动态测试理论与应用

蒋洪明 张 庆 主编

东南大学出版社

动态测试理论与应用

蒋洪明　张庆　主编

东 南 大 学 出 版 社

4

出版说明

书籍是人类进步的阶梯。教材是教师教学成果的结晶,应是书籍中的珍品。一本好的教材,哺育和影响一代乃至几代人。东南大学一贯重视教材建设工作。近一个世纪来,一批一批的优秀教师写出了一批批优秀教材。据不完全统计,数十年以来,东南大学编写出版了近千种教材,并且在从 1989 年开始的三届全国优秀教材评选中,共有 82 种教材获奖,获奖数居全国高校前列。这一成果也是使得东南大学成为全国首批本科教学工作优秀学校的一个重要支撑条件。

面对即将到来的 21 世纪,东南大学将更加重视人才培养,重视本科教学和研究生教学,重视教材建设。2002 年,东南大学将迎来建校 100 周年的盛大庆典。为了以实际行动迎接这一节日的到来,学校决定,到 2002 年出版 100 本高水平教材,并且在政策上给予大力扶持。经过慎重的讨论和评审,规划工作已经完成,正在逐年落实出版。从今年起,将有一批面向 21 世纪、体现东南大学教学改革成果的教材陆续面世。我们高兴地看到,中国高等教育的教材园地将更加绚烂多彩。

东南大学教学委员会

1998 年 8 月

4

前　言

本教材是经东南大学教学委员会慎重讨论和评审确定的重点建设教材，是为建校100周年而出版的100本高水平教材之一。

《动态测试理论与应用》是测控技术及仪器专业类的一门技术基础课，通过本课程的学习，学生将初步掌握动态测试技术的基本理论知识，并掌握分析、设计测试系统及其装置的初步技能。

《动态测试理论与应用》是一门综合性的技术基础课，涉及到电子学、自动化科学、机械学、信息科学及计算机科学等多门学科，内容丰富。考虑到传感器及调理电路、检测技术等已单独设课讲授，本书主要介绍测试信号分析与处理以及测试系统的基本知识。另外，根据多年来的教学实践以及现代测试技术的飞速发展，计算机在测试技术中的应用其发展十分迅速，因此，在课程内容的安排上偏重数字化测量技术及信号的数字化处理与分析。

《动态测试理论与应用》也是一门与工程实践紧密联系的课程，课程的教学安排包括两方面的内容，即课堂教学与实践教学。课堂教学主要讲授本课程的理论知识及其基本概念，注重理论分析方法的培养；实践教学主要通过实验和上机加深学生对课堂知识的理解，熟悉工程实践中的信号处理方法，信息的提取、分析与应用的方法，注重工程实践能力的培养。为此，本课程为实验教学设计了信号处理及其应用的实验模块，可进行数据采集、处理与分析，测试系统分析和处理软件设计等。

本书由蒋洪明、张庆主编。全书共分五章，参加编写的有蒋洪明（绪论、第三章中的第1,2,3,4节）、张庆（第四章中的第3节、第五章）、倪江生（第一章、第三章中的第5节、第四章中的第1,2节）、李建清（第二章）。本书由上海交通大学张炎华教授主审。

本书在编写过程中参阅了本校和兄弟院校、厂、所的有关教材及文献资料，在此表示衷心的感谢。

《动态测试理论与应用》一书荣幸地被列入东南大学重点教材出版，出版经费得到学校的资助，充分体现了我校对教材建设的重视和支持。

《动态测试理论与应用》内容涉及的学科众多，而作者学识水平有限，书中难免存在欠妥之处，恳请读者批评指正。

编者

1998年6月

目　录

绪　论 …… (1)
0.1　动态测试的基本概念 …… (1)
0.2　动态测试中的信息与信号 …… (1)
0.3　动态测试理论与应用的研究内容 …… (3)
0.4　动态测试理论与应用在工程测控技术中的地位 …… (3)
1　测试信号分析基础 …… (5)
1.1　信号的分类 …… (5)
1.2　随机过程的基本知识 …… (9)
1.3　信号的时域分析 …… (17)
1.4　信号的频域分析 …… (28)
2　测试系统分析基础 …… (44)
2.1　系统的分类 …… (44)
2.2　系统的数学模型 …… (47)
2.3　测试系统的基本特性 …… (59)
2.4　常见的典型系统 …… (75)
3　数字信号处理基础 …… (87)
3.1　信号的数字化 …… (87)
3.2　离散傅里叶变换(DFT) …… (92)
3.3　快速傅里叶变换(FFT) …… (98)
3.4　z 变换 …… (105)
3.5　数字滤波器 …… (113)
4　信号的复原与处理 …… (130)
4.1　信号复原 …… (130)
4.2　信号预处理 …… (137)
4.3　信号的数字化处理方法 …… (140)
5　信号的数字分析方法及其应用 …… (156)
5.1　概念密度分析 …… (156)
5.2　相关分析 …… (159)
5.3　功率谱密度分析 …… (167)
5.4　倒频谱分析 …… (172)
5.5　频率细化分析 …… (177)
参考文献 …… (182)

绪　论

动态测试理论与应用是信息科学的一个重要分支。随着现代科学和社会生产的飞速发展,随着快速傅里叶变换(FFT)理论的产生,随着微电子技术的发展,信号分析和处理的高速器件的生产及其算法的不断完善,已建立了较为成熟的动态测试理论和应用技术。动态测试在工程领域中得到了广泛的应用,已成为指导人们从事科学研究的重要工具。对它的研究与发展有力地推动了测试工程和智能仪器仪表系统中的测控技术的更新。它和传感器技术、自动控制技术、计算机技术一样,已成为测控技术及仪器类专业不可缺少的重要的技术基础理论,成为研究测控技术及其装备的重要工具。

0.1　动态测试的基本概念

动态测试是人们借助测试系统检测表现事物不断运动着的物理信号,通过分析和处理获取事物运动的状态信息及其量值。

在科学实验、工程实践和生产活动中,人们不断地通过测试来寻找反映信息内容的各种各样的信号,来判断事物运动的特征和本质,使之为科学研究、工业生产、国民经济、市场流通和人体健康等方面服务。例如,通过仪器记录到的心电图可得到反映人体心脏跳动状态的多个参数,即可获得人体心脏运行正常或病兆的信息;借助高速粗糙度测量仪和装在刀架上的位移计进行实时测量与分析,取得的信息可用来研究刀具和工件之间的相对振动对表面粗糙度的影响;利用加速度计和 FFT 分析仪测量轴承的振动,通过频率分析可提供轴承质量评定和故障诊断的信息;在工业自动化过程控制中,借助于传感器,测量液位、压力、温度、流量等参数信息,使系统调整到最佳的控制状态或生产状态;通过传感器测量大地脉动对大型建筑物产生的响应,来分析大型建筑物的固有频率信息等。

按被测参量的状态测试可分为静态测试和动态测试。静态测试是指被测参数变化达到稳态时的测试;而动态测试是对参量不断变化着的动态过程作连续测试,因此动态测试总是表现为随变量(时间、长度、温度等)而变化的过程。

尽管动态测试的每一瞬时测量值(数据)为一确定值,但动态测试数据并非瞬时测量值的积累或罗列,因为其相邻瞬时的数据不是孤立无关的,恰恰相反,相关性才是动态测试数据的本质特性。

0.2　动态测试中的信息与信号

客观世界中存在着各式各样的运动。这些运动都有其具体的、实在的内容,它客观上反映了事物运动的特征和本质,通常称事物运动的内容为信息。一般情况下,信息可理解为消息、情报或知识。当然这些很不确切,但它说明了信息的重要性。在当今社会里,有各种各样的信息,如经济信息、工业信息、市场信息、军事信息、工程信息等。谁掌握了这些信息,谁

就有了控制这些领域发展、变化的能力。企业家就能获得更多的利润、积累更多的资本;军事指挥家就能知彼知己,取得战争的胜利;工程师就能正确实施技术路线,取得工程技术的成果等等。这一切都说明了获得信息的重要性。

人们对“信息”下过许许多多的定义,但都未能得到普遍的公认,取得一致的认识。控制论的创始人之一,美国科学家维纳在1948年的著作中指出“信息就是信息,不是物质,也不是能量”。后来他又提出一种新的看法:“信息就是人与外界互相作用的过程中互相交换的内容的名称”。信息论奠基人——美国科学家山农,在1948年把信息定义为熵的减少。即把信息定义为“能够用来消除不定性的东西”,因为熵是不定性的量度,熵的减少就是不定性的减少。意大利科学家朗格定义:“信息是事物之间的差异,而不是事物的本身”。从种种定义来看,信息是比较抽象的,对于它的研究还在不断深入,期待着完全揭示其本质程度的到来。但从哲学的观点出发,信息就是“事物运动的状态和方式”,即事物运动的状态和方式就是信息。这里的“事与物”是泛指一切的,既包括物质的,也包括精神的。“运动”也是广义的运动,即宇宙中一切事物都在运动,绝对静止的事物是没有的。

把信息定义为事物运动的状态和方式,它从正面阐明了“信息是什么”,基本统一了各种定义的说法。事实上,维纳所说的“人与外界互相交换的内容”正是外界事物的运动“状态”与“方式”和人的思维“状态”与“方式”。山农所说的“能够用来消除不定性的东西”也正是事物运动的状态和方式,因为“不定性”就是指事物运动的状态和方式具有不确定性,即不知道事物以什么方式处于什么样的运动之中。一旦信息获得,不确定的东西就消除。朗格所说的“差异”就是事物运动在状态和方式上的表现不一致。例如,所谓某台机器故障是指与机器正常状态和方式之间存在着差异,一旦找出表征差异的状态和方式,即信息,故障也就确定。由以上看出来,状态和方式比“互相交换的内容”、“不确定性”和“差异”更能明确信息的基本概念。

上面已谈到通过测试可获得有关对象的状态、运动和特征等方面的信息。对于工程物理系统来说,信息是客观存在的。表征系统运动状态的信息,有些是可以直接测到的,但还有一些却不能直接检测到。例如,电机转子的不平衡量的大小及其分布的信息就不易直接检测到。然而,这种不平衡状态在回转时支承将受到附加的动态力,并引起振动。用传感器检测支撑的动载荷或振动信号,再经过加工处理就可得到不平衡的大小及其角度位置信息。再如,表征物理系统动态特性信息,只有通过对外界激励和系统响应的测试才能获得。被研究对象的信息是很丰富的,通常只能根据动态测试的目的和要求,获取有限的、测试者感兴趣的某些特征信息。

振动系统中要想得到的振幅、频率和相位;单自由度系统中人们感兴趣的固有频率、刚度和阻尼比;控制系统中传输的数据和指令等都是信息。信息总是通过某些物理量的形式表现出来,这些物理量就是信号。为了便于转换和传递,通常借助于传感器或特定的转换设备把信息转换成信号。正如加速度计将振动信息变成电信号,通过分析处理就可得到振动的强度和频率。

信息是信号的具体内容,信号携带着信息,因此信号就成了信息的载体,是信息的物理表现形式,是信息的函数。例如函数 $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$,这里 $x(t)$ 是信号,而 A、ω、φ 就是信息,它反映了物理系统的状态与特征。

一般来说,对于任何一个信息,总可以找到多种形式与其对应的信号,这种信息表现形

式的多样性为测试技术提供了极大的灵活性和多种采集方法。例如，物体受热这一信息其表现形式可以是“温度上升”、“体积膨胀”、“导磁率”或“电导率”的变化、“红外辐射强度”增强，也可以是热电偶产生的热电势等等。因此，同一种信息可以有多种转换形式。

信号中虽然携带着信息，但并非都是我们需要的信息，其中也往往含有不感兴趣的其它信息，它相对于有用信息来说，就是“干扰”或“噪声”；而在另一种场合，它可能就是有用信息。如齿轮噪声对生活环境是一种“污染”，是干扰，但齿轮噪声是齿轮副传动缺陷的一种表现，当它用来评定齿轮副运行状况或作为故障诊断时，齿轮噪声中就含有有用信息。动态测试的任务就是从信号中提取有用的信息。

0.3 动态测试理论与应用的研究内容

动态测试理论与应用主要研究信号分析与处理的理论、方法及其应用技术，其目的是为了获取有用信息，研究对象的运动状态和特性，正确地分析、判断和解释系统所发生的现象或激励对系统的响应。从广义上讲，它涉及到试验设计、模型理论、信号变换和传输、误差理论、控制工程、系统识别和参数估计等科学知识。因此它是多种基础理论的综合应用。本书将在测试信号分析基础中，研究信号的分类、信号在时域和频域中的特征及其分析方法；在测试系统分析基础中，介绍一般系统的分类及其数学描述方法，通过系统的输入、输出或状态变量来研究系统的动特性和系统的分析方法；在数字信号处理基础中，介绍现代数字信号处理的数学基础，包括离散傅里叶变换和快速傅里叶变换、z 变换和系统函数以及数字滤波器的设计等；在信号的复原与处理中，抓住信号的特征，讨论信号复原的多种方法和各自的特点及其应用场合，研究信号的数字化处理方法；在信号的数字分析方法及其应用中，着重研究测试信号的几种特征量的典型的数字分析方法并介绍它们的主要应用，包括概率密度分析、相关分析、功率谱密度分析、倒频谱分析和频率细化分析技术等。本书重点是测试信号的数字化分析理论与方法，而模拟信号分析是数字信号分析的基础，系统是信号传输的通道和激励的对象，或者说是通过信号分析来研究的对象。因此在本书中，信号与系统是紧密相连的，是相辅相成的。

0.4 动态测试理论与应用在工程测控技术中的地位

随着工业生产节奏的不断提高以及人们对产品质量的高要求，动态测试理论在测控技术中得到了广泛应用。具体地说，它应用于在线检测与过程控制、工况监视与故障诊断、系统（产品）的结构设计与动态分析、产品的质量评定与控制、可靠性预测与管理、噪声与振动控制、地震预测预报研究、生物电信号分析、语音分析等等。

例如，在自动化生产的过程控制中，容器的压力、温度、流量等控制参数的检测，物料配比量的检测等，对过程的优化控制、产品质量、安全生产都具有非常重要的意义；机械柔性制造系统中，工件几何尺寸检测、工件表面质量检查、刀具磨损与补偿、刀具的崩裂检测与报警是制造系统不可缺少的手段；又如，近年来出现的“自适应机械加工”，通过检测加工中各种工艺参数和加工条件所发生的变化（刀尖温度、主轴扭矩、振动、表面粗糙度等）信号进行反馈控制，自动调节这些参数在最佳状态下工作。这一切都要借助于信号分析与处理来完成。

在现代工程设计中，往往借助于测试信号分析与处理技术对工程结构模型进行动态特性分析，作出评价，为工程结构的改进设计或动态设计提供依据。

在机械振动监测和故障诊断中，通过信号分析与处理技术从振动和噪声中提取系统参数变化的特征信息，来判断动态数据的性质，监测、预测和诊断工况过程与系统的状态，以达到预防故障发生的目的。

在可靠性管理中，对测试信号分析与处理是其中不可缺少的一个环节，例如，飞机发动机可靠性管理，首要的任务就是对发动机进行动态测试与故障诊断。为此，在飞机上安装了由 100 多种传感器构成的“飞机数据采集系统(AIDS)”，用来采集飞机在飞行时的故障预兆的数据和正常状态下的数据，并及时地把它记录在磁带上，以便回地面后进行信息处理，取得发动机主要监测参数的状况、构成的发动机各部分性能的分析结果和可靠性预测诊断报告。根据预测诊断结果对发动机采取对策和措施，从而促进对发动机可靠的维护和管理。

由上述例子可以看出，动态测试理论所研究的内容是工程测控技术中的重要基础技术，其在工程测控中的地位和作用是显而易见的。随着工程测控技术的不断深入发展，其应用的范围将越来越广泛，所起的作用愈来愈大。

1 测试信号分析基础

信号是信息的载体，它包含着所研究物理过程的有关信息，是人们认识客观物质运动的内在规律、研究各个物理量之间的相互关系、预测未来的重要依据。因此必须透彻地了解和研究信号的各种属性。

本章首先简要概述了信号的分类，介绍了随机过程的基础知识，然后讨论了如何从时域和频域两个方面来描述确定性信号和随机信号以及它们所具有的性质。

1.1 信号的分类

在数学上，信号可以表示成一个或几个独立变量的函数。本书中，为了讨论方便，一般将其作为时间的函数来研究，如果需要，也可以用任何其它的独立变量来代替时间。

通常，信号可分为静态信号与动态信号两大类。不随时间而变化或变化十分缓慢的信号，称为静态信号。反之，随时间明显变化的信号称为动态信号。

信号的静态或动态不仅取决于被测量本身是否随时间而变化，还与测量方法及测量系统有关。例如，工件加工后的表面粗糙度，在一个短时间内不随时间而变化，当用双管显微镜测量时可以认为是一种静态信号；但当用电动轮廓仪测量并通过记录仪描述其轮廓波形时，则是一种典型的动态信号，它可表示为一个二元空间变量的高度函数，此时独立变量为表面各点的平面位置（坐标），这便是所谓的静物动测。

为了深入了解信号的物理实质，下面讨论几种常见的分类方法。

1.1.1 连续时间信号与离散时间信号

(1) 连续时间信号

在所讨论的时间间隔内，对于任意时间值，除若干个第一类间断点外，都可给出确定的函数值，此类信号称为连续时间信号。

所谓第一类间断点，应满足条件：函数在间断点处左极限与右极限存在；左极限与右极限不等，$x(t_0^-) \neq x(t_0^+)$；间断点收敛于左极限与右极限函数值的中点。正弦、直流、阶跃、锯齿波、矩形脉冲、截断信号等等（图 1 - 1）都称为连续时间信号。

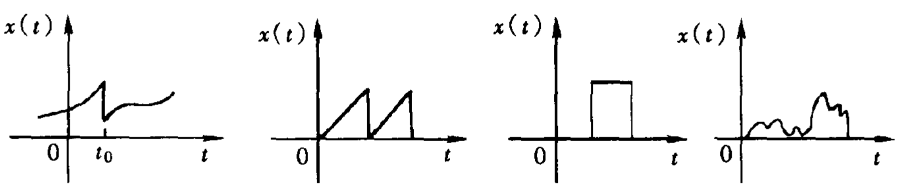


图 1 - 1 连续时间信号

连续时间信号的幅值为连续值时，称为模拟信号。

(2) 离散时间信号

离散时间信号又称为时域离散信号或时间序列，它在所讨论的时间区间内的各个不同瞬时给出函数值。

离散时间信号也可分为两种情况：时间离散而幅值连续时，称为采样信号；时间离散而幅值量化时，则称为数字信号。

离散时间信号可以从离散信号源直接产生，也可以是由连续时间信号采样得到。

典型离散时间信号有单位采样序列、阶跃序列、指数序列等。

单位采样序列用 $\delta(n)$ 表示，定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}0, & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases}$$

此序列在 $n=0$ 处取单位值 1，其余点上都为零(图 1-2(a))，单位采样序列又称为克罗内克(Kronecker) δ 函数。它在离散时间系统中的作用，类似于连续时间系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$。但是，应注意它们之间的区别，$\delta(t)$ 可理解为在 $t=0$ 点冲激宽度趋于零，幅度为无限大的信号；而 $\delta(n)$ 在 $n=0$ 点取有限值 1。单位延时 $\delta(n-1)$ 和 k 延时 $\delta(n-k)$ 分别如图 1-2(b) 和(c) 所示。

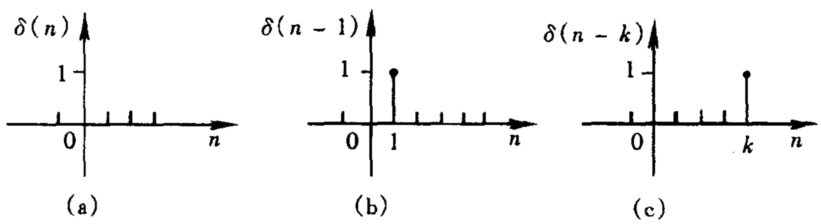


图 1-2 单位采样序列

单位阶跃序列 $u(n)$(见图 1-3) 定义为

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

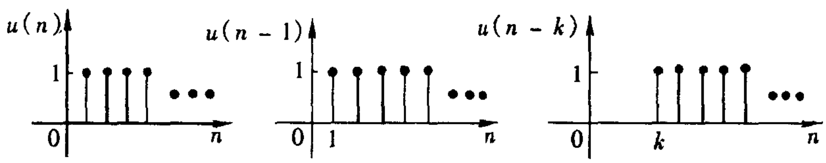


图 1-3 单位阶跃序列

单位阶跃序列与单位采样序列之间的关系为

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k) \tag{1-1}$$

或

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{1-2}$$

任意序列都可以表示为延迟单位采样序列的幅值加权和，即

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(n-k) \tag{1-3}$$

例如，$x(n) = a_{-5}\delta(n+5) + a_{-2}\delta(n+2) + a_{-1}\delta(n+1) + a_3\delta(n-3)$，可用图 1－4 表示。

1.1.2 确定性信号与随机信号

(1) 确定性信号

可以用明确的数学关系式描述的信号称为确定性信号。它可以进一步分为周期信号、非周期信号与准周期信号。

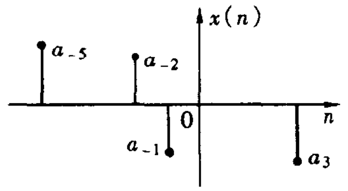


图 1－4　序列表示为各延迟单位采样的幅值加权和

周期信号是经过一定时间可以重复出现的信号，满足条件：

$$x(t) = x(t \pm nT) \qquad (1-4)$$

式中，T—— 周期，$T = 2\pi/\omega_0$；$n = 0, \pm 1, \cdots$；ω_0—— 基频。

例如，机械系统中，回转体不平衡引起的振动，往往是一种周期性运动。

周期信号在一个周期内的变化情况足以表征它在全部时间域内的特性。

正弦周期信号是最典型的周期信号，它可以表示为

$$x(t) = X\sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad (1-5)$$

式中，X—— 振幅；ω_0—— 角频率，$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$；$T$—— 周期；$\varphi$—— 相对于时间原点的初始相角。

凡能用明确的数学关系式描述而无周期性的信号统称为非周期信号，如图 1－5 所示。非周期信号往往具有瞬变性。例如，锤子的敲击力，承载缆绳断裂时的应力变化，热电偶插入加热炉中温度的变化过程等信号均属于瞬变非周期信号。

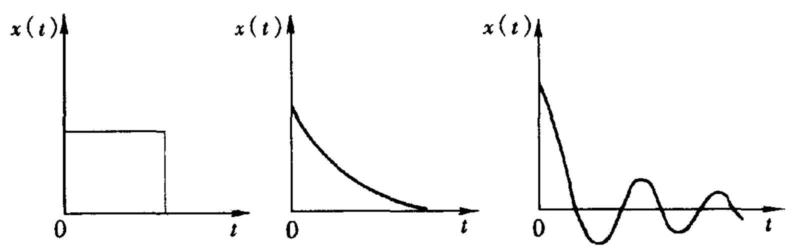


图 1－5　瞬变非周期信号

周期信号可简化为一系列频率成比例的正弦信号。反之，两个或几个频率成比例的正弦信号叠加起来，将组成一个周期信号。

确切地说，只有每一对频率之比都是有理数时，两个或几个正弦信号的叠加才是周期信号。

当任意频率的两个或多个(频率之比不全为有理数)正弦信号叠加起来，一般不是周期的，而是具有“准周期”的特性(基本周期无限长)。例如，$x(t) = X_1\sin(3t + \varphi_1) + X_2\sin(5t + \varphi_2) + X_3\sin(\sqrt{72}t + \varphi_3)$ 就不是周期性的。准周期信号可用如下的时变函数表示：

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \qquad (1-6)$$

式中，ω_{n1}/ω_{n2} 在任何情况下都不全等于有理数。准周期信号的一个重要特点是，式(1－6)可

用离散频谱来表示，这与复杂周期波类似。

准周期信号往往出现于通信、振动系统。例如，不同独立振源激起的系统响应，往往属于这一类。

(2) 随机信号

随机信号不能用明确的数字关系式来描述，无法预测未来时刻的精确值。这类信号在性质上是随机的，只能用概率术语和统计平均来描述。例如，轮机工作时所产生的振动；船舶在海洋中的漂移；树叶的随风飘荡等。

各种动态信号究竟是确定性的还是随机的，在许多场合是有争论的。真正确定性的信号和真正随机的信号都是不存在的。在实践中，判断信号是确定性的还是随机的，通常以实验能否重复产生这些信号为依据。如果一个实验，能够重复许多次得到相同的结果(在实验误差范围之内)，则一般可以认为这些信号是确定性的。如果不能设计一种实验，重复进行以后，产生相同的结果，则一般认为这些信号是随机的。

1.1.3 能量信号与功率信号

(1) 能量信号

在所分析的区间$(-\infty,\infty)$，能量为有限值的信号称为能量信号，它满足条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\mathrm{d}t < \infty \tag{1-7}$$

在区间(t_1,t_2)内消耗在电阻上的能量用电压表示为

$$E = \int_{t_1}^{t_2} \frac{U^2(t)}{R}\mathrm{d}t \qquad [\mathrm{W \cdot s}] \tag{1-8}$$

用电流则表示为

$$E = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)\mathrm{d}t \qquad [\mathrm{W \cdot s}] \tag{1-9}$$

当 $R = 1\Omega$ 时，两式具有相同形式，因而通常就称方程

$$E = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1-10}$$

为任意信号 $x(t)$ 的“能量”，但需注意到，这一关系式中包括了一个带有适当量纲的数“1”。当区间(t_1,t_2)为$(-\infty,\infty)$时，能量为有限值的信号称为能量信号，或称为能量有限信号，例如，矩形脉冲(t_1,t_2)、减幅正弦波$(0,\infty)$衰减指数等信号。

(2) 功率信号

有许多信号，如周期信号、随机信号等，它们在区间$(-\infty,\infty)$内能量不是有限值。此时，研究信号的平均功率更为合适。

在区间(t_1,t_2)内，信号的平均功率

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1-11}$$

若区间变为无穷大时，上式仍然大于零，那么信号具有有限的平均功率，称为功率信号。具体讲，功率信号满足条件：

$$0 < \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\mathrm{d}t < \infty \tag{1-12}$$

对比式(1-7)与式(1-12),显而易见,一个能量信号具有零平均功率,而一个功率信号具有无限大能量。

1.1.4 时限信号与频限信号

(1) 时限信号

时域有限信号是在有限区间(t_1,t_2)内定义,而在此区间外恒等于零。例如,矩形脉冲、三角脉冲、余弦脉冲等。而周期信号、指数衰减信号、随机过程等,则称为时域无限信号。

(2) 频限信号

频域有限信号是指信号经过傅里叶变换,在频域内占据一定带宽(ω_1,ω_2),而在区间外恒等于零。例如,正弦信号、sinc(t)函数、限带白噪声等,为时域无限频域有限信号;δ函数、白噪声、理想采样信号等,则为频域无限信号。

时域有限信号的频谱,在频率轴上可以延伸至无限远。由时频域对称性可推论,一个具有有限带宽的信号,必须在时间轴上延伸至无限远处。因此,一个信号不能够在时域和频域都是有限的。

1.2 随机过程的基本知识

本节中,将首先对概率论基本知识进行简要的概述,然后再引入随机过程的概念。

1.2.1 随机变量的基本知识

在概率论中,将具有下述三个特性的试验称为随机试验。

1° 可以在相同条件下重复地进行。如抛掷硬币试验。

2° 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果。如抛掷硬币结果有正面朝上或背面朝上。

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。如每次抛掷前不能肯定是正面朝上还是背面朝上。

在随机试验中,对一次试验可能出现也可能不出现,而在大量重复试验中却具有某种规律性的事情,称为此随机试验的随机事件。

在一随机试验中,它的每一个可能出现的结果都是一个随机事件。它们是这个试验的最简单的随机事件,这些简单的随机事件称为基本事件。

例如,在抛掷硬币试验中,“出现正面朝上”、“出现背面朝上”就是随机试验的基本事件。

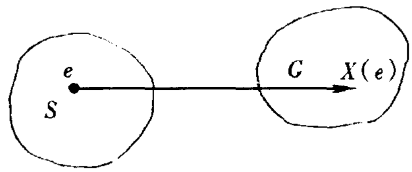
随机试验 E 的所有基本事件所组成的集合叫做该随机试验的样本空间,记为 S。S 中的元素就是随机试验中的基本事件。

(1) 随机变量的概念

设 E 为随机试验,它的样本空间是 $S=\{e\}$。如果对于每一个 $e\in S$,有一个实数 $X(e)$ 和它对应,这样就得到一个定义在 S 上的实单值函数 $X(e)$,称 $X(e)$ 为随机变量。

我们画出以下的示意图。图中 G 表示 $X(e)$ 所能取值的全体。

常用大写字母 $X,Y\cdots$ 表示随机变量,用相应的小写字母 $x,y\cdots$ 表示随机变量的各种不



同的可能值。

随机变量可分为离散型和连续型两类。若随机变量 X 的全部可能取到的值是有限个或可列无限多个,则 X 叫做离散型随机变量。若 X 的可能取值是整个区间任意值,则 X 称为连续型随机变量。例如,掷骰子试验结果是离散型随机变量。放大器的输出噪声电压瞬间值是连续随机变量。

(2) 概率分布函数

设 X 是一个随机变量,x 是任意实数,函数

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} \tag{1-13}$$

称为 X 的分布函数。

若已知 X 的分布函数,我们就知道 X 落在任一区间$(x_1, x_2]$上的概率。从这意义上来说,分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性。

分布函数 $F(x)$ 具有以下的基本性质:

① $F(x)$ 是一个单调非减函数。即若 $x_1 < x_2$,则 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$

② $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$

③ $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

④ $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

⑤ $F(x+0) = F(x)$,即 $F(x)$ 是右连续的。

(3) 概率密度函数

随机变量 X 的概率密度函数 $p(x)$ 为概率分布函数 $F(x)$ 的导数。

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1-14}$$

概率密度函数 $p(x)$ 具有下列性质:

① $p(x) \geqslant 0$,即 $p(x)$ 是非负函数。

② $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1$

③ $P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\mathrm{d}x$

④ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\mathrm{d}x$

X 落在$(x_1, x_2]$的概率 $P\{x_1 < X \leqslant x_2\}$ 等于区间$(x_1, x_2]$上曲线 $y = p(x)$ 之下的曲边梯形面积。见图 1-6。

例 1-1 设具体试验是掷一个硬币。它有两个可能结果,正面和反面。设正反面发生的概率都为$\frac{1}{2}$,而随机变量 $x(k)$ 只取两个离散值 x(正面) 和 x(反面),它们可以规定为任意

实数。例如,令 x(正面) $= a$,x(反面) $= b$,其中 a、b 是满足$b > a$ 的实数。这样选择 $x(k)$ 以后,概率分布函数就成为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{2}, & a \leqslant x < b \\ 1, & x \geqslant b \end{cases}$$

而概率密度函数为

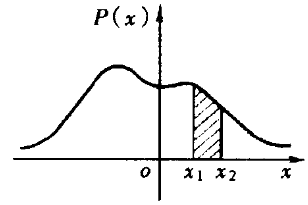


图 1-6　概率密度函数

$$p(x) = \frac{1}{2}\delta(x-a) + \frac{1}{2}\delta(x-b)$$

1.2.2 随机变量的数字特征

分布函数能够完整地描述随机变量的统计特性,但在实际问题中,求随机变量的分布函数不是一件容易的事。而且,在一些问题中,不要求我们去全面地考察随机变量的变化状态,因而并不需要求出它的分布函数,而只需知道随机变量的某些特征。

随机变量的常用数字特征有:数学期望、方差和矩。

(1) 数字期望

设连续型随机变量 X 的概率密率函数为$p(x)$,若积分$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则称积分$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x$ 为 X 的数学期望,记为 $E(X)$。即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x \tag{1-15}$$

数学期望简称期望或均值。随机变量 x 的函数 $g(x)$ 的期望值为

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)\mathrm{d}x \tag{1-16}$$

数学期望的几个重要性质(以下假定所遇到的数学期望都存在):

① 设 C 是常数,则有 $E(C) = C$

② 设 X 是一个随机变量,C 是常数,则有 $E(CX) = CE(X)$

③ 设 X、Y 是任意二个随机变量,则有 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

④ 设 X、Y 是二个相互独立的随机变量,则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$

(2) 方差

设 X 是一个随机变量,若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在,则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差,记为 $D(X)$ 或 $Var(X)$,即

$$D(X) = Var(X) = E\{[X-E(X)]^2\} \tag{1-17}$$

在应用中还引入与随机变量 X 具有相同量纲的量$\sqrt{D(X)}$,记为 $\sigma(X)$,称为标准差或均方差。

对于连续型随机变量,按式(1-15)有

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x-E(X)]^2 p(x)\mathrm{d}x \tag{1-18}$$

其中 $p(x)$ 是 X 的概率密度函数。

方差的重要性质如下:

① 设 C 是常数,则 $D(C)=0$

② 设 X 是一个随机变量,C 是常数,则有 $D(CX)=C^2D(X)$

③ 设 X、Y 是两个相互独立的随机变量,则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(3) 矩

① 原点矩

若 $E(X^k)(k=1,2\cdots)$ 存在,称它为 X 的 k 阶原点矩。即

$$E(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty}x^kp(x)\mathrm{d}x \tag{1-19}$$

一阶原点矩就是 X 的数学期望(见式 1-15),二阶原点矩是 X 的均方值,即

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)\mathrm{d}x \tag{1-20}$$

② 中心矩

若 $E\{[X-E(X)]^k\}(k=1,2\cdots)$ 存在,称它为 X 的 k 阶中心矩,即

$$E\{[X-E(X)]^k\}=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^kp(x)\mathrm{d}x \tag{1-21}$$

一阶中心矩为 $E[X-E(X)]=0$,二阶中心矩即为方差。

③ 混合矩

若 $E(X^kY^l)(k,l=1,2\cdots)$ 存在,称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩,即

$$E(X^kY^l)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^ky^lp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-22}$$

当 $k=l=1$ 时,$E(XY)$ 称为相关函数,则

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-23}$$

当 X 和 Y 不相关,那么

$$\begin{aligned}E(XY)&=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}yp(y)\mathrm{d}y\\&=E(X)E(Y)\end{aligned} \tag{1-24}$$

若 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$ 存在,称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶中心混合矩,即

$$\begin{aligned}&E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^k[y-E(Y)]^lp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{1-25}$$

当 $k=l=1$ 时,$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为 X 和 Y 的协方差,用符号 $\mathrm{Cov}(XY)$ 表示,即

$$\mathrm{Cov}(XY)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y) \tag{1-26}$$

显然,当 $\mathrm{Cov}(XY)=0$ 时,X 和 Y 是不相关的。

若 σ_x^2,σ_y^2 分别是 X 和 Y 的方差,那么定义 X 和 Y 的归一化协方差为

$$\begin{aligned}\rho&=\mathrm{Cov}(XY)/\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2}\\&=\mathrm{Cov}(XY)/\sigma_x\sigma_y\end{aligned} \tag{1-27}$$

ρ 亦称 X 和 Y 的相关系数。显示,$\rho=0$ 时,X 与 Y 不相关。