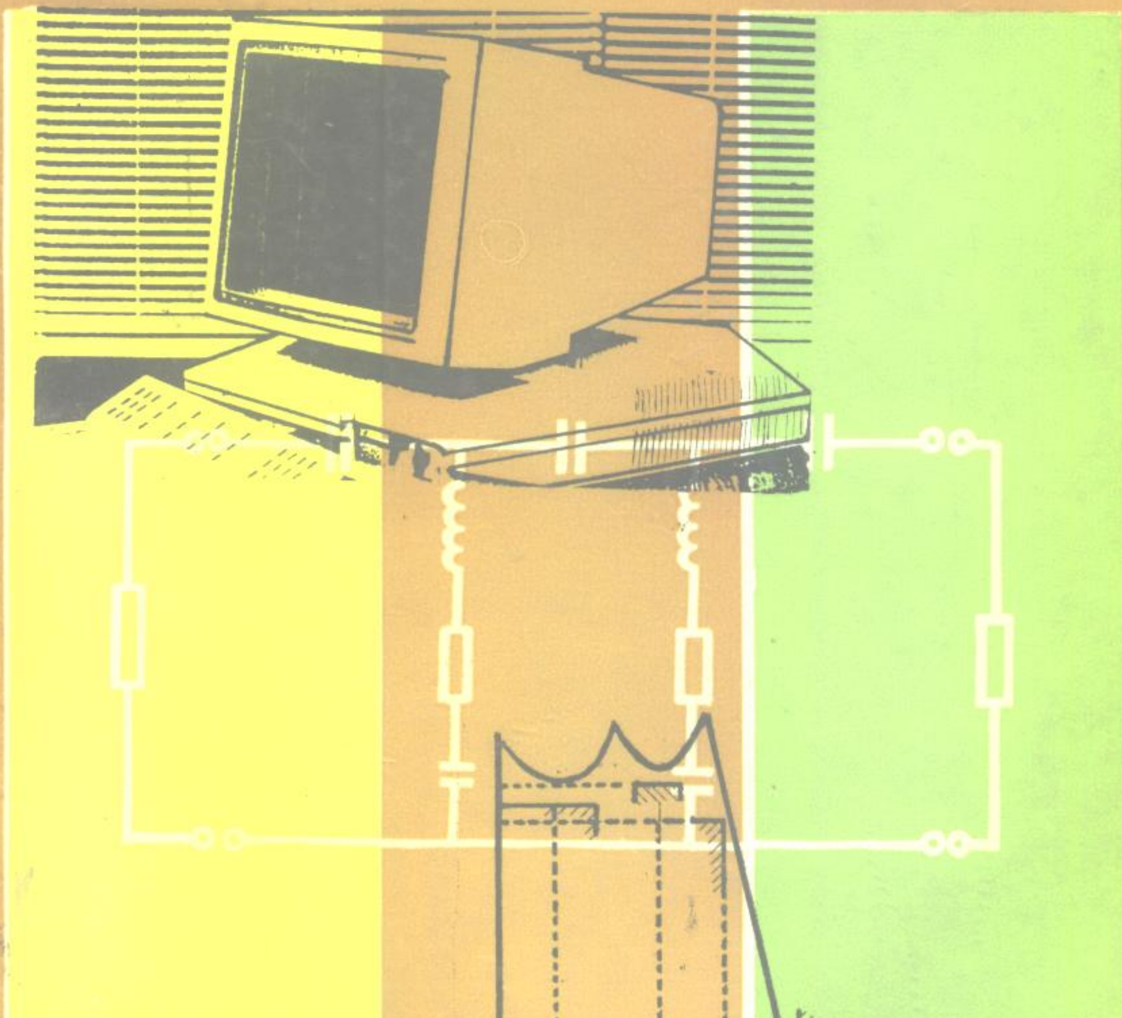
最佳电路设计

王尔智　杨理践　编著



机械工业出版社

最 佳 电 路 设 计

王尔智　杨理践　编著

机 械 工 业 出 版 社

内 容 简 介

最佳电路设计是现代电路设计中利用电子计算机进行最优化设计的一种新方法，与传统的电路设计方法相比较，它不仅能使所设计的电路获得良好的电性能指标，同时可达到良好的经济指标。

本书系统地介绍了近年来发展起来的最佳电路设计的基本理论、基本设计方法及其应用。全书共八章，前四章介绍最优化的基本理论、基本算法。包括：线性规划、无约束问题的最优化方法、约束问题的最优化方法等。其目的在于为讨论最佳电路设计奠定必要的概念和数学基础。后四章系统地讨论了当代最佳电路设计的各类问题，它的理论和设计方法。包括：网络灵敏度分析、电路的经典最佳设计、参数的最佳容差分析与可调参数的设计、电路的统计设计等内容。在本书的附录中附有用于最佳电路设计的二个功能较为完善的程序包，供读者在实际从事最佳电路设计时使用。

本书可作为从事最佳电路设计的工程技术人员、高等学校的有关教师及高年级学生的参考书，也可以作为有关研究生的教材。

最佳电路设计

王尔智　杨理践　编著

●

责任编辑：孙祥根

封面设计：刘　岱

●

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

沈阳市建工印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

●

开本787×1092 1/16·印张30 1/4·字数746千字

1988年12月沈阳第一版·1988年12月沈阳第一次印刷

印数 00,001—4000·定价：13元

●

ISBN 7-111-01614-9/TM·204

前　言

最佳电路设计是60年代末期随着电子计算机的发展和应用而发展起来的一门新的学科。20多年来，经过各国学者的努力，无论在理论上还是在设计方法上都取得了相当丰富的成果。这一学科的发展，一方面给电路的设计与制造带来了显著的技术与经济效益，另一方面对那些无法利用传统设计方法求得设计结果的问题开辟了一个新的途径。

由于科学技术的飞速发展，各种电气、电子设备与系统日益复杂，规模不断扩大，对它们的准确度、稳定性、可靠性、经济性以及其它质量指标的要求愈来愈高。传统的设计方法已不能适应要求。例如对元件参量的限制、元件参数最佳容差的分配、可调元件参数的确定、噪声电平的要求、灵敏度、元件参数的统计分布、成品率等问题在传统的设计方法中不可能得到全面处理。此外，传统的设计方法还不能处理时变网络和非线性网络的设计问题，而最佳电路设计的理论和方法为解决这些问题开辟了一个卓有成效的途径，从而使电路的设计与制造面临一个崭新的局面。

运用最优化方法进行设计的最大优点是它能将对网络的各种要求同时体现在所设计的网络中。当所给定的各种要求互相矛盾时，它能将各种要求进行比较，作出合理的选择，从而获得一个最佳网络。因此，运用最优化方法进行设计不仅能得到传统方法难以达到的良好的电性能指标，而且能达到良好的经济指标。目前运用最优化方法进行网络设计已显示出强大的生命力，成为对大规模网络进行计算机辅助设计的一个重要分支。

近年来，我国虽然已将最优化技术应用到许多领域中，获得了显著的技术与经济效益。但在电路设计方面开展的工作却很少，它的理论和方法尚未被广大从事电路设计的工作者所掌握。随着科学技术的迅速发展和电子计算机的普及应用，掌握最佳电路设计的理论和方法必将成为从事近代电路设计工作者的迫切需要。

目前国内外尚无一本系统地阐述最佳电路设计的专著，本书是作者多年从事最佳电路设计的研究工作，並在搜集，阅读大量有关文献的基础上编写的。其中第一、五、六、七、八章及附录是由王尔智副教授编写的，第二、三、四章是由杨理践同志编写的。

附录中的二个程序包是在CDC6400机上开发出来的，经过多年的实践运行证明，这套程序功能比较完善，运行效率高，实用性强。但在移植到其它类型机上使用时应作适当的修改。

由于作者水平有限，本书的缺点和错误在所难免，诚望广大读者提出宝贵意见。

作　者

1988年9月

目　　录

第一章　最优化的基本概念和数学基础

最优化的问题，涉及如何以最佳可能的方式去解决问题。近年来最优化的技术越来越受到重视，并把它应用到各个领域中去。最优化的理论研究工作，大约在17世纪就已开始，或者说更早些，牛顿已开发了这方面的计算工作。不过，应用最优化理论去解决实际工程问题，还只是近二三十年来，随着电子计算机的发展和普及使用，才得以实现。快速电子计算机为应用最优化的方法求解问题，提供了一个强有力的工具。

如果一个优化问题的解并不随时间而改变，则称为静态优化问题。这样的问题是用称之为数学型模的一组代数方程式来描述的。所得到的解答，当然仅仅是对所建立的模型是最优的。不言而喻，为了使这个解对实际系统是最优的，要求描述这个系统的数学模型，必须尽量地接近该系统的实际特性。

在优化问题中，被求最优值的那个函数称作目标函数。例如，在最佳电路设计中，它可能是滤波器的插入损失、放大器的增益、传输线的反射系数、电力网络传输线的功率损失等。

如果优化问题的解是时变的，则称为动态优化问题。这类问题，一般是用一组含有微分方程或一个可能为积分形式的目标函数来描述的，这类问题不是本书所研究的范围。

在大多数具有实际意义的优化问题中，其解必须同时满足描述系统的模型的约束以及目标函数的极大值或极小值。这类问题称为约束优化问题。对于约束，可以进一步分为等式约束和不等式约束。具有等式约束或不等式约束的优化问题，称为非线性规划问题。对于目标函数及其约束方程均为线性方程式的优化问题，称为线性规划问题。在某些情况下，可能没有约束出现，这类问题称为无约束最优化问题。

§1-1　数学准备

在正式讨论最优化理论前，定义一些表示方法和指出一些有关的数学基本概念是很有必要的。在全书的讨论中，我们将广泛地涉及向量（多变量）的可微函数。同时，除特别声明外，我们将指定函数 $f(\mathbf{X})$ 中，f 为实值可微函数，而$\mathbf{X}$为一n维向量，即

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

并且　$$\mathbf{X}^T=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n] \tag{1-2}$$

如果我们希望提出$\mathbf{X}$是在某一特定点上计得其值，我们将利用它的上标或下标加以

表示。例如，$\mathbf{X}^0$，$\mathbf{X}^1$或$\mathbf{X}^*$均表示变量在特定点上的值。一般用$\mathbf{X}^*$表示最优解。

1． n维欧氏空间

所有n元实值的集合称为n维空间，用E^n来表示。若在这个空间，通常的向量乘法的法则和标量乘法的法则适用，并且如果一个范数或在E^n中两个向量之间的距离定义为

$$\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \tag{1-3}$$

则称该n维空间为欧氏n维空间。在$\mathbf{Y}=0$的情况下，一个向量$\mathbf{X}$的范数或模定义为

$$\|\mathbf{X}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

除非特别指出，一般记为$\mathbf{X}\in E^n$。例如E^1为一实域全体；E^2可以说是本书页的平面，E^3为我们生活的空间等等。对$n>3$的情况是很难从空间上去想象的。

两向量$\mathbf{X}\in E^n$，$\mathbf{Y}\in E^n$的内积$\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$，是由两向量对应的元素相乘积的和求得的标量。即

$$\mathbf{X}^T\mathbf{Y}=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \tag{1-4}$$

如果两向量的内积等于零，即$\mathbf{X}^T\mathbf{Y}=0$，则称这两个向量是正交的。

由内积和向量模的定义直接得出：对所有$\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}\in E^n$

$$\|\mathbf{X}^T\mathbf{Y}\|\leqslant\|\mathbf{X}\|\,\|\mathbf{Y}\| \tag{1-5}$$

上式中的等号仅当对某一标量如果$\mathbf{X}=\alpha\mathbf{Y}$时成立，这一重要关系称为许瓦兹不等式。

表达式

$$\mathbf{X}=\lambda_1\mathbf{X}_1+\lambda_2\mathbf{X}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{X}_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{X}_i \tag{1-6}$$

表示$\mathbf{X}$为n个向量$\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$，…，$\mathbf{X}_n$的线性组合，其中λ_1，λ_2，…，λ_n 为一组标量。如果

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{X}_i=0 \tag{1-7}$$

并且所有的λ_i不全为零，则称向量$\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$，…，$\mathbf{X}_n$为线性相关。如果方程式（1-7）仅当对所有$i=1$，2，…，n，$\lambda_i=0$时成立，则称这组向量为线性独立。

如果E^n中任何一个向量都可以表示为一组向量$\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$，… $\mathbf{X}_r$的线性组合，则定义这组向量张成向量空间E^n。如果向量空间E^n的某些向量的集合S满足条件：（1）S中的向量为线性独立；（2）E^n的任一个向量均可表示为S的线性组合，则称向量集合S为E^n的基。例如$\mathbf{X}_1=(0\ 0\ 1)^T$，$\mathbf{X}_2=(0\ 1\ 0)^T$，$\mathbf{X}_3=(1\ 0\ 0)^T$，$\mathbf{X}_4=(1\ 1\ 0)^T$它们并不构成一个基，而前三个向量却构成一个基，同时又张成三维空间E^3。

不难证明单位向量

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\cdots,\quad \mathbf{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \tag{1-8}$$

彼此是线性独立的。并且n维空间中，一定有n个单位向量，这些向量构成n维空间E^n的基。

给定一个基X_1，X_2，…，X_r和由这个基所张成的空间中的一个向量b，可以用b取代基中的一个向量的方法构成一个新的基。为证明这一结论，我们假设用b取代X_r，并假设这个结论不成立，则必有

$$\sum_{i=1}^{r-1}\lambda_i X_i+\lambda_r b=0 \tag{1-9}$$

并且至少有一个λ应不为零，但根据定义

$$b=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i X_i$$

利用此式消去式（1-9）中的b得到

$$\sum_{i=1}^{r-1}(\lambda_i+\lambda_r\alpha_i)X_i+\lambda_r\alpha_r X_r=0 \tag{1-10}$$

我们注意到，方程（1-9）中λ_r不能为零，否则根据我们的假设，其它的λ中至少有一个必须不为零，这将使得X_1，X_2，…，X_{r-1}线性相关。但是这是不成立的，因为线性独立一组向量中的任何一组子向量，必须也是线性独立的。现在我们假设在方程（1-10）中α_r不为零，从而方程（1-10）中，$\lambda_r\alpha_r$也不为零，然而，这将意味着X_1，X_2，…，X_r为线性相关的。根据假设，这当然是不成立的。于是式（1-9）不成立。从而得出，X_1，X_2，…，X_{r-1}，b必须是线性独立的。并且这组向量构成一个新的基。

2. 凸集与凸函数

凸集、凸函数以及凸函数的极值性质是研究最优化问题所不可缺少的内容。关于局部极小值与全局极小值之间的关系以及最优化方法中的一些重要结论，都是在函数具有凸性质的基础上建立的。

一条在E^n中通过两不同点X_1，X_2的直线定义为点

$$l=\{X|X=\lambda X_2+(1-\lambda)X_1,\text{对所有}\lambda\} \tag{1-11}$$

的集合，其中λ为一标量。如果$\lambda\in[0,1]$，则l表示一条连接X_1和X_2两点的线段。例如，对$X\in E^2$，点X的集合定义一条如图1-1所示的直线。

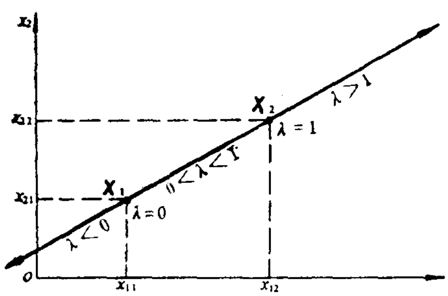


图1-1 直线上的点集

集合$D_0\subset D$称为凸集，若对任意X_1、$X_2\in D_0$和任意实数$\lambda\in[0,1]$使连线

$$\lambda X_1+(1-\lambda)X_2\in D_0 \tag{1-12}$$

例如图1-2中a和b所示的集合为凸集，而c和d为非凸集。E^n中，以$X^*\in E^n$为心的球$D_r=\{X|\,\|X-X^*\|<S\}$是凸集。

凸集具有以下几个基本性质：

（1）若D为凸集，β为一实数，则集合

$$\beta D=\{Y|Y=\beta X,\ X\in D\}$$

是凸集。

（2）若D和B为凸集，则集合

$$B+D=\{X|X=Y+Z,Y\in D,Z\in B\}$$

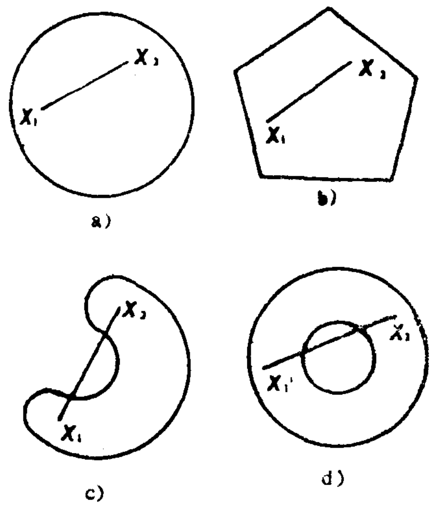


图1-2 凸集与非凸集

也是凸集合。

（3）若D和B是凸集，则集合，$D\cap B$也是凸集。这些定理的证明，可直接由定义出发得到。

若一个集合A为非凸集，则我们可以将它拟定为凸集。这个拟定后所得到的包含A的最小凸集称为A的凸壳。记为$K(A)$，如图 1－3 所示。

在空间E^n中，超平面定义为满足

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=\mathbf{C}^T\mathbf{X}=b \tag{1-13}$$

的点$\mathbf{X}$的集合H　即

$$H=\{\mathbf{X}\,|\,\mathbf{C}^T\mathbf{X}=b,\ \mathbf{C}\neq 0,\ \mathbf{X}\in E^n\} \tag{1-14}$$

其中b为一标量。

很明显，任何一超平面将空间E_n分成两个闭半空间

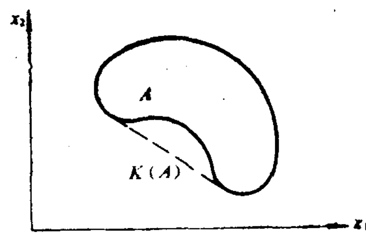


图1-3　集A及其凸壳

$$[H^+]=\{\mathbf{X}\,|\,\mathbf{C}^T\mathbf{X}\geqslant b,\ \mathbf{C}\neq 0,\ \mathbf{X}\in E^n\} \tag{1-15}$$

$$[H^-]=\{\mathbf{X}\,|\,\mathbf{C}^T\mathbf{X}\leqslant b,\ \mathbf{C}\neq 0,\ \mathbf{X}\in E^n\} \tag{1-16}$$

如取$\mathbf{C}^T\mathbf{X}>b$（或$<b$），我们得到两个开半空间

$$(H^+)=\{\mathbf{X}\,|\,\mathbf{C}^T\mathbf{X}>b,\ c\neq 0,\ \mathbf{X}\in E^n\} \tag{1-17}$$

$$(H^-)=\{\mathbf{X}\,|\,\mathbf{C}^T\mathbf{X}<b,\ c\neq 0,\ \mathbf{X}\in E^n\} \tag{1-18}$$

如果$b\neq 0$并且$\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$为满足$\mathbf{C}^T\mathbf{X}=b$的任意两不同点，则

$$\mathbf{C}^T\mathbf{X}_1-\mathbf{C}^T\mathbf{X}_2=\mathbf{C}^T(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2)=0$$

因此，$\mathbf{C}$为垂直于超平面的向量，从而称之为对超平面$\mathbf{C}^T\mathbf{X}=\mathbf{b}$的法向量。

例 1-1　超平面

$$\mathrm{H}=\{\mathbf{X}\,|\,2x_1+x_2=3\}$$

将二维空间E^2分成如图 1—4 所示的两个半空间D_1和D_2，如果$b=0$，则超平面穿过原点。

例 1-2　对超平面$H=\{\mathbf{X}\,|\,-2x_1+x_2=0\}$，点$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$位于该超平面上，$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$，因此

$$\mathbf{C}^T\mathbf{X}=(1)(-2)+(2)(1)=0$$

两向量$\mathbf{C}$和$\mathbf{X}$垂直，如图 1—5 所示。

超平面的一个重要类型称为支撑超平面。给定一个凸集D_0上的边界点$\mathbf{W}$，如果满足$\mathbf{C}^T\mathbf{W}=b$，并且所有$\mathbf{X}$都位于由这个超平面所分开的半闭空间上，则超平面$\mathbf{C}^T\mathbf{X}=b$称为在点$\mathbf{W}$处凸集D_0的支撑超平面。

例如在E^2中，对一个凸集，某一支撑超平面为一对该集合的某一边界点上的切线

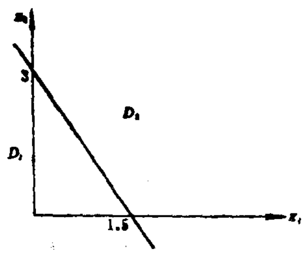


图 1-4 超平面与两个半空间

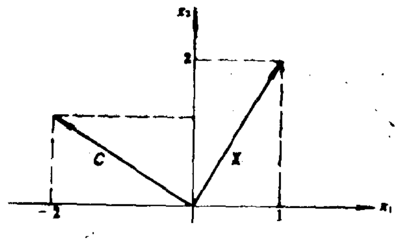


图1-5 向量是C为超平面的法向量

（图1-6）。在E^3中，支撑超平面为与某些边界点相切的平面

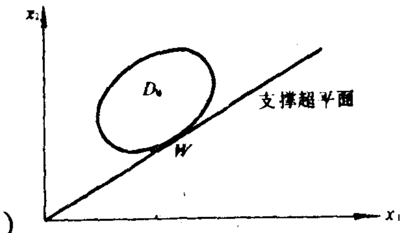


图1-6 支撑超平面

函数$f(\mathbf{X})$被称为在E^n中在凸集D_0上的凸函数，若对位于D_0中的任何两点$\mathbf{X}_1$和$\mathbf{X}_2$和任意$\lambda\in(0,1)$成立

$$f(\lambda\mathbf{X}_2+(1-\lambda)\mathbf{X}_1)\leqslant\lambda f(\mathbf{X}_2)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_1) \tag{1-19}$$

如果在上式中，保持严格不等号，并且满足$\lambda\in(0,1)$及$\mathbf{X}_1\neq\mathbf{X}_2$，则称$f(\mathbf{X})$为在$D_0$上的严格凸函数。

类似的，一个凹函数，可以用同样的方法，在相反的不等号的意义下来定义。一个线性函数为在所有E^n上的凸函数和凹函数，然而它既非严格凸函数，也非严格凹函数。

例如考虑图1-7所示的单变量函数，对所有$\lambda\in(0,1)$，函数总位于连接点$[x_1, f(x_1)]$至$(x_2, f(x_2))$的线段以下，因此，该函数为凸函数。实际上它还是严格凸函数。图1-8为两个变量的凸函数的例子。

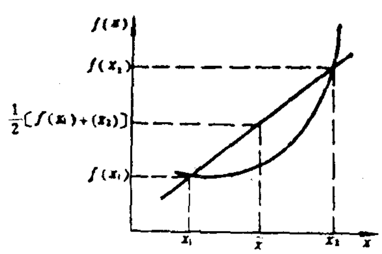


图1-7 一维凸函数

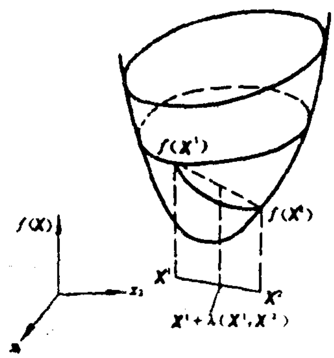


图1-8 二维凸函数

凸函数具有如下基本性质：

（1）设f_1，f_2为定义在凸集D_0上的凸函数，则f_1+f_2亦为定义在凸集D_0上的凸函数。

（2）设f为定义在凸集D_0上的凸函数，则对任意实数$\alpha\geqslant0$，函数αf仍为D_0上的凸函数。

由以上两个性质推得，有限个凸函数的线性组合

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\cdots+\alpha_m f_m,\ \alpha_i\geqslant 0\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

亦为凸函数。

这些性质，很容易从基本定义出发得到证明。

（3）设f为定义在凸集D_0上的凸函数，则对每一个实数β，集合

$$\Gamma_\beta=\{\mathbf{X}\mid f(\mathbf{X})\leqslant\beta,\ \mathbf{X}\in D_0\}$$

是凸集。

证明： 设任意$\mathbf{X}_1$、$\mathbf{X}_2\in\Gamma_\beta$，则有$f(\mathbf{X}_1)\leqslant\beta$，$f(\mathbf{X}_2)\leqslant\beta$，由于$f$为凸函数，故对任意$\alpha\in(0,\ 1)$，有

$$f(\alpha\mathbf{X}_1+(1-\alpha)\mathbf{X}_2)\leqslant\alpha f(\mathbf{X}_1)+(1-\alpha)f(\mathbf{X}_2)\leqslant\beta$$

这表明 $\alpha\mathbf{X}_1+(1-\alpha)\mathbf{X}_2\in\Gamma_\beta$，于是$\Gamma_\beta$为凸集。

由定义我们看到，如果$f(\mathbf{X})$为（严格）凸函数，那么$-f(\mathbf{X})$则为凹函数。同时，一个凸函数$f(\mathbf{X})$的极小值$\mathbf{X}^*$将等于凹函数$-f(\mathbf{X})$的极大值。然而两函数在最优点上并不相等，而是 $\min f(\mathbf{X})=-\max[-f(\mathbf{X})]$。这一结论一般来说是正确的。

注意，一个凸函数，仅仅是在一个凸集上被定义。同时，对凸函数作定义时，并不要求函数$f(\mathbf{X})$是否连续或可微。

对一个可微函数$f(\mathbf{X})$，它的梯度为一n维向量，即

$$\nabla f(\mathbf{X})=\left[\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_1}\quad \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_2}\quad\cdots\quad\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_n}\right]^T \tag{1-20}$$

此外，如果$f(\mathbf{X})$具有二阶偏导数，则由二阶偏导数构成的海森矩阵为一$n\times n$对称矩阵。即

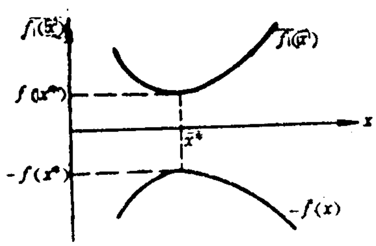


图 -9　凸函数及其对应的凹函数

$$\mathbf{H}(\mathbf{X})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_2\partial x_n}\\ \cdots & & \cdots & \\ \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_n\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_n^2}\end{pmatrix} \tag{1-21}$$

其$\mathbf{H}(\mathbf{X})$的对称性，是基于函数的偏导数与其求导次序无关的事实。即

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial x_j\partial x_i},\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

在实际优化设计中，如何去判断一个函数是否具有凸性一般来说是不那么容易的。在判别时我们可以直接利用定义去判别，亦可利用下面的定理去判别。

定理 1-1　设f：$D\subset E^n\to E^1$于凸集$D_0\subset D$上连续可微，则$f(\mathbf{X})$为D_0上的凸函数的充分必要条件是，对一切$\mathbf{X}_1$、$\mathbf{X}_2\in D_0$有

$$f(\mathbf{X}_2)\geqslant f(\mathbf{X}_1)+\nabla f(\mathbf{X}_1)^T(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1) \tag{1-22}$$

证明： 由假定，对一切$\mathbf{X}_1$、$\mathbf{X}_2\in D_0$和$\lambda\in(0,\ 1)$有

$$f(\lambda\mathbf{X}_2+(1-\lambda)\mathbf{X}_1)\leqslant\lambda f(\mathbf{X}_2)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_1)$$

于是得

$$\frac{f(\mathbf{X}_1+\lambda(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1))-f(\mathbf{X}_1)}{\lambda}\leqslant f(\mathbf{X}_2)-f(\mathbf{X}_1)$$

令$\lambda\to 0$，便得到式（1-22），必要性得证。

又若式（1-22）成立，则任取$\mathbf{X}_1$、$\mathbf{X}_2\in D_0$且令

$$\mathbf{X}_3=\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2,\ \lambda\in(0,\ 1)$$

则有

$$f(\mathbf{X}_1)\geqslant f(\mathbf{X}_3)+\nabla f(\mathbf{X}_3)^T(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_3)$$
$$f(\mathbf{X}_2)\geqslant f(\mathbf{X}_3)+\nabla f(\mathbf{X}_3)^T(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_3)$$

于是得

$$\lambda f(\mathbf{X}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}_2)\geqslant f(\mathbf{X}_3)+\nabla f(\mathbf{X}_3)^T(\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_3)$$
$$=f(\mathbf{X}_3)=f(\lambda\mathbf{X}_1+(1-\lambda)\mathbf{X}_2)$$

$f(\mathbf{X})$为凸函数，充分性得证。

图1-10是定理1-1的几何说明。

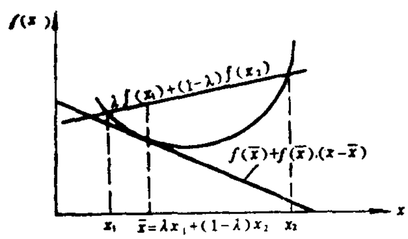


图1-10 定理1-1的几何说明

下面的定理对判定函数$f(\mathbf{X})$是否为凸函数更为实用。

定理 1-2 设f：$D\subset E^n\to E^1$于凸集$D_0\subset D$上二次连续可微，则$f(\mathbf{X})$为D_0上的凸函数的充分必要条件是，对一切$\mathbf{X}\in D_0$，$f(\mathbf{X})$的海森矩阵$\mathrm{H}(\mathbf{X})$是半正定矩阵。

证明：先证明充分性，由$f(\mathbf{X})$的泰勒展开式有：

$$f(\mathbf{X}_2)=f(\mathbf{X}_1)+\nabla f(\mathbf{X}_1)^T(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)$$
$$+\frac{1}{2}(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)^T\mathrm{H}(\mathbf{X}_1+\xi(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1))(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)\qquad(1\text{-}23)$$

其中$\xi\in(0,\ 1)$，由于$\mathrm{H}(\mathbf{X})$对一切$\mathbf{X}\in D_0$是半正定矩阵，故有

$$f(\mathbf{X}_2)\geqslant f(\mathbf{X}_1)+\nabla f(\mathbf{X}_1)^T(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)$$

由定理1-1即知$f(\mathbf{X})$为D_0上的凸函数。充分性得证。

再证明必要性，利用反证法，设$\mathbf{X}_1$为D_0的一个内点，在该点处$\mathrm{H}(\mathbf{X})$为负定矩阵，即对$\mathbf{X}_2\in D_0$，$\mathbf{X}_2\neq\mathbf{X}_1$有

$$(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)^T\mathrm{H}(\mathbf{X})(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)<0$$

由$\mathrm{H}(\mathbf{X})$的连续性，总可以取到这样的$\mathbf{X}_2\in D_0$，$\mathbf{X}_2\neq\mathbf{X}_1$，和一切$\xi\in(0,1)$，使得

$$(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)^T\mathrm{H}(\mathbf{X}_1+\xi(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1))(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)<0$$

于是由式（1-23）得

$$f(\mathbf{X}_2)<f(\mathbf{X}_1)+\nabla f(\mathbf{X})^T(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_1)$$

这与$f(\mathbf{X})$为凸函数相矛盾。

若海森矩阵$\mathrm{H}(\mathbf{X})$对一切$\mathbf{X}\in D_0$都是正定的，则$f(x)$是D_0上的严格凸函数，但反之

不成立。

在最优化问题中，一类重要的函数是所谓二次型。一个二次型为一n变量的函数，它可以写成

$$f(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{1-24}$$

其中a_{ij}是常量。用矩阵向量来表示则为

$$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} \tag{1-25}$$

其中$\mathbf{A}=[a_{ij}]$为一$n\times n$对称矩阵。注意，这个矩阵与向量的乘积的结果恒为标量。

例 1-3 二次型

$$x_1^2+x_1x_2+3x_2^2$$

$$x_1^2+x_1x_2+4x_1x_3+2x_3^2$$

$$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2$$

它们的矩阵形式$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$中的矩阵$\mathbf{A}$分别为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0.5 & 3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 2\\ 0.5 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

矩阵$\mathbf{A}$的具体情况可能各式各样，但$\mathbf{A}$可以总取其对称形式，这并不失其一般性。

如果除 $\mathbf{X}=0$ 外，对所有$\mathbf{X}$成立$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}>0$，则称二次型$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$为正定的。如果对所有$\mathbf{X}\neq0$，使得$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\geqslant0$，则称这个二次型是半正定的。

按同样的道理，可以给出负定和半负定的定义，只须将上面的定义中的不等号反过来就是了。

如果对$\mathbf{X}$的某些值它是正的，而对另一些$\mathbf{X}$值它是负的，则称这个二次型是非定的。我们可以用下述的定理，来确定一个二次型是否为正定的。

定理 1-3 一个二次型$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$为正定的，当且仅当 $\mathbf{A}$ 矩阵的所有顺序主子式为正的。

矩阵$\mathbf{A}$的顺序主子式为一子方阵，它由逐次消去右侧列和下侧行而得到。对$n\times n$矩阵有n个顺序主子式。例如若

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

则它的三个主子式为

$$a_{11},\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

例如对矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

由于 $a_{11}=2$, $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5$, $\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 5\end{vmatrix}=13$ 即**A**为正定的。

对于正定二次函数

$$f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} \tag{1-26}$$

由定理1-2可知，函数式（1-26）为凸函数的充分必要条件是**A**为对称半正定矩阵。而**A**为对称正定矩阵是函数式（1-26）为严格凸函数的充分必要条件。

§1-2 全局极小值、局部极小值和鞍点

设我们所要讨论的最优化问题是

$$\min_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X})$$

我们称这一问题为无约束静态优化问题，因为对**X**的可能值没加任何限制条件。但是会出现另一些问题必须予以回答。例如什么时候$f(\mathbf{X})$具有极小值？此极小值是否唯一？是否有相对极小值？我们用下面的某些定义来回答这些问题。

全局极小值　设$f(\mathbf{X})$为定义在E^n中闭集D上的某一函数，如果对每一点$\mathbf{X}\in D$，存在$f(\mathbf{X})\geqslant f(\mathbf{X}^*)$，则称$f(\mathbf{X})$沿整个闭集$D$在点$\mathbf{X}^*$存在全局极小值，点$\mathbf{X}^*$称为全局极小点。

强局部极小值　令$f(\mathbf{X})$为在E^n中$\mathbf{X}^*$点的某一小的δ邻域里的所有点的函数，如果存在某一ε，$0<\varepsilon<\delta$，使得所有**X**满足$\|\mathbf{X}-\mathbf{X}^*\|<\varepsilon$时，存在$f(\mathbf{X})>f(\mathbf{X}^*)$，则称函数$f(\mathbf{X})$具有强局部极小值，$\mathbf{X}^*$称为强局部极小点。

在$\mathbf{X}^*$点的全局极小值，意味着不管我们可能在区域D中的其它处如何搜索，目标函数在该点达到它的最低值。在这里，集合D可以是E^n的整体。与此相反，一个局部极小值仅能保证函数$f(\mathbf{X}^*)$的值相对于$\mathbf{X}^*$的一个ε域中的其它点是极小值。因此，一个函数可能具有很多局部极小值。譬如，设$f(\mathbf{X}_i^0)$，$i=1，2，\cdots，p$为p个局部极小值，则全局极小值总可以从这些局部极小值中比较它们的值并取其满足

$$f(\mathbf{X}^*)\leqslant f(\mathbf{X}_i^0),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$$

来得到。其中

$$\mathbf{X}^*\in\{\mathbf{X}_i^0 \mid i=1,\ 2,\ \cdots,\ p\}$$

对全局极小值，如果$f(\mathbf{X})>f(\mathbf{X}^*)$，则极小值是唯一的，并称它为完全全局极小值。在局部极小值的情况下，如果$f(\mathbf{X})\geqslant f(\mathbf{X}^*)$，则局部极小值不是唯一的，此时称它为弱局部极小值。

例如，图1-11a函数$f(x)=\sin x$在点$x_k^*=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k=\cdots，-2，-1，0，1，$

2，…具有无穷多个强局部极小值，因为对所有k，$\sin x_k^*=-1$，此外x_k^*对所有k同样也是全局极小值，但它没有完全全局极小值。函数$f(x)=x^2$在$x^*=0$处具有强局部极小值，它同样也是完全全局极小值。再如，函数$f(x)=e^{-0.1x}\cos x$，对$x\geqslant 0$在点$x_k^*=\phi+2k\pi$，$k=0$，1，2，…具有强局部极小值，其中$\phi=\operatorname{arc\,tg}(-0.1)=174.3^\circ$。它在点$x_0^*$处具有一完全全局极小值。因为

$$e^{-0.1x_0^*}\cos x_0^*<e^{-0.1x_k^*}\cos x_k^*,\qquad k=1,\ 2,\ \cdots$$

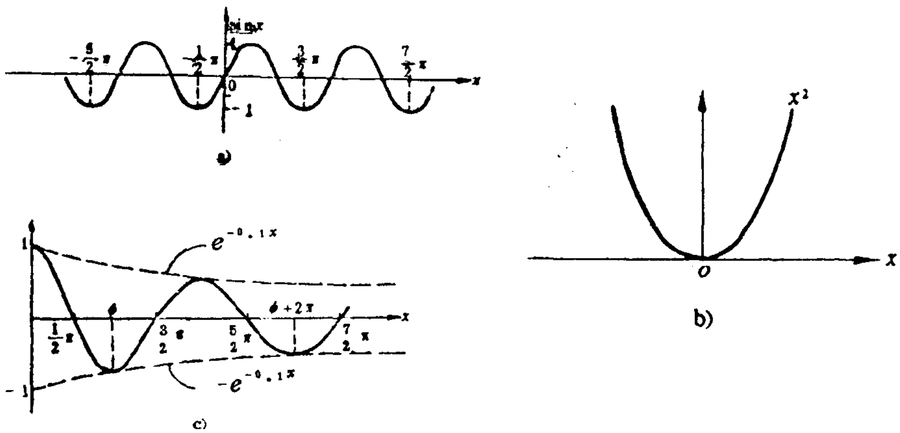


图1-11　局部极小值与全局极小值

二次型X^TAX在$X^*=0$点具有完全全局极小值，如果A是正定的。而X^TAX具有一全局极小值但非完全全局，如果A为非负定阵，这个全局极小值发生在点X^*，使得$(X^*)^TAX^*=0$。根据非负定的定义，除$X^*=0$外，存在某一$X^*\neq 0$，它产生极小值。

图1—12a和b分别表示非可微函数和可微函数具有弱局部极小值的情况。

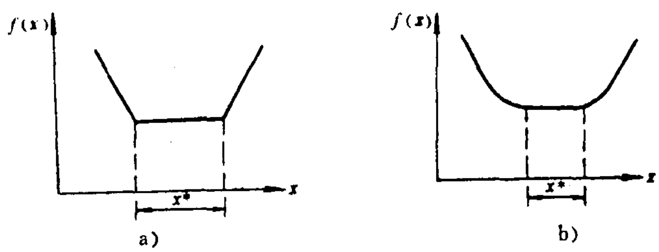


图1-12　具有弱局部极小值的情况

在最优化问题中，我们通常希望求全局极小值。然而，如果目标函数具有多于一个极小值，这时为求出全局极小值，要求首先决定所有的极值点，然后比较在这些极小值点上的目标函数以确定全局极小值。如果不能成功的确定所有的极值点，那么尽管我们可能尽到全部努力，但仍然得不到全局极小值点。不过有一个方法可以避免这种困难，那就是如果确信我们的目标函数是凸的或严格凸的，则局部极小值也是全局极小值。在严格凸函数的情况下，全局极小值是唯一的，即完全全局极小值。下面的几个定理就是用来说明这一结论的。

定理 1-4　设$f(X)$是凸集$D_0\subset D$上的连续可微凸函数，若X^*为D_0的一个内点且满

足$\nabla f(\mathbf{X}^*)=0$，则$\mathbf{X}^*$为$f(\mathbf{X})$在D_0上的全局极小点。

证明： 由定理1-1知对任何$\mathbf{X}'\in D_0$，$\mathbf{X}'\neq\mathbf{X}^*$，成立

$$f(\mathbf{X}')\geqslant f(\mathbf{X}^*)+\nabla f(\mathbf{X}^*)^T(\mathbf{X}'-\mathbf{X}^*)=f(\mathbf{X}^*)$$

这表明$\mathbf{X}^*$为$f(\mathbf{X})$于D_0上的全局极小点。

利用定理 1-2，定理 1-4 还可以叙述成下面的等价形式。

定理 1-5 设$f(\mathbf{X})$是凸集$D_0\subset D$上的二次连续可微函数，对一切$\mathbf{X}\in D_0$和任意非零$\mathbf{Y}$，满足

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{H}(\mathbf{X})\mathbf{Y}\geqslant 0 \tag{1-27}$$

若$\mathbf{X}^*$为D_0的一个内点且满足$\nabla f(\mathbf{X}^*)=0$，则$\mathbf{X}^*$为$f(\mathbf{X})$在D_0上全局极小点。

更进一步，若函数$f(\mathbf{X})$为D_0上的严格凸函数，则函数$f(\mathbf{X})$在D_0上有唯一的全局极小点。

定理 1-4 和 1-5 中的条件都要求$f(\mathbf{X})$的可微性。其实要说明函数的局部极小点与全局极小点的关系，可微性条件可以省去，只需要求$f(\mathbf{X})$具有凸性条件就可以了。

定理 1-6 设$f(\mathbf{X})$为凸集合$D_0\subset D$上的凸函数，则函数$f(\mathbf{X})$的任意局部极小点必为全局极小点。

证明： 设$\mathbf{X}^*$为局部极小点，若它不是全局极小点，则必可找到$\overline{\mathbf{X}}\in D_0$，使$f(\overline{\mathbf{X}})<f(\mathbf{X}^*)$，今考虑点$\mathbf{X}=\lambda\mathbf{X}^*+(1-\lambda)\overline{\mathbf{X}}\in D_0$，$\lambda\in(0,1)$，则由定理假定有

$$\begin{aligned}f(\mathbf{X})&=f(\lambda\mathbf{X}^*+(1-\lambda)\overline{\mathbf{X}})\\&\leqslant\lambda f(\mathbf{X}^*)+(1-\lambda)f(\overline{\mathbf{X}})\\&<\lambda f(\mathbf{X}^*)+(1-\lambda)f(\mathbf{X}^*)=f(\mathbf{X}^*)\end{aligned} \tag{1-28}$$

因为此不等式对一切$\lambda\in(0,1)$均成立，今让λ充分接近1，则$\mathbf{X}$充分接近$\mathbf{X}^*$，于是式（1-28）与$\mathbf{X}^*$为局部极小点相矛盾。故$\mathbf{X}^*$必为全局极小点。

应当指出的是，虽然函数的凸性对确定局部极小点和全局极小点的关系上起着极其重要的作用，但是，一个函数的凸性条件并不是那么容易验证的。对一些比较复杂的设计问题，其目标函数凸性甚至无法判断。因此，在实际求解过程中所得到的最优点，我们只能认为是局部极小点。

一个函数$f(\mathbf{X},\mathbf{Y})$称之为在$(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0)$处具有一鞍点，如果存在一个$\varepsilon>0$使得对所有$\mathbf{X}$满足$\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0\|<\varepsilon$以及所有$\mathbf{Y}$满足$\|\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_0\|<\varepsilon$时存在有

$$f(\mathbf{X},\mathbf{Y}_0)\leqslant f(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}_0)\leqslant f(\mathbf{X}_0,\mathbf{Y}) \tag{1-29}$$

从而，如果$f(\mathbf{X},\mathbf{Y})$在$(\mathbf{X}_0\mathbf{Y}_0)$处具有鞍点，则该点对$\mathbf{X}$变量为该函数的极大值点，而对$\mathbf{Y}$变量则为函数的极小值点。

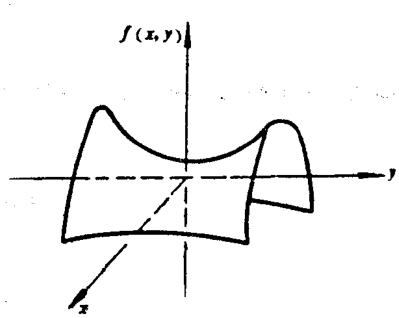


图1-13 鞍点

对双变量二次可微函数$f(x,y)$，下面的判别方式对于判别鞍点以及极大值点和极小值点是十分有用的。在必要的条件下，定义(x_0,y_0)点使得成立

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$