAHR)随机方法委员会主席, Pittsburgh 大学邱照淋教授,谈及该书,他也倍加推崇。本来我们就打算编写一本适应于我国土建类大学生及研究生的介绍随机方法等不确定性的教材。为此我们决定以该书为我们第一篇随机方法的蓝本,第二篇模糊数学及其应用中,除扼要论述有关概念外,专列一章介绍在土建工程中的应用,内容取材于有关论文。我们希望读者能通过书中所列举的大量工程实例掌握方法。

由于随机方法方面的实例多取自国外资料,有些暂且保留英制单位。为便于读者对照,附录中插入一页英制—公制度量换算表。

本书书稿蒙上海机械学院赵学端教授和河海大学张乃良先生初审，尤其要提出并表深切谢忱的是同济大学李悟龄先生，他对全文进行了精心润色和修改。

此外，编者的老师杨钦教授和同事顾国维副教授对本书的编写和出版给予了很大的鼓励和支持，在此一并致谢。

本书的第九、十、十一和十二章由黄克中执笔，其余部分由毛善培执笔，由于编者学识浅薄，时间仓促，缺点错误在所难免，尚祈读者指正。

必须申明的是，在编写模糊数学应用示例时，直接引用了国内外的一些论文，其中包括王光远教授在学术会议上的一些专题报告，在此向原作者表示深切的感谢。

编 者

一九八五年元旦

目 录

第 一 篇 随机方法

第一章 随机方法的基本概念	1
§ 1-1 引言	1
§ 1-2 实际问题中信息的不确定性	2
§ 1-3 不确定条件下的设计与决策	5
§ 1-4 控制与标准	7
§ 1-5 事件与概率	8
§ 1-6 集合论基础	9
§ 1-7 概率的数学	16
§ 1-8 小结	34
第二章 随机现象的解析模型	35
§ 2-1 随机变量	35
§ 2-2 一些常用的概率分布	45
§ 2-3 多元随机变量	68
§ 2-4 小结	76
第三章 随机变量的函数	77
§ 3-1 引言	77
§ 3-2 随机变量函数的概率分布	77
§ 3-3 随机变量函数的矩	92
§ 3-4 小结	99
第四章 参数估计	100
§ 4-1 工程中统计推断的意义	100
§ 4-2 参数估计的古典方法	101
§ 4-3 小结	121
第五章 随机变量分布模型的经验确定	122
§ 5-1 引言	122
§ 5-2 概率纸	122
§ 5-3 假设分布的有效性检验	130
§ 5-4 小结	134
第六章 回归分析与相关分析	135
§ 6-1 线性回归的基本概念	135
§ 6-2 多元线性回归	142

§ 6-3	非线性回归	143
§ 6-4	回归分析在工程中的应用	146
§ 6-5	相关分析	150
§ 6-6	小结	153
第七章	Bayes 方法	154
§ 7-1	引言	154
§ 7-2	基本概念——离散型的情况	154
§ 7-3	连续型	158
§ 7-4	抽样理论中的 Bayes 概念	163
§ 7-5	小结	170
第八章	质量控制和验收抽样基础	171
§ 8-1	定性抽样	171
§ 8-2	定量抽样	176
§ 8-3	多步抽样	180
§ 8-4	小结	181
第九章	马尔可夫链	182
§ 9-1	基本模型	182
§ 9-2	状态概率	183
§ 9-3	稳定状态概率	186
§ 9-4	首次通过概率	188
§ 9-5	常返和非常返状态, 吸收状态	192
§ 9-6	转移随机时间	199
§ 9-7	多重转移概率	201
第十章	蒙特卡罗方法	204
§ 10-1	基本概念	204
§ 10-2	均匀分布随机数的生成	208
§ 10-3	随机数的统计检验	209
§ 10-4	任意分布随机数的生成	211
§ 10-5	加速收敛方法	217
§ 10-6	应用示例	224
第十一章	可靠性分析基础	233
§ 11-1	安全概率和失败概率	233
§ 11-2	正态和对数正态变量的安全概率和可靠性指标	237
§ 11-3	均值一次二阶矩算法	239
§ 11-4	改进的一次二阶矩算法	242
§ 11-5	JC方法	250
§ 11-6	相关变量的变换	258
§ 11-7	蒙特卡罗方法解	261
第十二章	系统的可靠性	263

§ 12-1 多元失败模式的基本概念	263
§ 12-2 一阶方法	264
§ 12-3 二阶方法	267
§ 12-4 赘余和非赘余系统	276
§ 12-5 串联和并联系统	277
§ 12-6 倒树图分析法	284
§ 12-7 PNET 方法和蒙特卡罗方法解	288

第 二 篇 模糊数学及其应用

第十三章 模糊数学的基本概念	293
§ 13-1 引言	293
§ 13-2 模糊子集的基本概念	294
§ 13-3 模糊集合的运算	296
§ 13-4 扩展原理	300
§ 13-5 隶属函数的确定	301
§ 13-6 贴近度与择近原则	304
§ 13-7 模糊关系与聚类分析	305
第十四章 综合评判	313
§ 14-1 模糊变换	313
§ 14-2 综合评判	313
§ 14-3 多级综合评判	315
§ 14-4 评判所得模糊向量的应用	316
第十五章 应用示例	318
§ 15-1 关于地震烈度的二级综合评判	318
§ 15-2 污水处理厂运行管理效益的综合评判	321
§ 15-3 关于结构模糊优化设计	325
§ 15-4 关于河流水质的综合评判	330
§ 15-5 建筑施工定额中综合评判的应用	333
§ 15-6 模糊事件的概率	334
§ 15-7 小结	337
附录	338
参考文献	346

第一篇

随 机 方 法

第一章 随机方法的基本概念

§1-1 引 言

建立数学模型、进行定量分析计算是近代工程，包括实验室模型技术的主要方法。其中也包含计算机模拟和优化技术。然而，不管模拟的精度如何，总是在一些理想化的假定或条件下来进行预测或估算的。于是所获得的资料就未必能完全反映真实的情况。

在工程设计中，不管数据的可靠性如何，最后总要有所决策，显然这是在**不确定**条件下的决策，因而结果当然就不能完全置信。除了根据相似条件下的观测或模型实验的结果所推导出的数据，具有某种程度的不完善以外，许多与自然过程或自然现象有关的工程问题本身就具有随机的性质，当然是属于不确定性的，从而也就不能用确定的观点来处理。

上述的不确定性对于设计和规划的影响往往是不可忽视的。在工程设计中要对不确定性因素进行定量估算就要用到概率论的方法。此外，在不确定条件下进行工程系统的设计和规划必然承担着一定的风险，决策时还要求进行得失的权衡，所有这些都属应用概率论的范畴。

在工程中概率的应用是非常广泛的。从对信息的描述直至根据设计原理进行推算以及决策，许多情况下都应当从概率的角度来进行考虑。

§1-2 实际问题中信息的不确定性

1-2-1 来自随机性的不确定性

在工程中有许多现象和过程都含有随机性,即实际发生的结果(在一程度上)不可预测。以实验观测为例,各次实验的结果,即使在不变的条件下也未尽相同。换句话说,通常每一个实验的各次观测值存在着一个范围,而在这范围内不同数值出现的频率可能也不一样。我们将这种特征用**直方图**或**频率图**示例在图 1-1 到图 1-11 中(图中,年降雨强度以英寸为单位,材料强度或应力幅度以千磅/平方英寸为单位,弹性模数以磅/平方英寸为单位)。它们表示了一些工程中重要的物理现象的数据。其中图 1-5,1-6,1-7 和 1-10 中还同时画出了理论**概率密度函数**曲线。理论函数与实验频率图的关系将在第二章和第五章中讨论。

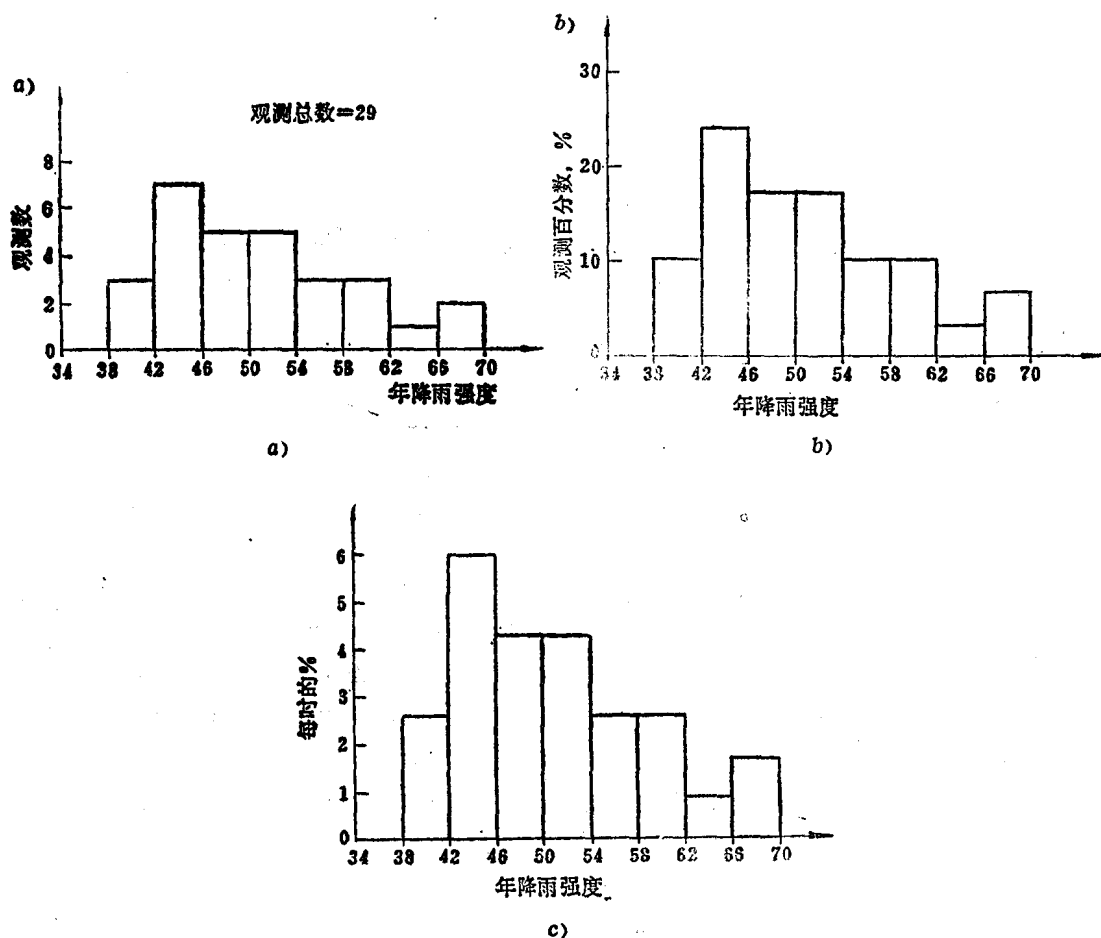


图 1-1 降雨强度直方图

从上述的频率分布图中可以看出,大多数工程问题的数据都具有显著的随机性。在许多工程问题中某些根据观测资料综合而成的数字特征,如平均值和离散度有时比直

方图本身更为有用。而数字特征可以由直方图中计算出来，详见第四章。

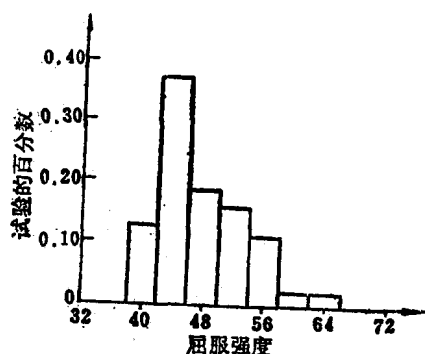


图 1-2 钢筋屈服强度图

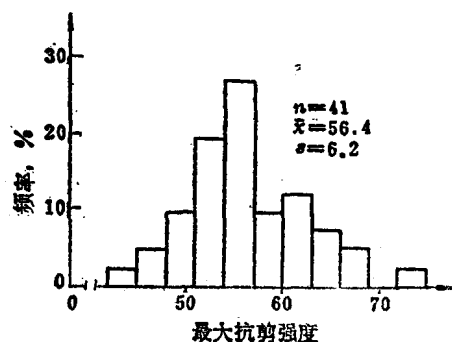


图 1-3 结构焊接的最大抗剪强度

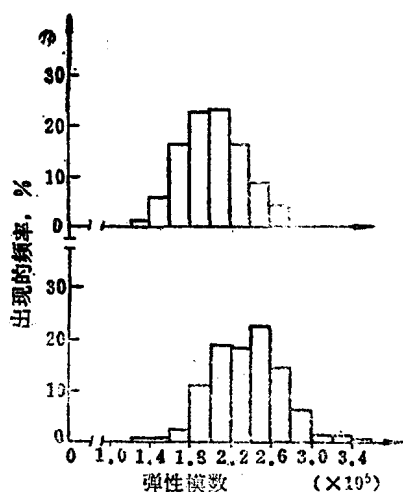


图 1-4 某种木材的弹性模数

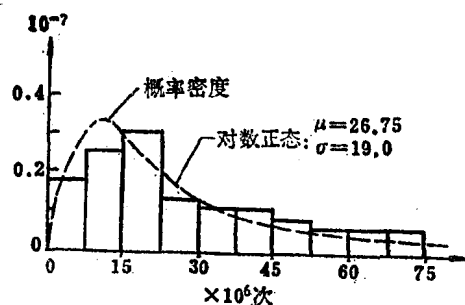


图 1-5 合金铝的疲劳寿命

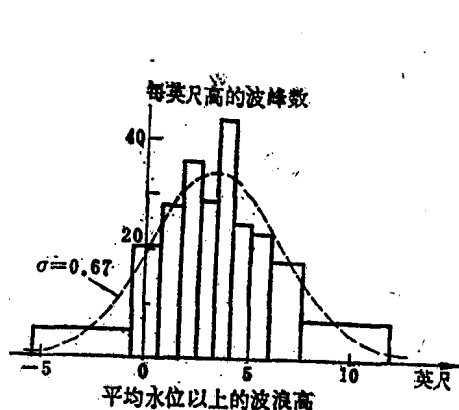


图 1-6 平均水位以上的波高

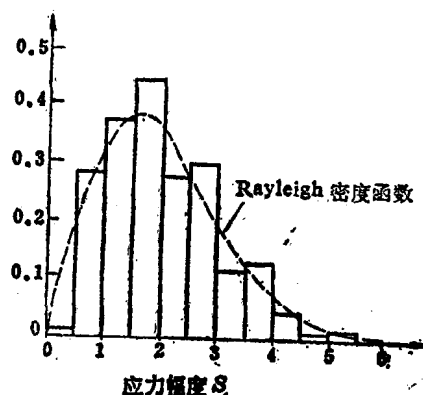


图 1-7 船身中部的弯曲应力

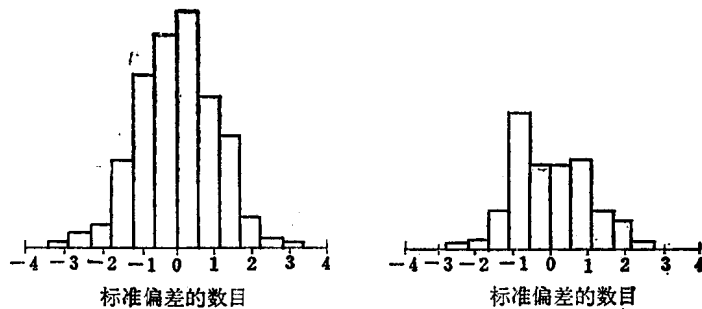


图 1-8 台风期内高层建筑上实测的风压变化的相对离散度

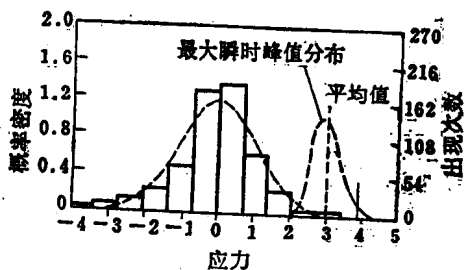


图 1-9 土中因地震引起的剪应力关于其均值的离散度

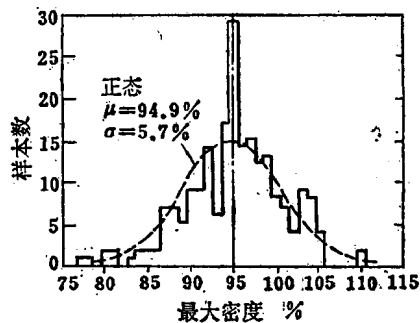


图 1-10 火山凝灰岩地基土质的密度

显然当某一变量的观测点据比较分散, 就不可能确定出它的数值, 象这类变量叫做**随机变量**。它们的数值 (或数值范围) 只能应用概率的概念和方法加以预测或估算。这就是说对某一可能的取值还需同时指明它出现的机会会有多少。

在包含两个或更多的随机变量的情况下, 某一变量的数字特征可能依赖于另外的变量。

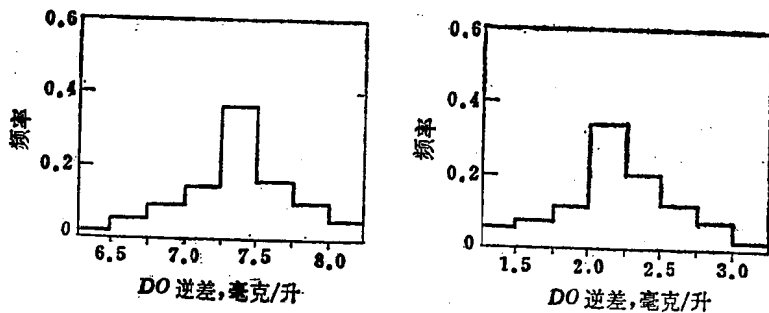


图 1-11 河流中溶解氧(DO)逆差的直方图

如果两个变量的观测点据绘于平面坐标系中非常分散时, 就不能用确定性的观点来说明两者的关系, 而只有根据两者相关的程度用统计分析的方法来处理。

需要特别强调的是, 概率不仅应用于处理实验数据, 其更重要的作用在于为工程技术问题的决策和设计提供理论基础。换言之, 当要处理如图 1-1 到 1-15 (图中, 断裂刚度以磅/平方英寸 $\cdot\sqrt{\text{英寸}}$ 为单位, 流域面积以平方英里为单位, 平均年流量以立方英尺/秒为单位) 所示的数据时, 就需要进行概率分析, 也就是说要使用概率的概念和方法。

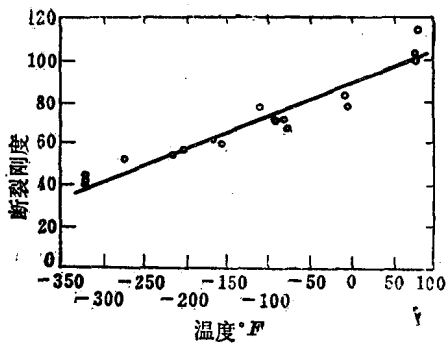


图 1-12 高镍合金钢平面应变断裂刚度与温度的关系

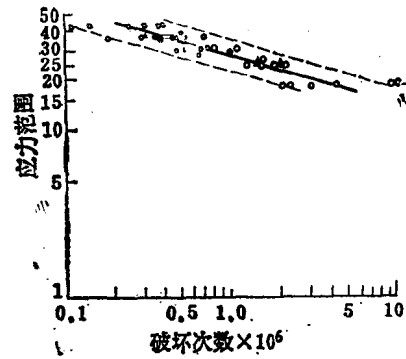


图 1-13 焊接梁的应力范围与疲劳寿命之间的关系

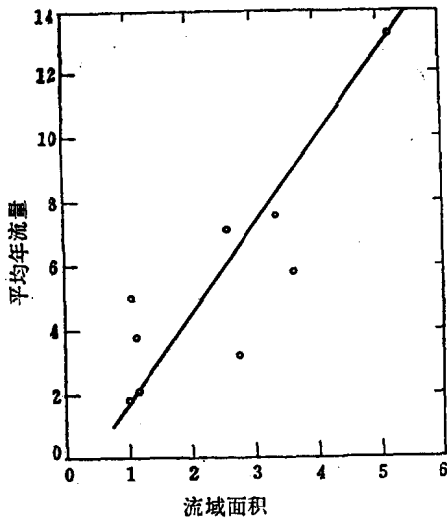


图 1-14 平均年流量与流域面积的关系

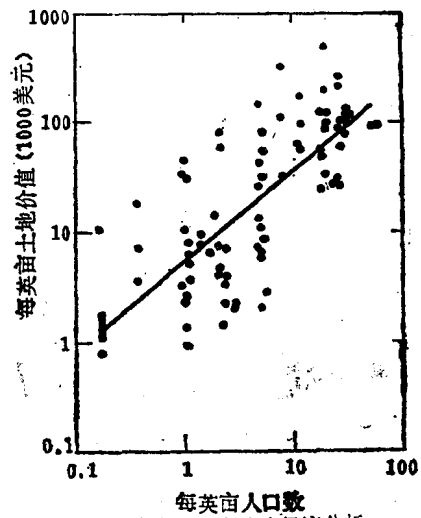


图 1-15 公路中的经济分析

1-2-2 来自模型的不完善和估计中误差的不确定性

工程问题中的不确定性，并不全由观测中基本变量的可变性所引起。当某一变量的估值取决于观测数据时，误差就不可避免（尤其是在数据有限的情况下）。有时，这种估值还不如工程师的判断或猜测来得可靠。第二，数学模型或模拟（例如公式、方程、算法、计算机模拟程序等）甚至模型实验都是实际问题的一个理想化的代表，因此总有某种程度的不完善性。这也是构成不确定性的因素之一，有时甚至它比变量本身固有的变化还要严重。总之不论是由什么因素产生的不确定性都需要利用概率论的概念和方法来处理。

§ 1-3 不确定条件下的设计与决策

从以上的示例中可以看到，一项信息不是从一次观测数据便能确定的。那么在工程设计中如何解决这一问题呢？我们可以假定最不利的条件，如规定一个最高的洪水位、取材料试

验中的最短的疲劳寿命等等。根据这些来进行比较保守的设计,从安全的角度来说,这样做是可以的,但肯定投资或成本太大。相反,一个过于经济的设计在某种程度上也许不能保证安全。因此就需要经过权衡得失作出相对合理的决策。当然最优化的设计应当是成本最低、收益最大的设计。如果在提供的资料和计算的模式中含有不确定性的因素,则决策时还必须进行概率的分析。下面就几个方面的工程问题作一些简明的讨论。

1-3-1 机场跑道的规划和设计

设计跑道的关键性因素是路面厚度,它包括各层基础材料和路面材料的厚度。一般说来,路面使用寿命取决于整个的厚度。越厚寿命越长,但投资也越高;反之,厚度越小,初始投资较低,但日后的维修费用就越大。孰优孰劣,只有进行比较分析才能知道,为此就需要知道使用寿命和厚度间的关系。但寿命又是一些其他变量如排水量、湿度、温度、路基的密实度等的函数。由于这些因素都是随机的(见图 1-10)。因此使用寿命就不可能有确定的答案。同样,对于给定的厚度,其总投资额(包括建筑费和维修费)的计算也不能完全置信,必须从概率的概念来考虑。

1-3-2 水文设计

为了保护大片农田免受洪水之灾,在河流与道路的交叉处需要建造涵洞。显然需要首先确定设计流量,它取决于洪水流量,而洪水流量又是该流域的降雨强度和迳流量的函数。如果涵洞设计过大,虽可免除洪泛之虞,但造价太贵,可能造成浪费。反之,则可能农田受损,水土流失。这里也有一个权衡得失,进行比较分析的问题。由于根据降雨强度估算的迳流量不会十分准确,由此推算的最大河流流量也自然具有不确定性。

另外,当选定设计流量后进行涵洞设计,其总投资也至少包括两个方面,即建造费用和由于洪水造成的损失价值,后者又要根据洪水出现的概率来估算。

1-3-3 结构物设计和机器设计

高层建筑设计时必须考虑的风压是一个随机变量,而建筑材料的强度也是一个随机变量,从而结构物的强度也是随机变量。即使对于这样大大简化了的理想情况,也还要考虑“如何设计才算安全?”这一问题。这在理论上就是一个所谓**风险概率**的问题。

以海洋平台设计为例,需要考虑可能出现的台风压力。其中必须分析两种随机因素:台风的出现是随机的;出现了台风,平台遭到破坏又是随机的。台风的强度越大,出现的频率越小,因此如果按强度很大的台风来设计,则有可能在结构物的使用寿命期限内,没有机会出现如此强度的台风。显然,选择多大强度的风力作为设计的依据又是一个比较分析的问题。

结构物和机器的构件往往要承受反复荷载,构件的疲劳寿命(即直到构件破坏为止重复荷载作用的次数),即使如图 1-5(图中虚线表示概率密度)所示那样在固定振幅的荷载反复作用下,也是随机的。因此,构件的使用寿命在某种程度上也是不可预测的,我们必须根据所要求的使用寿命和可靠度来设计。当然是所要求的寿命越短,其相应的可靠度越大,疲劳寿命也是应力的函数,一般应力越大,寿命越短。设计时也应权衡得失,比较分析,以找出最佳的设计方案。

1-3-4 土工设计

土壤的性质本身是非均匀的,而天然的沉积又是由各种物质以不规则的层次构成的(例如粘土、淤泥、砂、砾石等等),其密度、含水量等相差很大。这些都影响土的强度和压缩性。另一方面,各类岩石也具有不同的承载力。

在设计地基基础时,必须知道土的承载力,这通常是根据地质资料和土样试验来确定的。

由于天然土本身的非均匀性以及土与岩石的沉积的不规则性,因此在整个地基基础范围内各点的承载力也不一致。如根据有限个抽样试验结果来估算,则显然具有相当程度的不确定性。不合理的设计,其结果不是过于保守,就是安全度不够。于是又牵涉到需要利用概率的知识进行比较分析。

1-3-5 施工规划与管理

工程施工中不确定的因素很多,有些难以控制。如工程的施工期限取决于劳动力和设备的供应及其工作效率,此外还与天气以及材料供应有关。这些因素没有一个是完全可以预测的。从而每一道工序乃至全部工程的施工期限都无从精确估计,所以工期也是一个随机变量。对工程进行投标时,如将工期估计过长,则必造价过大,从而影响到中标的机会。反之,虽易中标,但可能亏损。因此又应根据概率论进行决策,就是说按照预先选定的概率所对应的工期来确定投标的价目。

1-3-6 摄影测量、大地测量和平面测量

不论哪种测量都有误差,它可分为两类:系统误差和偶然误差,前者可以通过计算或修正的方法予以消除或减小。而偶然误差是每一测量中所固有的,只有根据概率论进行分析、估计,从而确定测量的精度。

虽然可以采用精密仪器和较好的施测方法来提高测量的精度,但其中却包含一个比较分析的问题。如果为了提高一点精度却大大增加了投资,是否值得,就要看工程本身的重要性和造价了。

§ 1-4 控制与标准

为了保证产品或工程质量,常需进行检验。检验标准太严,实际上可能难以达到,或者即使达到而成本太高。反之,如标准过低,则质量不能保证。假如质量控制的因素或设计的变量是随机的,则必须根据概率论来确定一个比较合理的验收标准。

如在验收土坝工程时,应顾及土壤密度的变化范围,根据其频率分布来确定一个验收标准。

为了控制水质,最常用来鉴定污染程度的参数为河水中溶解氧(DO)的浓度。如图 1-11 所示。近年来许多环境工程学家应用概率分析的方法处理污染问题,如有人提出下列标准:

连续七天测得的(DO)浓度必须满足:(i)任一天的 DO 浓度低于 4mg/l 的概率小于

0.20; (ii)任一天 DO 浓度低于 2mg/l 的概率小于 0.1, 而连续几天低于 2mg/l 的概率小于 0.05。

由上可见, 质量控制中需要概率和统计。以下我们就逐步介绍概率的基本概念。

§ 1-5 事件与概率

1-5-1 概率问题的特征

从前面的讨论中看到, 当谈及概率时, 总是牵涉到某一事件相对于其他事件的发生 (或出现)。换句话说, 将要发生的事件至少有一种以上的可能性, 或者说可能发生的事件不止一种, 否则问题将是确定性的了。概率即是某一事件的发生相对于一切其他事件的发生的数量的量度。因此构成概率性问题的先决条件是必须明确问题发生的所有可能性, 即所谓可能性空间以及该空间的事件。概率总是在一特定的可能性空间中与某一特定事件相联系的。为了能正确地提出问题, 先看下面的例子。

例 1-1 某工程承包商欲购置推压机, 按以往经验, 有 50% 的推压机在六个月以内不发生故障。今有三台推压机, 问其中只有一台机器可以使用到六个月的概率是多少?

解 首先我们知道能正常运转六个月以上的推压机数为 0, 1, 2, 3; 因此这四个数就构成了六个月后尚能运转的推压机数目这一事件的可能性空间。然而各种可能情况的概率还不能直接从“每台推压机使用寿命至少为六个月的机会为 50%”这一信息来确定。为此, 与所论问题有关的可能性空间还必须从每台推压机六个月以后的可能情况来推算。

今以 G 和 B 分别表示每一推压机六个月以后能正常运转和不能正常运转的事件。则三台推压机所可能出现的情况为 GGG; GGB; GBB; BBB; BGG; BBG; GBG; BGB 等八种情况。因为各部机器的运转情况是相互独立的, 因此这八种情况 (事件) 是等可能的互斥事件 (所谓互斥就是两种情况不可能同时发生)。依题意, 这八种情况所构成的可能性空间中只有 GBB, BGB 或 BBG 相当于“只有一台机器运转”这一事件, 因此所求的概率为 $\frac{3}{8}$ 。

例 1-2 今欲在公路交叉口处设计一向左转弯的候车道, 如图 1-16 所示。为了确定候车道的长度, 需要知道五辆或五辆以上汽车等待向左转弯的概率。为此曾观测了两个月得到 60 个高峰时间的数据如下

车 辆 数	观 测 的 次 数	相 对 频 率
0	4	4/60
1	16	16/60
2	20	20/60
3	14	14/60
4	3	3/60
5	2	2/60
6	1	1/60
7	0	0
8	0	0
:	:	:

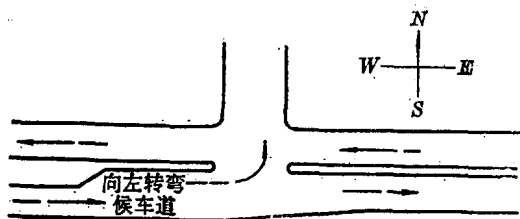


图 1-16

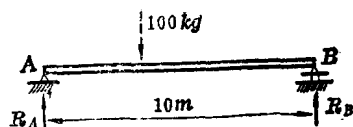


图 1-17

解 理论上等候向左转弯的车辆数为任意正整数,可是从观测结果来看,最多只有六辆车等候向左转弯。根据以上结果可以将第三栏中的相对频率看成概率,于是不难得到有五辆以上车辆等候向左转弯的概率为

$$\frac{2}{60} + \frac{1}{60} = \frac{3}{60}$$

例 1-3 图 1-17 所示的简支梁 AB 上有 100 kg 的荷载等可能随机地置于梁上任何位置,因此支承点 A 处的反力 R_A 可以是 0 到 100 kg 之间的任何数值,从而 R_A 的可能性空间为 $[0, 100]$ 。

如果我们关心的量 R_A 发生在某一范围,如 $(10 \leq R_A \leq 20 \text{ kg})$ 或 $(R_A > 50 \text{ kg})$ 这一事件,则可以认为该事件发生的概率正比于区间的长度。如

$$P(10 \leq R_A \leq 20) = \frac{10}{100} = 0.10, P(R_A > 50) = \frac{50}{100} = 0.50$$

由上述例题可以看到以下有关概率问题的特征:

1. 每一问题都对应于一个可能性空间(其中包含一个以上的事件)。而事件是由可能性空间中一个或几个可能的结果所组成;
2. 一个事件的概率取决于给定的可能性空间中每一个结果发生的概率,并且可以从基本结果发生的概率算出。

1-5-2 概率的计算

要计算一个事件的概率,对于每一基本结果出现的可能性规定一个尺度是必要的。这种规定可以根据以往的条件、一定的假定或实验观测等等。

例 1-1 和 1-3 中,概率是根据以前的假定,而例 1-2 则是根据观测结果。

这里要指出的是,我们把概率看成是一种尺度是完全从应用的观点出发,用以建立某些不确定性问题的数学模型,这如同在工程设计中应用所谓安全系数而不考虑它的现实的意义。再则,上述的基本规定必须适当,假定必须合理。如果是以观测数据的相对频率作为基础,当数据有限时,相对频率的适用范围也应有所限制。此外,还可以将直观的或主观假定与实测数据结合起来计算概率,这种联系的桥梁是 Bayes 定理,其相应的方法将在第七章中讨论。

§ 1-6 集合论基础

概率性问题的许多特性可以利用集合的概念和概率的数学理论来模拟,为此扼要地介绍