中学数学实验教材

第一册（下）

中学数学实验教材编写组编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

展 望 印 刷 厂 印 刷

*

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张：9.75 字数：159千字

1981年9月第一版 1984年6月 第四次印刷

印数：85,511—102,711

统一书号：7243·40 定价：0.71元

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用。

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要。

本教材的教学目的是，使学生切实学好从事现代生产、特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观。

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法。比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识。对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展

余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减。

全套教材共分六册。第一册是代数。在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系。灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式。第二册是几何。由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形，圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容。第三册是函数。数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等。第四册是代数。把数扩充到复数系，进一步加强多项式论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计的初步知识。第五册是几何。引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识。第六册是微积分初步。突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分。

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系。教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数（包括概率统计）、几

何双科并进，高三学微积分的程序来安排。

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章。突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用。这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性。

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的。第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校，北京师院附中，上海大同中学，天津南开中学，天津十六中学，广东省实验中学，华南师院附中，长春市实验中学等学校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一版《中学数学实验教材》，正式出版，内部发行，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物。在编写和修订过程中，项武义教授曾数次详细修改过原搞，提出过许多宝贵意见。

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另

一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书。在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好。

中学数学实验教材编写组

一九八一年三月

目　　录

第四章　多项式的四则运算

我们已经学习了一次方程和一元二次方程的解法，总结其要点就是：设未知数、列方程式、进而解方程。从运算的角度上看，其基本原理就是：把未知数当作具有数系运算通性的符号，与已知数一样参加运算，进而再运用数系运算通性去求出所设未知数。这种含有未知数的算式的运算，就是解代数方程的基本功。把这些运算系统化，就是本章的主要内容多项式的四则运算。

§1.　单项式与多项式

1.1.　单项式

由已知数及未知数符号 x，y，……的方幂相乘，所得到的式子，叫做单项式。例如

$8x$，$9x^2$，$-2x^4$，$\frac{1}{2}x^7$，$-\frac{3}{7}x^{32}$，$0.618xy^2$，

$-\sqrt{2}x^{121}$，$7x^2y$，$-\sqrt{7}xyz$，$\frac{3}{4}x^2y^3z$，以及

$-\frac{\sqrt{3}}{5}mt$，$\sqrt{\frac{1}{3}x^2y^3zt}$等都是单项式。

在单项式中，未知数符号前面的数字因数叫做这个单项式的系数；未知数符号叫做单项式的元；所含不同未知数的个数，就叫这个单项式的元数；而所含各元乘方指数的总和，就叫做这个单项式的次数。例如，以上所举各单项式的系数，元数，次数分别是：

单　项　式	系　数	元　数	次　数
$8x$	8	一元	1 次
$9x^2$	9	一元	2 次
$-2x^4$	-2	一元	4 次
$\frac{1}{2}x^7$	$\frac{1}{2}$	一元	7 次
$-\frac{3}{7}x^{32}$	$-\frac{3}{7}$	一元	32次
$-\sqrt{2}x^{121}$	$-\sqrt{2}$	一元	121次
$0.618xy^2$	0.618	二元	3 次
$7x^2y$	7	二元	3 次
$-\sqrt{7}xyz$	$-\sqrt{7}$	三元	3 次
$\frac{3}{4}x^2y^3z$	$\frac{3}{4}$	三元	6 次
$-\sqrt{\frac{3}{5}}mt$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	二元	2 次
$\sqrt{\frac{1}{3}}x^2y^3zt$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	四元	7 次

今后，我们就以单项式的元数，次数为准来称呼每一个单项式。例如

$-2x^4$ 称为一元四次单项式，$0.618xy^2$ 与$7x^2y$ 都称为二元三次单项式等。

由于 2 可以看成$2x^0$，$-\sqrt{5}$ 可以看成 $-\sqrt{5}y^0$ 等，因而，单独一个不等于 0 的数，也是一个单项式，只不过这样的单项式的次数都为零次。

所以，一般地说，任一个非零数 a，都是单项式的特例，我们叫做零次单项式。例如

2，$-\sqrt{5}$，0.3，$-3\sqrt{2}$，$-7\frac{1}{2}$等，都是零次单项式。

又由于数 0 可以看成：

$0\cdot x^0$，$0\cdot x$，$0\cdot x^2$，……，$0\cdot x^n$，……

所以，对于“零”这个特殊的数，我们就叫做零单项式。零单项式是单项式中唯一的次数不定的单项式。尽管它有多种形式的写法，但每种写法中系数都是 0 。因而，通常还是用“ 0 ”表示零单项式。

综上所述，单项式包括：

$$
\text{单项式}\begin{cases}\text{非零单项式}\begin{cases}\text{零次单项式：如}-7,\ \sqrt{2},\ \dfrac{1}{2},\ \cdots\\ \text{非零次单项式：如}\ 5x^2,\ \dfrac{1}{4}xy^2,\ \cdots\end{cases}\\ \text{零单项式：}\quad 0\end{cases}
$$

·练习·

1. 指出下列各单项式的系数、元数及次数：

x^3，$-x^4y$，$3x^5$，$-1.41xyz$，$\sqrt{7}x^7$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}xy$，

$-\sqrt{3}$，$-x^2y^2z^2$，$\dfrac{22}{7}$，0。

2. 什么是零单项式？它与零次单项式有什么差别？

如果在几个单项式中，不管它们的系数是不是相同，只要它们所含的未知数相同，而且各相同未知数的指数都对应相等，那么，这几个单项式就叫做同类单项式。简称同类项。

例如：$\dfrac{1}{2}x^2$ 与 $-5x^2$ 与 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2$ 是同类项。

$\sqrt{5}\,xy^2$ 与 $-7xy^2$ 与 $\frac{1}{3}xy^2$ 也是同类项。

$\sqrt{2}\,xyz^2$ 与 $100xz^2y$ 与 z^2xy 也是同类项。

但是，$5x^3$，$7y^3$ 与 $7z^3$ 就不是同类项；$-xy$，$23xy^2$，$51x^2y$ 与 $\frac{1}{2}x^2y^2$ 都不是同类项。

·练习·

把下列各单项式，按同类项分成各个组。你能分出几组来？

-7，$6x$，$\frac{1}{2}x^3y$，$\sqrt{2}$，$-xyz$，$-0.5yx^3$，

$\sqrt{5}\,zyx$，$\frac{x^3y}{5}$，$0.1x$，$9yxz$，$10yx^3$。

1.2. 多项式

由有限个单项式的代数和组成的式子，叫做多项式。也就是说，用"+""−"号把有限个单项式连结起来所得的式子，就叫多项式。例如：

$3x+0.5+2x^2$，$x^3-3x+\sqrt{2}$，

$xy-3x+\sqrt{5}\,y+1$，$-\frac{\sqrt{2}}{7}x^3y^3+2.31x^2-8z$ 等，

都是多项式。

一个单项式可以看作是多项式的特例，特别是，**零单项式也可以称为零多项式。**

多项式就是若干单项式的代数和，而单项式又是一些数与具有数系运算通性的未知数符号的方幂所组成的。因此，单项式自然也具有数系运算通性，就是说：

单项式加、乘满足交换、结合律及分配律；例如

$5x^2-1+8x=5x^2+8x-1$　　（交换律）

$(7xy-8y^2)+3xy=(7xy+3xy)-8y^2$

（交换律，结合律）

$=10xy-8y^2$　　（分配律）

单项式0与单项式1具有数0与1的运算特性；例如

$7x^3+0=7x^3$；　$(7x^3)\cdot 0=0$；

$7x^3\cdot 1=7x^3$等。

利用单项式运算的通性，特别是运用交换律、结合律和分配律，我们完全可以把一个多项式当中的同类项合并起来，集中成为一项，这就是**合并同类项**。例如：

$3x+7x^2-15x=7x^2+(3x-15x)$　　（交换律，结合律）

$$=7x^2+(3-15)x \quad \text{(分配律)}$$
$$=7x^2-12x。$$

$$3x^2+\sqrt{3}x^3-\sqrt{2}x^2-2x^3$$
$$=(3-\sqrt{2})x^2+(\sqrt{3}-2)x^3。$$

$$x^3-2x^2y+y^3+x^2y+1=x^3-x^2y+y^3+1。$$

由此可知，合并同类项，就是指同类单项式的相加或相减。其法则是：把同类单项式的系数相加或相减，而单项式中的未知数及它们的乘方指数不变。

对于一元单项式来说，合并同类项，就是一元同类单项式相加或相减，它的法则可以用以下式子表示：

$$\boxed{ax^n+bx^n=(a+b)x^n;\quad ax^n-bx^n=(a-b)x^n.}$$

其中，a、b为单项式的系数，可以是任意的已知实数；n为自然数。

例1 合并以下各同类项：

（1）$x+2x+3x+4x$；

（2）$7x^3-2x^3+5x^3+(-0.5)x^3-0.7x^3$；

（3）$\sqrt{2}xy^2-xy^2+3xy^2-\frac{\sqrt{2}}{2}xy^2$。

解：（1）$x+2x+3x+4x$

$$=(1+2+3+4)x=10x;$$

(2) $7x^3-2x^3+5x^3+(-0.5)x^3-0.7x^3$

$$=(7-2+5-0.5-0.7)x^3=8.8x^3;$$

(3) $\sqrt{2}xy^2-xy^2+3xy^2-\frac{\sqrt{2}}{2}xy^2$

$$=\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1+3\right)xy^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)xy^2.$$

·练习·

合并以下各同类项：

1. (口答)：

$7x^4+(-9)x^4$， $\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^3$， $0.5x^7+\frac{1}{100}x^7$，

$81x^{12}-(-3x^4)^3$， $9xy^2-xy^2$， $4y^2z^2-(-2zy)^2$.

$2x^2-\left(-\frac{1}{2}\right)x^2-5x^2$， $4x^3+(-x)^3-\frac{9}{4}x^3+\left(\frac{-1}{4}\right)$.

2. $3xy^3-4y^3x+7xy^3-(-2)xy^3$；

$ax^n+bx^n+cx^n-dx^n$.

在多项式中，所含不同未知数的个数，称为这个

多项式的元数；经过合并同类项以后，多项式所含非零单项式的个数，称为这个多项式的项数；多项式合并同类项后，所含各单项式中最高次项的次数，就称为这个多项式的次数。例如

$3x+0.5+2x^2$就是一元、三项、二次多项式，

$x^3-3x+x^2+\sqrt{2}-x=x^3-3x+\sqrt{2}$（合并同类项），就是一元、三项、三次多项式，

$xy-3x+\sqrt{5}y+1$就是二元四项二次多项式，

$-\frac{\sqrt{2}}{7}x^2y^3+2.3xz-8z^2$就是三元、三项、五次多项式。

在今后，我们常常把所遇到的多项式，先合并同类项，再以这个多项式的元数、次数为准来称呼这个多项式。例如

$x^3-3x+\sqrt{2}$ 称为一元三次多项式，

$x^2+x^3-y-x^2=x^3-y$ 称为二元三次多项式，

特别是，象10，$\sqrt{2}$，$-\frac{1}{3}$等非零实数，称为零次多项式（一元或多元的）。

数0，称为零多项式（一元或多元的，次数不定）。

一个多项式，经过合并同类项以后，还可以把所