机 械 振 动 学

J. P. 邓哈陀 著

談 峯譯

內 容 簡 介

本书研究了振动理論，对于各种振动现象，从单自由度、二个自由度、多个自由度系統，說到多气缸发动机、旋轉机械、自激振动以至非綫性系統，列举大量实例，并运用丰富理論充分予以說明.

本书可作为大专学校机械振动課程的主要教材和参考书，也可作为研究人員、工程师及技术人員有价值的参考书.

机 械 振 动 学

J. P. 邓哈陀 著

談 峯 譯

*

科学出版社 出版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1961 年 3月第 一 版 书号：2324 字数：428,000

1961 年 3月第一次印刷 开本：850×1168 1/32

(京) 0001—6,500 印張：16 1/4 插頁：2

定价：2.40 元

目 录

第一章　振动的运动学

§1-1. 定　　义

广义的說，振动是周期运动，即經过一定的时間間隔以后，在它所有質点中重复本身的运动．这一定的时間間隔叫做振动的**周期**，通常用符号 T 来表示．位移 x 对时間 t 的图解可能是一根十分复杂的曲綫．举例来說，如图 1.1a 所示是从一只蒸汽渦輪机的軸承座上所观察到的运动曲綫．

最簡单的周期运动是**諧运动**；在諧运动中，x 和 t 之間的关系可以表示为：

$$x = x_0 \sin \omega t \tag{1.1}$$

如图 1.1b 所示，描述出一只单摆的微小振动．位移的最大值是 x_0，叫做振动的**振幅**．

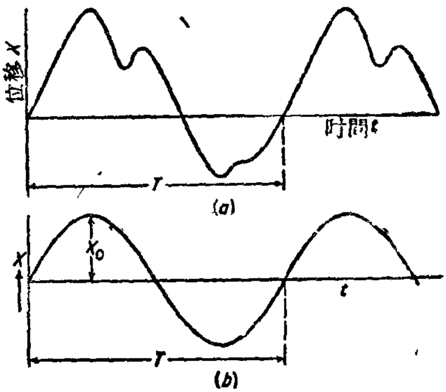

图 1.1　表示周期 T 和振幅 x_0 的周期諧函数

周期 T 通常用秒来量度；它的倒数 $f = 1/T$ 是振动的**頻率**，用每秒周数来量度．在某一些刊物中，将每秒周数縮写成 *cyps*．在德国文献中，为了紀念第一个无綫电波（电振盪）的实驗者，通常就把每秒周数叫做赫兹．

在方程(1.1)中，出現着符号 ω，通常把 ω 叫做**圓頻率**，而以每秒弧度数来量度．因为矢量表示法的特性，这个相当生疏的名称已变成大家所熟悉的，而关于矢量表示法則将在下节中討論之．

ω、f 和 T 之間的关系如下．从方程 (1 1) 和图 1.1b 中可以明了，发生振动的一个全周时，ωt 就已通过 360 度或 2π 弧度．因此，正弦函数又恢复它的初值．这样，当 $\omega t = 2\pi$ 时，时間間隔 t 就等于周期 T，即

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\text{秒}. \tag{1.2}$$

因为 f 是 T 的倒数，所以

$$f = \frac{\omega}{2\pi}\text{周/秒}. \tag{1.3}$$

对于旋轉机械来說，頻率常以每分振动数表示为 v.p. m.($=30\omega/\pi$)。

在已知位移为 $x = x_0 \sin \omega t$ 的諧运动中，速度可用位移对于时間的微分来求得：

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x_0\omega \cdot \cos \omega t \tag{1 4}$$

所以速度也是諧函数，并且具有最大值 ωx_0。

加速度

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -x_0\omega^2 \sin \omega t \tag{1.5}$$

也是諧函数，并具有最大值 $\omega^2 x_0$.

考察一下如图 1 2 所示已知其表达式分别为 $x_1 = a \sin \omega t$ 和 $x_2 = b \sin(\omega t + \varphi)$ 的二个振动，图中以 ωt 作为横标．由于量 φ

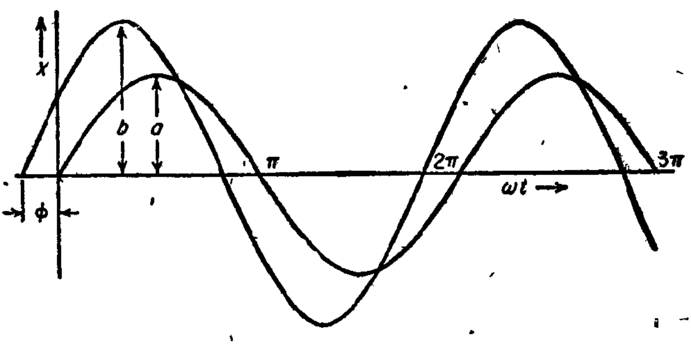

图 1.2　含有位相角 φ 的两个諧运动

的存在，这二个振动就并不在同一时間获得它們的最大位移，而一个振动比另一个振动落后 φ/ω 秒. 量 φ 叫做**位相角**或二个振动之間的**位相差**. 可以看出，这二个振动有着同样的 ω，因而就有着同样的頻率 f. 位相角只有对有同样頻率的二个振动才有意义. 如果頻率不同，位相角就无意义.

[例題] 一个物体悬掛在一根弹簧上，在离地面 1.0 厘米和 1.5 厘米的二个位置間竖直地上下振动. 每秒钟这个物体到达最高位置(离地面 1.5 厘米)二十次. 問 T, f, ω 和 x_0 各为多少?

[解答] $x_0 = 0.25$ 厘米，$T = 1/20$ 秒，$f = 20$ 周/秒，和 $\omega = 2\pi f = 126$ 弧度/秒.

§1-2. 表示振动的矢量法

一个振动质点的运动可以用一个旋轉矢量方便地表示出来. 設矢量 $\bar{a}$ (图1.3) 以匀角速度 ω 依反时針方向轉动. 当从矢量的水平位置作为起点来計算时間时，矢量的水平投影可以写成

$$a \cos \omega t$$

直立投影写作

$$a \sin \omega t$$

二个投影中每一个都可用来表示往复运动；但是在下面的討論中我們只将考察水平投影.

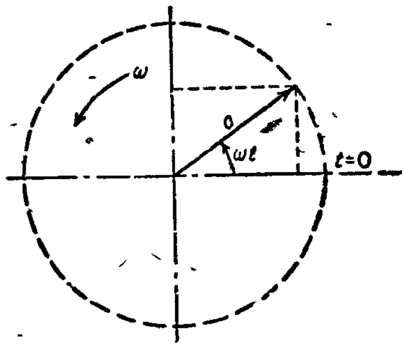

图 1.3 由旋轉矢量的水平投影来表示的一个諧振动

这种表示法使 ω 获得叫做圓頻率的名称. 量 ω 是矢量的角速率，以每秒弧度数来量度；在这种情况中，頻率 f 用每秒轉数来量度. 因此立即可以看出

$$\omega = 2\pi f.$$

运动 $x = a\cos\omega t$ 的速度是

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t$$

可以用长为 $a\omega$ 的矢量(的水平投影)来表示，它与位移矢量以同样的角速度 ω 轉动，但常超前于位移矢量 90 度. 加速度是 $-a\omega^2$

$\cos\omega t$，以长为 $a\omega^2$ 的矢量（的水平投影）表示，它以同样的角速率 ω 轉动，且超前位移矢量的位置 180 度或超前速度矢量的位置 90度(图 1.4)．这些陈述的眞实性可以用如下的不同矢量經过一整轉，很容易地来証实．

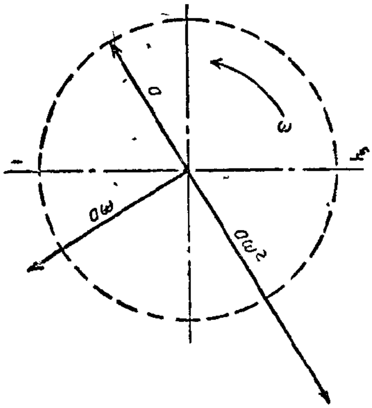

图 1.4 位移、速度和加速度是三个相互垂直的矢量

这种用矢量来形象化往复运动的方法是十分方便的．例如，如果一个点同时作二个同样頻率的运动，而位相角不同，換句話說，如果一点同时作 $a\cos\omega t$ 和 $b\cos(\omega t-\varphi)$ 二个运动，那末用三角学方法来作这二个表达式的加法是很費时的．但是，这二个矢量是很容易画出的，总运动可用这二个矢量的几何和表示为如图 1.5 的上面部分所示．此外，可把整个平行四边形 $\bar{a}$、$\bar{b}$ 当作是以匀角速度 ω 依反时針方向轉动的，而不同矢量的水平投影表示出作为时間函数的一些位移．关于这一点表示在图 1.5 的下面部分．綫 a–a 就表示所画出矢量图的一个特定瞬时．很容易看出，矢量和的位移(图上虛綫所示)实际上就是矢量 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 的横标的和．

这样，这种矢量加法能給出正确的結果是很明显的，因为 $a\cos\omega t$ 是矢量 $\bar{a}$ 的水平投影，而 $b\cos(\omega t-\varphi)$ 是矢量 $\bar{b}$ 的水平投影．这二个矢量的几何和的水平投影显然就等于分矢量的水平投影的和．

二个矢量的加法，只許用在振动具有相同頻率的情况中．二个运动 $a\sin\omega t$ 和 $a\sin 2\omega t$ 可以用二个矢量来表示．前一个矢量以角速率 ω 轉动，而后一个矢量則以 2 倍这个角速率即以 2ω 轉动．这二个矢量在图上的相对位置不断地变化着，因而它們的几何加法就沒有意义．

图 1.5 所示的矢量加法的一个特殊情形，在以后几章里将常

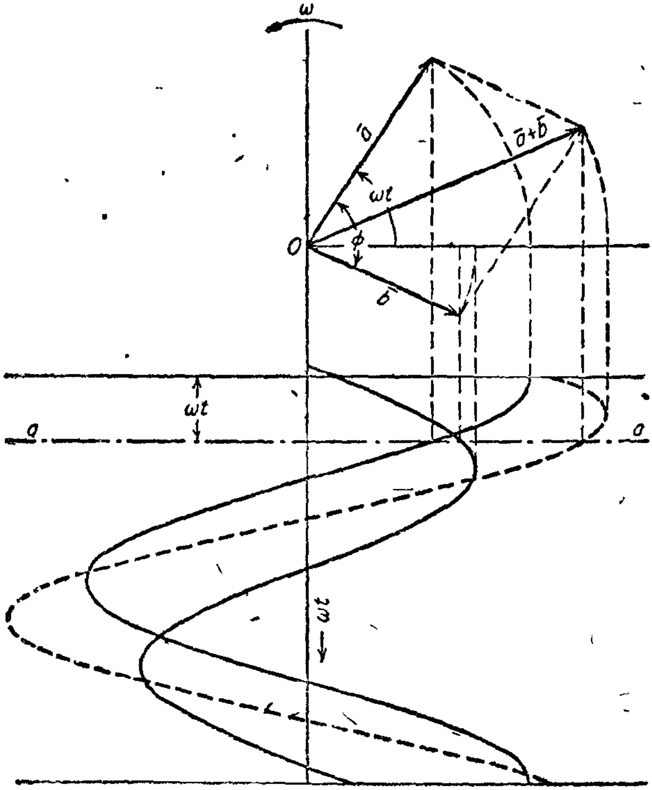

图 1 5　两个振动用它的矢量的几何方法相加

常出現，它是不同振幅的正弦波和余弦波的加法：即 $a\sin\omega t$ 和 $b\cos\omega t$ 相加。对于这种情形来說，二个矢量相互垂直，所以从图 1.6 中可以立即看出

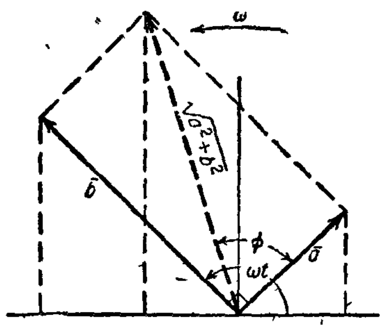

图 1.6　不同振幅的正弦波和余弦波的加法

$$a\sin\omega t + b\cos\omega t =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\omega t + \varphi) \tag{1.6}$$

其中

$$\tan\varphi = b/a$$

[例題] 两个运动：$x_1 = 5\sin 25t$ 厘米 和 $x_2 =$

$=10\sin(25t+1)$ 厘米，問它們的和的最大振幅是多少？（t的单位为秒）

［解答］ 第一个运动用5厘米长的矢量表示，把这个矢量竪直画出并使其指向下面．因为在这个位置上，矢量沒有水平投影，它表示出第一个运动是在瞬时 $t=0$ 的情况下．在这个瞬时，第二个运动是 $v_2=10\sin 1$，用10厘米长的矢量表示，这矢量依反时針方向对第一个矢量轉过1弧度(即57度)．图解矢量加法指出和矢量的长为13.4厘米．

§1-3. 拍

如果一个沿着直綫作往复运动的点的位移可用二項和 $a\sin\omega_1 t+b\sin\omega_2 t$ 来表示，而且其中 $\omega_1\neq\omega_2$，那末这个运动就叫做二个不同頻率的振动的“迭加”．很清楚，这运动本身并不是正弦波形的．当二个頻率 ω_1 和 ω_2 彼此接近于相等时，就发生一种有趣的特殊情形．第一个振动可以用以速率 ω_1 轉动的矢量 $\bar{a}$ 表示，而另一方面，矢量 $\bar{b}$ 以 ω_2 轉动．如果 ω_1 接近等于 ω_2 时，这二个矢量在一轉中将明显地保持同样的相对位置，也就是說它們之間所包含的角只有极小的变化．所以，这二个矢量可以用几何学方法相加，且在二个矢量的一轉中，这运动实际上是頻率 $\omega_1\approx\omega_2$ 和振幅 $\bar{c}$ 的正弦波形（图1.7）．但是在許多周数中，$\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 的相对位置就发生变化，因为 ω_1 并不是恰好等于 ω_2，所以矢量和 $\bar{c}$ 的值就改变．因此可以把合成的运动近似地描述为一个正弦波形，它具有頻率 ω_1 和一个在 $(b+a)$ 与 $(b-a)$ 之間慢慢地变化的振幅．換句話說，如果 $b=a$，那末就是具有在 $2a$ 和0之間慢慢地变化的振幅（图1.7和1.8）

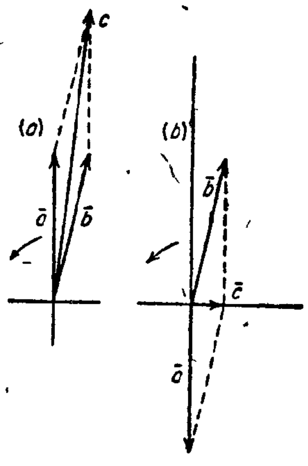

图1.7 說明拍机构的矢量图

这种現象叫做**拍**．拍頻率是每秒鈡內，振幅从一个最小值通过最大值到下一个最小值（图1.8中A到B）的

次数. 拍的周期显然相当于矢量 $\bar{b}$ 对矢量 $\bar{a}$ 一整轉所需要的时間. 因此可以看出拍頻率是 $\omega_1 - \omega_2$.

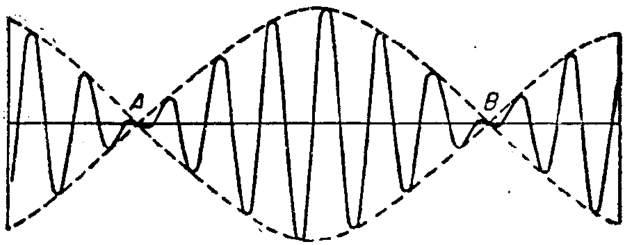

图1.8　拍

［例題］ 一个物体同时作二个振动： $x_1 = 3\sin 40t$ 和 $x_2 = 4\sin 41t$ （式中单位是厘米和秒）. 問合成运动的最大振幅和最小振幅以及拍頻率各为多少?

［解答］ 最大振幅是 $3+4=7$ 厘米；最小振幅是 $4-3=1$ 厘米. 拍的圓頻率 $\omega_b = 41 - 40 = 1$ 弧度/秒. 所以, $f_b = \omega_b/2\pi = 1/2\pi$ 周/秒. 周期 T_b 或一整周的持續时間是 $T_b = 1/f_b = 6.28$秒.

这种現象可以在很多情形中观察到（見第 90 頁、第 366 頁）. 对于成声振动来説，这种現象是特别值得注意的. 音調有一点不同而強度大致相等的二个声音会引起总強度的变动，其頻率等于这二个声音頻率之差. 举例来説，在发电厂中，当发电机开动时可以听到拍. 发电机有“磁鉄的发哼声”，它的主音調等于电流或电压的頻率的二倍，通常是每秒 120 周. 刚好在发电机前面連接着的电綫，其頻率和发电机的电頻率稍有不同. 这样，发电机的发哼声和电綫（其它发电机或变压器）的发哼声是音調不同的，因而就能听到拍.

拍的存在也可以用三角函数来加以証明. 設二个振动分别是 $a\sin\omega_1 t$ 和 $b\sin\omega_2 t$，其中 ω_1 和 ω_2 接近相等而 $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$.

因此

$$a\sin\omega_1 t + b\sin\omega_2 t =$$

$$= a\sin\omega_1 t + b\,(\sin\omega_1 t\cos\Delta\omega t + \cos\omega_1 t\sin\Delta\omega t) =$$

$$= (a + b\cos\Delta\omega t)\sin\omega_1 t + b\sin\Delta\omega t\cos\omega_1 t$$

应用公式(1.6)，合成振动就是

$$\sqrt{(a + b\cos\Delta\omega t)^2 + b^2\sin^2\Delta\omega t}\cdot\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

式中可計算出位相角 φ，但在这种情况中，算出 φ 是无意义的．可以把由根号所給出的振幅写成：

$$\sqrt{a^2+b^2(\cos^2\Delta\omega t+\sin^2\Delta\omega t)+2ab\cos\Delta\omega t}=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\Delta\omega t}$$

上式可以看出是以頻率 $\Delta\omega$ 在 $(a+b)$ 和 $(a-b)$ 之間变化的．

§1-4．水輪机給水管振动的一种情形

直接应用振动的矢量概念来解决一个实际問題如下．

在水力发电站中，可以看到給水管即把水导給水輪机的輸水管是十分剧烈地振动着，以致砖建筑結构的安全成为有問題的．所发現的振动頻率是 $113\frac{1}{3}$ 周/秒，这个頻率与在夫兰西斯水輪机的旋轉部分中水斗数目(17)和速率(400 轉/分)的乘积相一致．給水管所发出响亮的发哼声，在几千米以外都可听得到．此外，当站立处靠近发电站的电力变压器时，就可以清楚地听到給水管和变压器的发哼声之間，頻率为 $6\frac{2}{3}$ 周/秒的拍．水輪机的主要部分簡略地表示在图 1.9 上，图是作在水平面上的，其中輪机轉軸是直立的．水从給水管 I 进入"涡壳" II 中；在 II 中，因为有着 18 个固定、不轉动的导叶，所以主流就分成了 18 个分流．然后，水就进入工作輪的 17 只水斗中，最后轉过 90 度的角而消沒在直立的吸出管 III 中．

图 1.9 上表示出主流所分出 18 个分流中的二个分流．注視其中之一，我們就可看到工作輪每一轉时就有 17 只水斗从水流中經过，因此，水流就受到 17 次冲击．总的說来，每秒鈡經过着 $113\frac{1}{3}$ 只水斗，每秒鈡就使水流得到同数的冲击，这些冲击通过水流传递返到給水管中．不仅是分流 a 中发生这种情况，在其他每一个分流中也是一样的，因此就有 18 个不同始点的冲击到达給水管中，所有这些冲击都有着同样的頻率 $113\frac{1}{3}$ 周/秒．如果所有冲击都有同样的位相，那末就可以用算术方法把它們相加，因而在給水管中就会发生十分強烈的扰动．

假定二个叶片 1 和 1 排成一列时，分流 a 受到它的冲击的最

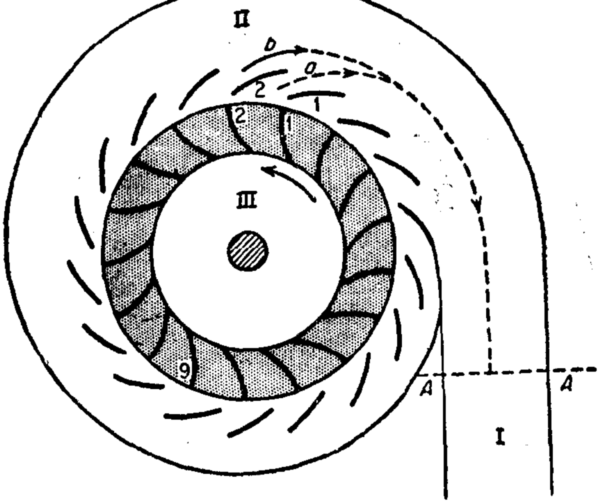

图 1.9　夫兰西斯水輪机的給水管中的振动說明图

大值．那末在分流 b 中的冲击的最大值就发生得略微早一点[正确的說，二个叶片 2 和 2 排成一列的瞬时，要比較早 $1/(17\times18)=$ $=1/306$ 轉]．

分流 a 的冲击以在水中的声速（約 1440 米/秒）[1] 传递回到給水管中，分流 b 的冲击也同样如此．但是 b 冲击所經过的路程略长于 a 冲击的路程，路程的差接近于涡壳圓周的 1/18．因此，冲击 b 将比冲击 a 迟到达給水管中．

在我們所討論的水輪机中遇到的情形是：这二个效应正好彼此抵消，所以二个冲击 a 和 b 同时到达給水管的横断面 AA，即具有同样的位相．当然，这不仅是对 a 和 b，而是对所有 18 个分流来說都是眞实的．在矢量表示法中，这些冲击的作用如图 1.10a 所示，因而在断面 AA 处总冲击是非常大的．

为了消除这种故障，我們把水輪机中現有的 17 只水斗的工作輪拿掉，而用一只 16 水斗的工作輪来代替．这并不影响由 a、b 等等路程长度不同所引起的时間差，但却改变在二个相邻导叶的冲

1）一般的水流速比声速小，所以它的作用可以加以忽略．

击之間的时間間隔. 特别是,在更换工作輪以后,水斗 2 和导叶 2 之間的圓周距离变成二倍大. 事实上,在旋轉水斗 1 发出冲击的瞬时,水斗 9 也发出冲击,因而在老式結构中,水斗 9 是二个静叶之間的中点(图 1.9).

很巧,一个声波經过涡壳圓周之半所需的时間約为 1/2×1/113 秒,所以由水斗 1 和 9 所产生的二个冲击是以反相到达断面 AA 的(图 1.10b). 因此,在断面 AA 处二个相邻分流的冲击之間的位相角是 180 度 ×1/9=20 度,而 18 个分流的冲击就排列成具有零合量的一个圓图.

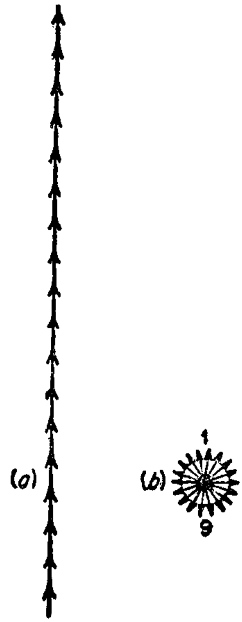

图 1.10 在图 1.9 的断面 AA 处的 18 个分冲击: (a)17 只水斗的工作輪; (b) 16 只水斗的工作輪

上述分析指出,在变更工作輪以后,就使振动会整个地沒有. 但是这种情形却并不是我們所料想的,因为我們所提出的理由仅只是近似的,許多效应都未曾加以考虑(涡壳用一狹窄水道来代替,因此忽略了波前的曲率、波对不同障碍的反射和阻尼的效应). 在实际情形中,使給水管的振幅减小为它初值的三分之一,已是对問題的滿意解答了.

§1-5. 复数表示法

在前几节中已經知道,旋轉矢量可表示諧运动,二个矢量的几何加法相当于二个同頻率諧运动的加法,以及这样一个运动对时間的微分可以理解为 ω 和一个向前轉过 90 度的表示矢量的乘法. 这些矢量,只要略加演算以后便給出具体化諧运动的方法,这方法比考察各正弦波本身要簡单得多.

但是,对于一些数值計算情形来說,矢量法并不很便利,因为这种方法必須把矢量分成水平分量和竖直分量. 举例来說,如果

必须把二个运动相加，如图 1.5 所示，那末我們写出

$$\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$$

就表示是几何加法．計算 $\bar{c}$ 的长度时，即計算和运动的振幅时，我們写成

$$\bar{a}=a_x+a_y$$

这就表示 $\bar{a}$ 是 x 方向的 a_x 和 y 方向的 a_y 的几何和．这样

$$\bar{c}=a_x+a_y+b_x+b_y=(a_x+b_x)+(a_y+b_y)$$

因而 $\bar{c}$ 的长度就是

$$c=\sqrt{(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2}$$

这种方法是相当冗长的，因而就失去了采用矢量的最大优点．

但是，有一种在数值上处理矢量的簡单方法，那就是采用一些虛数．一个复数在图解法上可用平面中的一点来加以表示，平面中实数 1、2、3 等等作在水平方向上，而虛数作在竖直方向上．采用記号

$$j=\sqrt{-1}$$

这些虛数就是 j, $2j$, $3j$ 等等．举例来說，如图 1.11 所示的是点 $3+2j$．把这一点和原点連接起来，就可使复数表示为矢量．如果这矢量和水平軸的交角是 α，而矢量长是 a，那末这个矢量就可写作

$$a(\cos\alpha+j\sin\alpha)$$

諧运动就被旋轉矢量所表示．在上述方程中，把可变角 ωt 代替固定角 α，就得到

$$a(\cos\omega t+j\sin\omega t)\qquad(1.7)$$

上式表示一个旋轉矢量，它的水平投影是一个諧运动．但是，这个水平投影也是(1.7)的实数部分．因此，如果我們說“矢量表示諧运动”，我們的意思就是指旋轉矢量的水平投影表示这个运动．同样，如果我們讲“复数表示諧运动”，我們所指的是式(1.7)

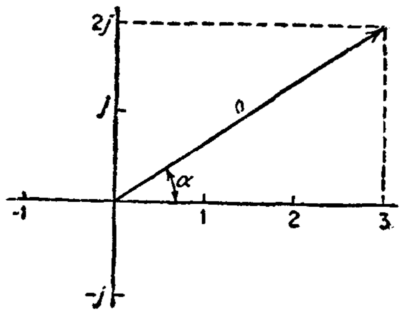

图 1.11　用复数平面中的一点表示的矢量