鞅与Banach空间几何学

刘培德 著

概率论与Banach空间理论的相互渗透结合不仅使有关的经典理论大为改观而且引出一系列新的研究课题和研究方向，它们与现代数学的多种分支有着深刻的联系。

武汉大学学术丛书

WUHANUNIVERSITY ACADEMICLIBRARY 武汉大学出版社

鞅与 Banach 空间几何学

刘培德　著

国家自然科学基金
国家教委博士点基金　资助课题

武汉大学出版社

~~1993年　武汉~~

内容简介

本书是关于取值于Banach空间的鞅与Banach空间几何理论的专著，全书包含9章和两个附录，在介绍了向量测度与积分以及B值鞅的基本性质等基础知识以后，书中一方面叙述鞅型序列的极限理论，独立增量鞅的大数定律，中心极限定理以及重对数律，鞅不等式，鞅变换等问题，另一方面则研究Banach空间中凸集的几何理论，Banach空间的型和余型，局部理论，p一致凸性和q一致光滑性，无条件鞅差序列性质等。整个叙述过程中随机过程的概率性质与空间的几何性质是有机结合在一起的。在这一过程中所得出的一系列结果在现代概率与分析的多种领域都有重要意义。本书可供概率论、泛函分析专业的研究生、大学生以及有关的数学工作者用作教本或参考书。

(鄂) 新登字09号

鞅与Banach空间几何学

© 刘培德 著

*

武汉大学出版社出版发行

(430072 武昌 珞珈山)

湖北省京山县印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 18.875印张 485字

1993年12月第1版 1993年12月第1次印刷

印数：1—1000（内含精装200册）

ISBN 7—307—01603—6/O・141（平）

ISBN 7—307—01604—4/O・142（精）

定价：17.30元（平）

22.80元（精）

前　言

本书讲述的是近一、二十年发展起来的，由概率论、泛函分析，调和分析等相互渗透而产生的一个新的学科分支.

概率论与抽象空间的结合可以追溯到现代概率论确立的早期. Kolmogorov 1935 年就曾研究过 Banach 空间值随机变量的特征泛函，至于对 Banach 空间值随机序列的大数定律的研究(Mouvier，1953)也有了四十年的历史，但是将随机变量或随机过程的概率性质与在其中取值的抽象空间的结构或几何性质有机结合起来的研究还是近年来的事.

鞅与 Banach 空间几何学的发展是有其内在原因的. 事实上 1966 年 Rieffel 定义了 Banach 空间的一个几何概念——可凹性，后来证明了可凹性与 Radon-Nikodym 性质是等价的；证明这一重要结论的工具就是鞅. 这是一个典型的例子. 鞅论在 Banach 空间几何理论方面成功的应用显示了 B 值鞅理论有着不同于实值鞅的独立的价值. 自此以后，B 值随机过程的概率性质与 Banach 空间的几何性质之间相互依存、制约的关系成了人们关注的一个中心. 国际上一些著名的概率学家和分析学家率先开展研究，以此为内容的国际学术会议不断召开，至今已有了累累硕果. 举若干重要的，如 Edgar 证明了 Banach 空间中凸集的 Radon-Nikodym 性质与 Choquet 端点表现等价；Hoffmann-Jϕrgensen 与 Pisier 证明了 Banach 空间的 p 型与在其中取值的独立增量鞅满足大数定律等价；Enflo 与 Pisier 证明了超自反空间具有等价一致凸范数；Burkholder 证明了 ξ 凸性与好鞅性质等价；Burkholder 与 Bourgain 证明了向量值函数空间上 Hilbert 变换的有界性与无条件鞅差序列性质等价；等等. 它们在概率和分析中都有着重要的作用. 值得注意的是这些定理或者直接以鞅为对象或者以鞅为工具.

鞅方法在这一理论发展过程中成为具有系统性和最为有力的方法.其实这也并不奇怪,因为鞅本身就是一种特殊的平均过程.

Banach 空间几何学通过 B 值鞅与调和分析的联系是本书内容的另一个侧面.经典调和分析与鞅论的结合产生了一个富有特色的分支——H_p 鞅论,近二,三十年这一分支得到迅速的发展并且在这方面已经有了很好的总结.与此同时,B 值鞅的相应理论也在发展.Pisier 关于一致凸空间值鞅的不等式就是一个很好的例子,Herz 还具体考虑了 B 值鞅的空间.近年来一个富有 Banach 空间特色的 B 值鞅空间理论展示了丰富的内容,其中的鞅不等式与鞅空间的相互嵌入关系都与 Banach 空间的几何性质有着密不可分的联系.Burkholder 关于 B 值鞅变换理论的工作是另一个突出例子,这一工作直接导出了一类新的 Banach 空间——具有无条件鞅差序列性质(UMD)的空间.事实证明它和向量值调和分析,特别是奇异积分算子理论密切相关.有关工作引起了广泛重视,其研究兴趣方兴未艾.

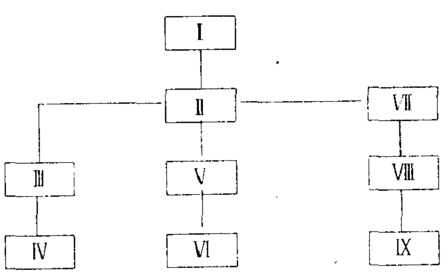
以上事实也说明了与多种学科的广泛联系是这一分支的一个特色.概率论中的随机过程理论,极限理论,Banach 空间的局部理论,算子理论,逼近论,调和分析中的奇异积分算子理论,内插与外插空间理论,向量值解析函数的 Hardy 空间,微分方程边值问题等都与之有程度不同的联系.可以说,多种学科理论发展的需要促进了这一分支的发展.

本书希望就这一理论的基本思想方法作一概括的介绍.全书包括 9 章正文和两个附录:章Ⅰ作为预备知识,叙述向量测度与向量值函数的积分;章Ⅱ是鞅与 Radon-Nikodym 性质,介绍鞅的基本性质及其收敛定理;章Ⅲ是讨论以渐近鞅和一致渐近鞅为代表的某些鞅型序列的性质;章Ⅳ为 Banach 空间中凸集的几何理论,叙述可凹性,端点与暴露点表现定理,树与加权树等几何概念与 Radon-Nikodym 性质的关系;章Ⅴ主要是 Banach 空间的型与独立增量过程的极限理论;章Ⅵ介绍 Banach 空间的局部理论,叙述

并证明著名的 Dvoretzky 定理，K 凸性与 l_p^n 的一致包含，n 维空间与 Euclid 空间的逼近程度以及弱型空间等；章Ⅶ是超自反空间的各种性质，介绍 Enflo 与 Pisier 的等价赋范定理，基本鞅不等式和 p 一致光滑空间的鞅收敛定理和大数定律；章Ⅷ系统讨论 B 值鞅不等式与 B 值鞅空间. 关于 p 均方函数 $S^{(p)}(f)$ 的不等式把鞅空间理论与 Banach 空间的几何性质紧密联系起来；章Ⅸ叙述由 Burkholder 等人建立起来的 UMD 空间理论，鞅变换不等式与 ξ 凸性的等价关系以及在向量值调和分析，奇异积分算子理论中的应用.

我们假定读者具有概率论和泛函分析两方面的基础知识，为了提供两方面读者阅读的方便，书末给出了两个附录：一个是关于一般拓扑空间的网和渗透的，一个是关于独立性和条件独立性的. 当然如果读者具备一般随机过程和泛函分析基础的知识，则阅读全书将更为便利.

本书内容安排是相对集中的，因此并非对全书内容都有兴趣的读者可作适当选择. 下图提供了一种可行的选择：大体说来，Ⅰ，Ⅱ两章是全书的基础. 然后自左至右，第一路线适宜于对鞅型序列的极限理论和凸集几何理论有兴趣的读者. 中间一条路线适宜于对独立增量过程的极限理论以及 Banach 空间的型与局部理论有兴趣的读者. 右面一条路线适宜于对鞅空间，向量值调和分析有兴趣的读者.



在我从事有关课题的研究和撰写本书过程中曾得到国内外诸

多专家同行的支持和帮助，借此机会我向他们表示深切感谢！美国 Bukholder 教授，林伯禄教授，西班牙 Blasco 教授都给予作者热诚的鼓励，有的还寄来大量前沿性的文献资料. 波兰 Pelczynski 教授，美国 Gassaza 教授，林培基教授来华讲学期间关于一些内容的演讲和交流使我深受启发. 王梓坤教授的多次鼓励，龙瑞麟研究员许多热忱无私的帮助使作者受益匪浅. 与龙先生的合作给作者留下美好的回忆. 李国平教授多年来给我以关心和指教，胡迪鹤教授很早就支持作者的工作，本书部分内容分别在他们各自主持的讨论班上讲述过. 另外，一些博士生，硕士生和青年教师在听课过程中提出过宝贵意见并在本书出版过程中给予热情协助，在此一并致谢！

最后，本书从 1989 年开始写起，中途夫人沉疴，为照料病人曾一度辍笔，以后边讲边写为研究生开课. 年内夫人大愈且又负弱操持为我腾出不少时间使得此书能赶在武汉大学校庆 100 周年前夕出版. 故本书既是拖沓所致又是急就而成. 我感谢校学术委员会将其列为武汉大学学术丛书，也感谢出版社诸多同志的热情相助. 但由于作者水平有限，谬误之处在所难免，加上时断时续，章节之间衔接照应会有不周之处，诚望读者批评指正.

著　者

1993 年 6 月

于武昌珞珈山

目　　录

Ⅰ. 向量测度和积分

本书所叙述的内容与测度和积分有着紧密的联系. 作为今后各章的预备知识，较为系统地熟悉有关向量测度和积分的知识是十分必要的. 实际上，无论是向量测度或者是向量值函数的积分，在理论上或者在应用上，它们都有着各自独立的意义. 我们将从最基本的向量测度的定义开始，然后讨论它的有界性，连续性以及延拓定理，分解定理. 对于向量值函数我们将讨论可测性和两大类积分，即 Bochner 积分和 Pettis 积分. 同时还初步讨论 RN 性质.

§1 向量测度

定义 1 设 Ω 是一个点集，$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的某些子集构成的集族. $\mathscr{F}$ 称为 Ω 上的一个代数(algebra)或域(field)：若

(i) $\Omega\in\mathscr{F}$，

(ii) 当 $A\in\mathscr{F}$ 时，$A^c\triangleq\Omega\backslash A\in\mathscr{F}$，

(iii) 当 A、$B\in\mathscr{F}$ 时，$A\cup B\in\mathscr{F}$.

$\mathscr{F}$ 称为一个 σ 代数(σ-algebra)：若代替(iii)成立

(iii)′ 当 $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$时，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

容易验证，同一点集上任意多个代数(σ 代数)之交仍为代数(σ 代数)，当 $\mathscr{F}_n$ 是一列单调增加代数(σ 代数)时，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 是一个代数.

定义 2 设 $\mathscr{F}$ 是由 Ω 的子集构成的集族，Ω 上包含 $\mathscr{F}$ 的一切 σ 代数之交构成的 σ 代数称为由 $\mathscr{F}$ 生成的 σ 代数(genarated

σ-algebra)，记为 $\sigma(\mathscr{F})$. 若 $\{\mathscr{F}_n, n\geq 1\}$ 是 σ 代数族，通常以 $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 表示由 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 生成的 σ 代数.

显然若 Σ 是 Ω 上的 σ 代数，$\mathscr{F}\subset\Sigma$ 是某个集族，则 $\sigma(\mathscr{F})\subset\Sigma$. 若 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$，$\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_2$ 均为集族，则 $\sigma(\mathscr{F}_1)\subset\sigma(\mathscr{F}_2)$. 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 的任一集族，Ω_0 是 Ω 的子集，则 $\sigma(\mathscr{F}\cap\Omega_0)=\sigma(\mathscr{F})\cap\Omega_0$，其中 $\mathscr{F}\cap\Omega_0$ 表示 $\mathscr{F}$ 中的每一元与 Ω_0 的交.

定义 3 设 $\mathscr{F}$ 是点集 Ω 上的代数，X 是 Banach 空间. 在 $\mathscr{F}$ 上定义的函数 $F:\mathscr{F}\to X$ 称为一个向量测度(vector measure)：若对于任何 $E_1, E_2\in\mathscr{F}$，$E_1\cap E_2=\varnothing$，则

$$F(E_1\cup E_2)=F(E_1)+F(E_2).$$

容易验证，向量测度具有下面性质：(i) $F(\varnothing)=0$，(ii) 若 $A\subset B$，$A,B\in\mathscr{F}$，则 $F(B\setminus A)=F(B)-F(A)$，(iii) 若 $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots,k)$，$A_n$ 互不相交，则 $F(\bigcup\limits_{n=1}^{k}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{k}F(A_n)$.

例 1 设 $\mathscr{F}$ 是[0,1]上的 Borel 可测集全体，$T:L_\infty[0,1]\to X$ 是线性算子，定义 $F:\mathscr{F}\to X$，$F(E)=T(\chi_E)$，$\forall\, E\in\mathscr{F}$，其中 χ_E 是 E 的特征函数(index function). 容易验证 F 是一个向量测度.

设 $\mathscr{F}$ 是点集 Ω 上的代数，$E\in\mathscr{F}$，E 的子集族 $\pi=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 称为 E 到 $\mathscr{F}$ 的一个有限分划(或简单地，分划 partition)，若 $A_i\in\mathscr{F}$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$ 并且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=E$.

定义 4 设 $F:\mathscr{F}\to X$ 是向量测度，X^* 是 X 的**共轭**(dual).

(i) 称 $\|F\|(E)=\sup\limits_{\pi}\sum\limits_{A\in\pi}\|F(A)\|$ 是 F 在 E 上的**变差**，其中 sup 遍历从 E 到 $\mathscr{F}$ 的所有有限分划. 若 $\|F\|(\Omega)<\infty$，则称 F 在 $\mathscr{F}$ 上是有界变差的(bounded variation).

(ii) 称 $|F|(E)=\sup\limits_{\|x^*\|\leq 1}\|x^*F\|(E)$ 是 F 在 E 上的半变差. 若 $|F|(\Omega)<\infty$，则称 F 在 $\mathscr{F}$ 上有**有界半变差**(bounded semivariation).

根据定义可直接验证，对于代数 $\mathscr{F}$ 上定义的向量测度 F，$\|F\|$ 与 $|F|$ 都是 $\mathscr{F}$ 上的实值非负测度并且对于 $\forall E\in\mathscr{F}$，$|F|(E)\leqslant\|F\|(E)$.

定义 5 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的代数，$F:\mathscr{F}\to X$ 是向量测度，X^* 是 X 的共轭.

(i) 称 F 在 $\mathscr{F}$ 上是有界的：若 $\sup\limits_{E\in\mathscr{F}}\|F(E)\|<\infty$.

(ii) 称 F 在 $\mathscr{F}$ 上是**可数可加的**(countably additive)：若对于任何 $A_n\in\mathscr{F}(n\geqslant 1)$，$A_n$ 互不相交，只要 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$，就有

$$F(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}F(A_n),$$

其中右端的级数是依 X 的范数收敛的. 不是可数可加的测度称为是**纯有限可加的**(purely finitely additive).

(iii) 称 F 是在 $\mathscr{F}$ 上**弱可数可加的**(weakly countably additive)：若对于每个 $x^*\in X^*$，x^*F 在 $\mathscr{F}$ 上是可数可加的.

(iv) 称 F 是在 $\mathscr{F}$ 上**强可加的**(strongly additive)：若对于任意 $A_n\in\mathscr{F}(n\geqslant 1)$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则以 X 的范数 $\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n)=0$.

例 2 设 $T:L_1[0,1]\to X$ 是有界线性算子，$\mathscr{F}$ 是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 可测集全体，μ 是 Lebesgue 测度. 定义 $F:\mathscr{F}\to X$，$F(E)=T(\chi_E)$，则

$$\|F(A)\|=\|T(\chi_A)\|\leqslant\|T\|\mu(A),$$

$$\|F\|(\Omega)\leqslant\|T\|\sup_{\pi}\sum_{A\in\pi}\mu(A)=\|T\|\mu(\Omega);$$

F 是有界的.

例 3 强可加测度未必是有界变差的. 仍考虑 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 可测集全体 $\mathscr{F}$ 和 Lebesgue 测度 μ，定义 $F:\mathscr{F}\to L_p[0,1]$，$F(A)=\chi_A$，$\forall A\in\mathscr{F}$，其中 $1<p<\infty$.

对于互不相交的集合序列 $A_n\in\mathscr{F}(n\geqslant 1)$，由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\mu(\Omega)<\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\|F(A_n)\|=\lim_{n\to\infty}\|\chi_{A_n}\|_p=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)^{1/p}=0,$$

这说明 F 的强可加性.

但对于任何 $E\in\mathscr{F}$，$\mu(E)>0$，若取分划 $\pi=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 使得 $\mu(A_i)=\mu(E)/n(1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$\|F\|(E)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\|F(A_i)\|=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)^{1/p}=n^{1-1/p}\mu(E)^{1/p},$$

故有 $\|F\|(E)=\infty$.

定理 1 设 $F:\mathscr{F}\to X$ 是向量测度，则下列条件等价：

(i) F 在 $\mathscr{F}$ 上强可加.

(ii) 对于任何单调增加序列 $A_n\in\mathscr{F}$，$A_n\subset A_{n+1}(n\geqslant 1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n)$ 存在.

(iii) 对于任何单调减少序列 $A_n\in\mathscr{F}$，$A_n\supset A_{n+1}(n\geqslant 1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n)$ 存在.

证明 (i)⇒(ii) 若(ii)不成立，则存在 $\mathscr{F}$ 中的单调增加序列 A_n，$\lim\limits_{n\to\infty}\|F(A_n)\|$ 不存在. 不妨设

$$r=\limsup_{n\to\infty}\|F(A_n)\|>\liminf_{n\to\infty}\|F(A_n)\|=s,$$

不失一般性，有 A_n 的子序列 $A_{n_1}\subset A_{n_2}\subset\cdots\subset A_{n_{2k-1}}\subset A_{n_{2k}}\subset\cdots$ 使得

$$s=\lim_{k\to\infty}\|F(A_{n_{2k-1}})\|,r=\lim_{k\to\infty}\|F(A_{n_{2k}})\|,$$

显然，$B_k=A_{n_{2k}}\backslash A_{n_{2k-1}}$ 是 $\mathscr{F}$ 中互不相交的序列并且

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\|F(B_k)\|&\geqslant\lim_{k\to\infty}(\|F(A_{n_{2k}})\|-\|F(A_{n_{2k-1}})\|)\\&\geqslant r-s>0.\end{aligned}$$

F 不是强可加的.

(ii)⟺(iii) 对于 $\mathscr{F}$ 中的序列 $A_n(n\geqslant 1)$，$\{A_n\}$ 是增加的当

且仅当$\{A_n^c\}$是递减的. 由于$F(A_n^c) = F(\Omega) - F(A_n)$，故极限$\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n^c)$与$\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n)$同时存在.

(ii)⇒(i) 设$\{A_n\}$是$\mathscr{F}$中的互不相交序列，则$B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$是递增的，若$\lim\limits_{n\to\infty}F(B_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty}F(B_n) - \lim\limits_{n\to\infty}F(B_{n-1}) = 0$. F是强可加的.

定理 2 设$\mathscr{F}$是代数，$F:\mathscr{F}\to X$是向量测度，则下述条件

(i) F是有界变差的，(ii) F是强可加的，(iii) F有界，具有关系(i)⇒(ii)⇒(iii).

证明 (i)⇒(ii) 若$A_n \in \mathscr{F}, A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，记$B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，则$\sum\limits_{i=1}^{n} \| F(A_i) \| \leqslant \| F \| (B_n) \leqslant \| F \| (\Omega) < \infty$. 于是

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| F(A_i) \| < \infty, \ \lim_{n\to\infty} \| F(A_n) \| = 0.$$

(ii)⇒(iii) 对于任意$x^* \in X^*, E \in \mathscr{F}$，显然$\| x^* F \| (E) \geqslant |x^* F(E)|$. 从而

$$|F|(E) = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \| x^* F \| (E) \geqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} |x^* F(E)| = \| F(E) \|.$$

若F在$\mathscr{F}$上不是有界的，则$|F|(\Omega) = \infty$. 取$E_1 \in \mathscr{F}$，使得$\| F(E_1) \| \geqslant 1 + \| F(\Omega) \|$，此时有$\| F(\Omega \backslash E_1) \| \geqslant \| F(E_1) \| - \| F(\Omega) \| \geqslant 1$. 由于$|F|(\Omega) \leqslant |F|(E_1) + |F|(\Omega\backslash E_1)$. $|F|(E_1)$与$|F|(\Omega\backslash E_1)$中必有一个为$\infty$，记此集合为$A_1$，则$|F|(A_1) = \infty$，$\| F(A_1) \| \geqslant 1$. 由同样的方法确定$A_2 \subset A_1$使得$|F|(A_2) = \infty$，$\| F(A_2) \| \geqslant 2$，…，如此归纳地得到$A_n \in \mathscr{F} (n \geqslant 1)$，$A_{n+1} \subset A_n$并且$|F|(A_n) = \infty$，$\| F(A_n) \| \geqslant n$. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n)$不存在. F不是强可加的.

定理 3 设$F:\mathscr{F}\to X$是向量测度，$E \in \mathscr{F}$.

(i) $|F|(E) = \sup\limits_{\pi} \| \sum\limits_{A_i \in \pi} \varepsilon_i F(A_i) \|$，其中$\pi$是任一从$E$到$\mathscr{F}$的有限分划，$\varepsilon_i$是标量，$|\varepsilon_i| \leqslant 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$.

(ii) $\sup\{\|F(A)\|, A\subset E, A\in\mathscr{F}\}\leqslant |F|(E)$

$$\leqslant 2\sup\{\|F(A)\|, A\subset E, A\in\mathscr{F}\}. \tag{1.1}$$

(iii) F 在 $\mathscr{F}$ 上是有界半变差的当且仅当 F 是有界的.

证明 1° 对于分划 $\pi=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 和 $\varepsilon_i, |\varepsilon_i|\leqslant 1(1\leqslant i\leqslant n)$,若 $x^*\in X^*, \|x^*\|\leqslant 1$,则

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_iF(A_i)\| &= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}|x^*\sum_{i=1}^n\varepsilon_iF(A_i)|\\ &\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^n|\varepsilon_ix^*F(A_i)|\\ &\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^n|x^*F(A_i)|\\ &\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\|x^*F\|(E)=|F|(E).\end{aligned}$$

由 π 和 ε_n 的任意性 $\sup_\pi\|\sum_{A_i\in\pi}\varepsilon_iF(A_i)\|\leqslant|F|(E)$.

反之,对于分划 π 和 $\|x^*\|\leqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n|x^*F(A_i)| &= \sum_{i=1}^n\operatorname{sign}x^*F(A_i)\cdot x^*F(A_i)\\ &= |x^*(\sum_{i=1}^n\operatorname{sign}x^*F(A_i)\cdot F(A_i))|\\ &\leqslant \|\sum_{i=1}^n\varepsilon_iF(A_i)\|.\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_i=\operatorname{sign}x^*F(A_i)$,自然地,$|\varepsilon_i|\leqslant 1(1\leqslant i\leqslant n)$. 于是

$$\begin{aligned}|F|(E) &= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\|x^*F\|(E)\\ &\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^n|x^*F(A_i)|\leqslant\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_iF(A_i)\|.\end{aligned}$$

2° 当 $A\subset E$ 时,$\|F(A)\|\leqslant|F|(A)\leqslant|F|(E)$,由此得到

$$\sup\{\|F(A)\|, A\subset E, A\in\mathscr{F}\}\leqslant|F|(E).$$

为证另一半不等式,设 $\pi=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 为 E 到 $\mathscr{F}$ 的分划,当 X 是实空间时,记 $\pi^+=\{A_i, A_i\in\pi, x^*F(A_i)\geqslant 0\}$, $\pi^-=\{A_i, A_i\in\pi, x^*F(A_i)<0\}$,则

$$\sum_{A_i\in\pi}|x^*F(A_i)| = \sum_{A_i\in\pi^+} x^*F(A_i) - \sum_{A_i\in\pi^-} x^*F(A_i)$$
$$= x^*F(\bigcup_{A_i\in\pi^+} A_i) - x^*F(\bigcup_{A_i\in\pi^-} A_i)$$
$$\leqslant 2\sup\{\|F(A)\|, A\subset E, A\in\mathscr{F}\}.$$

(当 X 为复空间时，分开实部和虚部，将系数 2 换为 4).

3° 由 2° 知论断成立.

由定义知，每个可数可加测度是弱可数可加的，若 $\mathscr{F}$ 是 σ 代数，则可数可加测度又是强可加的. 实际上下面结论成立.

定理 4 设 Σ 是 σ 代数，则 Σ 上的每个有界变差向量测度 F 是可数可加的，甚至 $\|F\|$ 也是可数可加的.

证明 设 $A_n\in\Sigma$, A_n 互不相交，此时 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\Sigma$. 于是

$$\sum_{n=1}^{k}\|F(A_n)\| \leqslant \|F\|(\bigcup_{n=1}^{k}A_n) \leqslant \|F\|(\Omega) < \infty \quad (1.2)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\|F(A_n)\|$ 是收敛的. 现在

$$\|F(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) - \sum_{n=1}^{k}F(A_n)\| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty}\|F(A_n)\| \to 0$$

$(k\to\infty)$，所以 $F(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}F(A_n)$.

设 π 是 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 到 Σ 的分划，则 $\pi\cap A_n$ 是 A_n 到 Σ 的分划. 由于

$$\sum_{A\in\pi}\|F(A)\| = \sum_{A\in\pi}\|\sum_{n=1}^{\infty}F(A\cap A_n)\|$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{A\in\pi}\|F(A\cap A_n)\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|F\|(A_n),$$

所以 $\|F\|(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|F\|(A_n)$. 另一方面，由 $\|F\|$ 的有限可加性，对于 $\forall n\in N$,

$$\sum_{i=1}^{n}\|F\|(A_i) = \|F\|(\sum_{i=1}^{n}A_i) \leqslant \|F\|(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n).$$