上海普通高校『九五』重点教材

线性代数

工程数学与教学软件

上海市教育委员会 组编

李世栋 乐经良

冯卫国 王纪林 编

科学出版社

内 容 简 介

线性代数是工程类与管理类专业的重要基础课程之一,本书根据教育部颁发的"工程数学课程教学基本要求"编写而成.

本书前七章分别就行列式、矩阵、n维向量与线性方程组、线性空间、矩阵对角化、实二次型和线性变换,讲述了线性代数的基本知识.第八章则给出了基本线性代数问题的计算机实现,通过将线性代数的基本知识与计算机相结合使学生能利用数学软件解决一些简单的线性代数的实际问题.书末给出了有关的Mathematica软件的使用说明.

本书可作为高等工科院校工学、经济学、管理学等各专业"线性代数"课程的教材,也可供教师和学生作参考之用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李世栋等编.-北京:科学出版社,2000
(工程数学与教学软件)
ISBN 7-03-007862-4

Ⅰ.…线 Ⅱ.…李 Ⅲ.线性代数 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第41256号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
北京双青印刷厂 印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
2000年1月第 一 版 开本:850×1168 1/32
2000年1月第一次印刷 印张:11 1/8
印数:1—7 100 字数:291 000

定价:16.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

线性代数是大学数学教育中一门主要基础课程，对于培养面向21世纪人才起着重要的作用．本书是编者在上海交通大学进行多年教学实践和改革探索的基础上编写的．其基本内容符合原国家教委1995年颁布的“工程数学课程教学基本要求”，并且适当作了一些改革的尝试：介绍了线性代数若干典型的应用实例和数学软件Mathematica在线性代数运算方面的基本功能，本书这部分内容实际上进行了数学实验的初步训练．我们认为，让学生应用数学知识并通过使用计算机来解决实际问题是数学教育中非常值得重视的环节．

本书共分8章．第一章到第七章是线性代数的基本内容．第一章主要介绍了行列式的基本概念和行列式的计算，并包含了行列式的一个应用——Cramer法则．第二章介绍了矩阵的代数运算、可逆矩阵、矩阵的初等变换、矩阵的秩和分块矩阵的概念以及有关性质．作为应用，在第二章的最后讨论了消元法解线性方程组与线性方程组有解的条件．第三章讨论n维向量的线性关系和向量组的秩的概念，并在此基础上讨论了线性方程组解的结构．经第二、三章的铺垫，第四章介绍了线性空间和欧氏空间的概念．第五章在介绍了方阵的特征值和特征向量以及矩阵相似的概念后讨论了方阵的对角化问题．第六章介绍了实二次型的概念和化二次型为标准形的方法，并讨论了正定二次型的相关性质．第七章介绍了线性变换的基本概念和性质．第八章介绍了数学软件Mathematica的最基本的使用方法以及用以解决最基本的线性代数问题的有关指令，并给出了若干应用实例，可用于计算机辅助教学．每章的习题分为两类，(一) 是基本题目，(二) 是难度较高的题目．书后附有习题的答案与概念索引．

我们在选材上以基本概念与基本方法为核心，力图做到突出重点，简明扼要，清晰易懂，便于教学．在习题的配置上，既注意基本内容的训练，又有适当的提高题．

本书可作为高等学校工科、理科（非数学专业）与经济管理学科线性代数课程的教材，课内学时 36～54 学时的都可选用．也可供成人教育的广大师生和工程技术人员使用．某些章节不同专业可根据不同情况予以取舍．

本书第一章由王纪林编写，第二、五、六章由李世栋编写，第三章由冯卫国编写，第四、七章由乐经良编写，第八章由李世栋与乐经良共同编写．另外，黄建国提供了第八章中建筑模型的应用实例和相关数据，童品苗参与了部分原稿的计算机输入工作．由于编者水平所限，不妥甚至谬误之处在所难免，恳请读者批评指正．

本书的出版得到了科学出版社鼎力帮助与上海交通大学教务处与应用数学系的关心和支持，李乔、沈灏两位教授和其他一些老师对本书的编写给了许多具体的帮助，在此深表感谢．

编　者

于上海交通大学

1999 年 8 月

目　录

第一章　行列式 ………………………………………………（ 1 ）
1.1　n 阶行列式 ……………………………………………（ 1 ）
1.2　n 阶行列式的性质 ……………………………………（ 11 ）
1.3　行列式的计算 ……………………………………………（ 21 ）
1.4　拉普拉斯（Laplace）展开定理 …………………………（ 27 ）
1.5　克莱姆（Cramer）法则 …………………………………（ 32 ）
习题一…………………………………………………………（ 39 ）
第二章　矩阵……………………………………………………（ 43 ）
2.1　矩阵的概念 ……………………………………………（ 43 ）
2.2　矩阵的运算 ……………………………………………（ 49 ）
2.3　可逆矩阵 ………………………………………………（ 60 ）
2.4　矩阵的分块 ……………………………………………（ 66 ）
2.5　矩阵的初等变换与矩阵的秩 …………………………（ 72 ）
2.6　分块矩阵的初等变换 …………………………………（ 89 ）
2.7　解线性方程组的高斯消元法 …………………………（ 94 ）
习题二…………………………………………………………（ 101 ）
第三章　n 维向量与线性方程组 ……………………………（ 110 ）
3.1　n 维向量 ………………………………………………（ 110 ）
3.2　向量组的线性关系 ……………………………………（ 113 ）
3.3　向量组的秩 ……………………………………………（ 123 ）
3.4　齐次线性方程组 ………………………………………（ 132 ）
3.5　非齐次线性方程组 ……………………………………（ 138 ）
习题三…………………………………………………………（ 144 ）
第四章　线性空间 ………………………………………………（ 152 ）
4.1　线性空间的概念 ………………………………………（ 152 ）
4.2　线性空间的维数、基与坐标 …………………………（ 157 ）
4.3　基变换与坐标变换 ……………………………………（ 161 ）

4.4 欧氏空间 …………………………………………………………… (165)
习题四…………………………………………………………………… (173)
第五章 矩阵的对角化 …………………………………………… (181)
5.1 矩阵的特征值与特征向量 ……………………………………… (181)
5.2 相似矩阵和矩阵的对角化 ……………………………………… (191)
5.3 正交矩阵与实对称矩阵的相似对角矩阵 ……………………… (198)
习题五…………………………………………………………………… (206)
第六章 实二次型 ………………………………………………… (212)
6.1 实二次型的基本概念及其标准形式 …………………………… (212)
6.2 化实二次型为标准形 …………………………………………… (216)
6.3 实二次型的正惯性指数 ………………………………………… (224)
6.4 正定二次型 ……………………………………………………… (227)
习题六…………………………………………………………………… (232)
第七章 线性变换 ………………………………………………… (236)
7.1 线性变换的概念 ………………………………………………… (236)
7.2 线性变换与矩阵 ………………………………………………… (240)
7.3 线性变换的特征子空间、值域和核 …………………………… (248)
7.4 欧氏空间的正交变换和对称变换 ……………………………… (252)
习题七 ………………………………………………………………… (256)
第八章 数学软件与应用实例 …………………………………… (261)
8.1 Mathematica 的基本操作 ……………………………………… (261)
8.2 线性代数基本问题的软件实现 ………………………………… (271)
8.3 应用实例 ………………………………………………………… (283)
习题八…………………………………………………………………… (309)
习题答案 ………………………………………………………………… (318)
索引 ……………………………………………………………………… (341)
参考书目 ………………………………………………………………… (349)

第一章　行　列　式

在初等数学中,我们用代入消元法或加减消元法求解二元和三元线性方程组,可以看出,线性方程组的解完全由未知量的系数与常数项所确定.为了更清楚地表达线性方程组的解与未知量的系数和常数项的关系,我们在本章先引入二阶和三阶行列式的概念,并在二阶和三阶行列式的基础上,给出 n 阶行列式的定义并讨论其性质,进而把 n 阶行列式应用于求解 n 元线性方程组.事实上行列式是一种常用的数学工具,在数学及其他学科中都有着广泛的应用.

1.1　n 阶行列式

在讨论 n 阶行列式之前,先简单回顾一下二阶和三阶行列式.

1.1.1　二阶和三阶行列式

初等数学中,二阶行列式是在二元线性方程组的求解中提出的.设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法,可得

$$\begin{cases} (a_1b_2 - b_1a_2)x_1 = c_1b_2 - b_1c_2 \\ (a_1b_2 - b_1a_2)x_2 = a_1c_2 - c_1a_2 \end{cases}$$

当 $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ 时,可得方程组(1.1)的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \\ x_2 = \dfrac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \end{cases} \tag{1.2}$$

为了便于记忆这些解的公式，引入了**二阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

其中 a_{ij} 称为行列式的**元素**，a_{ij} 的二个下标表示该元素在行列式中的位置，第一个下标称为**行标**，表示该元素所在的行，第二个下标称为**列标**，表示该元素所在的列，常称 a_{ij} 是行列式的 (i,j) 元素.

利用二阶行列式，(1.2)式可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

其中分母是由方程组(1.1)中未知量的系数按原来的位置排列成的行列式，称为方程组(1.1)的系数行列式. 分子则分别是将系数行列式的第一列和第二列换成方程组(1.1)右端的常数列所得到的行列式. 于是，若记

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

则当 $D \neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1.4}$$

二阶行列式(1.3)中，等号右端的表示式又称为**行列式的展开式**，二阶行列式的展开式可以用所谓**对角线法则**得到，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中，实线上两个元素的乘积带正号，虚线上两个元素的乘积带负号，所得两项的代数和就是二阶行列式的展开式. 常称上式中的实线为**主对角线**.

例 1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

所以方程组有唯一解,又由于

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

所以方程组的解为

$$x_1 = D_1/D = 0.2, \quad x_2 = D_2/D = 0.7$$ ※

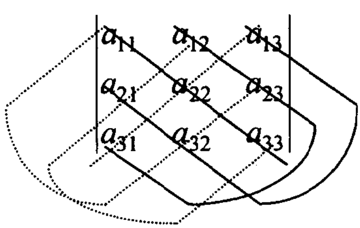
类似地,在求解三元线性方程组时,可引入三阶行列式.三阶行列式记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其展开式为

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

三阶行列式的展开式也可用对角线法则得到,三阶行列式的对角线法则如下图所示:



其中每一条实线上的三个元素的乘积带正号,每一条虚线上的三个元素的乘积带负号,所得六项的代数和就是三阶行列式的展开式.

例 1.2 **计算行列式**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 $D=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1=-5.$ ※

可以证明,当三元线性方程组的系数行列式不等于零时,方程组有唯一解,且可由三阶行列式用类似于(1.4)式的方式表示。事实上,在 1.5 节将证明,这个结论对于含 n 个未知量的线性方程组(简称为 n 元线性方程组)也成立,但要讨论 n 元线性方程组,首先就要把二阶和三阶行列式加以推广,引入 n 阶行列式的概念.

1.1.2 排列与逆序数

在 n 阶行列式的定义中,要用到排列的某些知识,所以先介绍排列的一些基本性质。

把 n 个不同的元素按一定的顺序排成一行($n\geqslant2$),称为这 n 个元素的一个排列。为了方便起见,这里只用到前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的排列.

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 **n 阶排列.**

常用 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 表示一个 n 阶排列,其中 i_k 表示 $1,2,\cdots,n$ 中的某个数,k 表示这个数在 n 阶排列中的位置. 共有 $n!$ 个不同的 n 阶排列.

定义 1.2 在一个 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中,按照在排列中的顺序任取两个数,记作 (i_j,i_k),其中 $j<k$,称为排列中的一个**数对**. 若 $i_j<i_k$,则称这两个数构成**顺序**;若 $i_j>i_k$,则称这两个数构成**逆序**. 一个 n 阶排列中逆序的个数称为这个排列的**逆序数**,记作

$$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$$

在一个 n 阶排列中,任何一个数对不是构成逆序就是构成顺序. 如果我们把顺序的个数称为顺序数,则一个 n 阶排列的顺序数与逆序数的和为 $n(n-1)/2$.

若 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 为偶数,则称排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为一个**偶排**

列，否则称为**奇排列**.

例 1.3 试求 $\tau(23541)$，$\tau(32541)$.

解 在排列 23541 中构成逆序的数对为(2,1)，(3,1)，(5,4)，(5,1)，(4,1)，所以 $\tau(23541)=5$，即 23541 是一个奇排列.

在排列 32541 中，有逆序(3,2)，(3,1)，(2,1)，(5,4)，(5,1)，(4,1)，所以 $\tau(32541)=6$，这是一个偶排列. ※

例 1.4 试求 $\tau(123\cdots n)$，$\tau(n(n-1)\cdots 21)$.

解 易见在排列 $123\cdots n$ 中没有逆序，所以 $\tau(123\cdots n)=0$，这是一个偶排列. 它具有自然顺序，所以又常称排列 $123\cdots n$ 为 n 阶自然排列.

在排列 $n(n-1)\cdots 21$ 中，任何一个数对都是逆序，所以

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = n(n-1)/2,$$

而其奇偶性是与 n 的取值有关的，即当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，这个排列是偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，这个排列是奇排列. ※

在一个 n 阶排列中，交换其中某两个数的位置，而其余数的位置保持不动，就得到另一个 n 阶排列. 进行一次这种操作称为一次**对换**，例 1.3 的两个排列相互由对方经一次对换得到，它们的奇偶性正好相反. 一般地，我们有以下结论：

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证 先考虑相邻两数的对换，设

$$c_1c_2\cdots c_k\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ d_1\ d_2\cdots d_l$$

为一个 n 阶排列，对换 a 与 b 得到 n 阶排列

$$c_1c_2\cdots c_k\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\ d_1\ d_2\cdots d_l$$

在这两个 n 阶排列中，除了(a,b)这一数对外，其它各数对在两个排列中是否构成逆序的情况完全相同. 因此，若 $a>b$，则有

$$\tau(c_1c_2\cdots c_k\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ d_1\ d_2\cdots d_l) = \tau(c_1c_2\cdots c_k\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\ d_1d_2\cdots d_l)+1$$

而当 $a<b$ 时，则有

$$\tau(c_1c_2\cdots ck\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ d_1\ d_2\cdots d_l) = \tau(c_1c_2\cdots c_k\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\ d_1d_2\cdots d_l)-1$$

所以排列 $c_1c_2\cdots c_k abd_1d_2\cdots d_l$ 和排列 $c_1c_2\cdots c_k bad_1d_2\cdots d_l$ 的奇偶性不同.

再考虑不相邻两数的对换,设

$$c_1c_2\cdots c_s ae_1e_2\cdots e_r bd_1d_2\cdots d_t$$

为一个 n 与阶排列,在 a 与 b 之间有 r 个数($r\geqslant 1$).对换 a 与 b 后得到 n 阶排列

$$c_1c_2\cdots c_s be_1e_2\cdots e_r ad_1d_2\cdots d_t$$

由定义可知,一个 n 阶排列的逆序数是由排列中各数的相对位置确定的,与用什么方法得到它无关.我们用另一种方式实现这个对换,先把 a 依次与右边相邻数对换,得到排列

$$c_1c_2\cdots c_s e_1e_2\cdots e_r abd_1d_2\cdots d_t$$

再将 b 依次与左边相邻数对换,得到排列

$$c_2c_1\cdots c_s be_1e_2\cdots e_r ad_1d_2\cdots d_t$$

其间共进行了 $2r+1$ 次相邻两数的对换,即排列 $c_1c_2\cdots c_s be_1e_2\cdots e_r ad_1d_2\cdots d_t$ 是由排列 $c_1c_2\cdots c_s ae_1e_2\cdots e_r bd_1d_2\cdots d_t$ 改变 $2r+1$ 次奇偶性得到的,所以它们的奇偶性不同. ※

定理 1.2 在全部 n 阶排列中($n\geqslant 2$),奇偶排列各占一半.

证 设在全部 n 阶排列中有 s 个不同的奇排列和 t 个不同的偶排列,需证 $s=t$.

把 s 个奇排列最左边的两个数对换,则 s 个奇排列变成了 s 个不同的偶排列,所以 $s\leqslant t$.对 t 个偶排列作最左边两数对换,同理可得 $t\leqslant s$.故有 $s=t$. ※

1.1.3 *n* 阶行列式

在给出 n 阶行列式的定义之前,先观察三阶行列式的结构.在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

的展开式中,每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积,除正负号外,均可将它们写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,这里 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的某个排列,这样的排列共有六个,它们分别对应了展开式中的六项.另外,在三阶行列式的展开式中,当列标的排列 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时,该项取正号,当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时,该项取负号,取正号的项和取负号的项各占一半.这样,可以把三阶行列式写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有的三阶排列求和(见本章附录).类似地,二阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 是对所有的二阶排列求和.受此启发,我们引入 n 阶行列式的定义。

定义 1.3 n^2 个元素排成 n 行 n 列,称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式,它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,每项前面带有符号 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$,即当 $j_1j_2\cdots,j_n$ 是偶排列时,该项带正号,否则带负号.记作,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.5}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

n 阶行列式有时简记为 $D = |a_{ij}|_n$. 当 $n=1$ 时,一阶行列式只有一个元素,则认为 $|a_{11}| = a_{11}$,注意不要与数的绝对值相混淆.

由定义可见,如果行列式有一行元素全为零,则行列式等于零.

例 1.5 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 在这个行列式中,当 $i>j$ 时,有 $a_{ij}=0$,即 D 中可能不为零的元素的下标必满足 $i \leqslant j$,称这种行列式为**上三角行列式**. 由 n 阶行列式的定义与 D 的元素的构成可见,

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

右端展开式中,当 $j_n < n$ 时 $a_{nj_n}=0$,所以展开式中可能不为零的项中必有 $a_{nj_n} = a_{nn}$,而此时 j_{n-1} 不能再取 n,且当 $j_{n-1} < n-1$ 时 $a_{n-1,j_{n-1}}=0$,故 $a_{n-1,j_{n-1}} = a_{n-1,n-1}$. 依次类推,$D$ 的展开式中可能不为零的项只有一项,这一项 n 个元素的列标成自然顺序排列 $12\cdots n$,即

$$D = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \qquad ※$$

此例说明,上三角行列式等于主对角线上 n 个元素的乘积.

如果在 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 中,当 $i>j$ 时 $a_{ij}=0$ 或 $i \neq j$ 时 $a_{ij}=0$,则分别称 D 为**下三角行列式或对角行列式**. 由例 5 的讨论,

可知它们也都等于主对角线上 n 个元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 1.6 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由行列式的定义

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

类似于例 1.5 的讨论,当 $j_1 < n$ 时 $a_{1j_1} = 0$,所以展开式中可能不为零的项中必有 $a_{1j_1} = a_{1n}$,而此时 j_2 不能取 n,且当 $j_2 < n-1$ 时 $a_{2j_2} = 0$,故 $a_{2j_2} = a_{2,n-1}$. 依次类推,D 的展开式中可能不为零的项只有一项,即

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \end{aligned}$$ ※

下面我们给出 n 阶行列式定义的等价形式. 有时,采用这些等价形式的定义更方便.

在 n 阶行列式的定义(见(1.5)式)中,每一项的 n 个元素是按行标成自然顺序排列的,然后,用列标所构成的 n 阶排列确定这一项的符号. 如果交换某项中两个元素的位置,例如,交换第 i 个元素与第 k 个元素位置(设 $k < i$),而其它元素的位置保持不变,即将

$$a_{1j_1}\cdots \boldsymbol{a_{kj_k}}\cdots \boldsymbol{a_{ij_i}}\cdots a_{nj_n}$$

写成

$$a_{1j_1}\cdots \boldsymbol{a_{ij_i}}\cdots \boldsymbol{a_{kj_k}}\cdots a_{nj_n}$$

显然,这 n 个元素的乘积不变.在定义式(1.5)中,我们可以将这一项的符号写为

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}$$

注意到,将这一项写成 $a_{1j_1}\cdots \boldsymbol{a_{ij_i}}\cdots \boldsymbol{a_{kj_k}}\cdots a_{nj_n}$ 后,其行标与列标构成的 n 阶排列分别是由 n 阶排列$(1\cdots k\cdots i\cdots n)$与$(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)$各经过一次对换得到的,它们的奇偶性同时改变,因而

$$\tau(1\cdots k\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)$$

的奇偶性与

$$\tau(1\cdots i\cdots k\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)$$

相同.所以

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(1\cdots k\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots \boldsymbol{a_{kj_k}}\cdots \boldsymbol{a_{ij_i}}\cdots a_{nj_n}\\=&(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots k\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots \boldsymbol{a_{ij_i}}\cdots \boldsymbol{a_{kj_k}}\cdots a_{nj_n}\end{aligned}$$

由此可见,有限次交换行列式的某项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中元素的位置,使之成为

$$a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$$

则(1.5)式中的一般项可写成

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\=&(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\=&(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}\end{aligned}$$

即每一项的符号是由行标与列标的逆序数和的奇偶性所确定.这样,我们可以把(1.5)式右端的展开式中元素的行标取定为 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$,则 n 阶行列式可定义为

定义 1.4 n 阶行列式

$$D=|a_{ij}|_n=\sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$$

$$= (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} \sum_{k_1 k_2 \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n} \quad (1.6)$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是某个给定的 n 阶排列.

同理,有下面的定义:

定义 1.5 n 阶行列式

$$D = |a_{ij}|_n = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n} \quad (1.7)$$

其中 $k_1 k_2 \cdots k_n$ 是某个给定的 n 阶排列.

特别,当我们把列标取为自然排列 $12\cdots n$ 时,得

$$|a_{ij}|_n = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \quad (1.8)$$

1.2 n 阶行列式的性质

由 n 阶行列式的定义可知,当 n 较大时,用定义计算行列式运算量很大.例如,计算一个 20 阶的行列式,需作 $19 \times 20!$ 次乘法,用每秒运算亿万次的电脑,也要算一千年才行!下面介绍行列式的基本性质,运用这些性质,不仅可以简化行列式的计算,而且对行列式的理论研究也很重要.

设 n 阶行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 中的行与列互换,所得的 n 阶行列式记为D^{T}:

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$