龚尧南
王寿梅
编著

348

结构分析中的非线性有限元素法

北京航空学院出版社

结构分析中的非线性有限元素法

龚尧南　王寿梅　编著

北京航空学院出版社

内 容 简 介

本书对结构分析中的非线性有限元素法的基本概念、基本方程及具体应用做了介绍，给出了材料非线性和几何非线性问题的列式及其应用。论述了非线性方程各种数学解法及其优缺点。最后给出了结构分析中的非线性有限元素法程序流程图和一个具体程序。

本书可供有关专业的高年级大学生、研究生作教材或教学参考书，也可供航空、航天、轮船、汽车、核反应堆、海洋工程等领域的结构分析人员参考。

结构分析中的非限性有限元素法

龚尧南　王寿梅　編著

責任編輯　胡訓传

北京航空学院出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

北京航空学院印刷厂排版　通县觅子店印刷厂印装

※　※　※

787×1092 1/32　印张：$11\frac{1}{2}$　字数：256　千字

1986年11月第一版　1986年11月第一次印刷　印数：10000 册

统一书号：15432·021　　定价：1.90 元

前　言

近十年来，非线性有限元素法的理论和应用在我国有了很大发展。在作者的学术活动和教学工作中，经常接触到许多非线性的力学问题，因此深感有编写这样一本书的必要性。虽然这种打算在几年前就已经萌生，但由于缺乏时间和其它客观上的原因，一直拖延到今天。现在，在北京航空学院出版社的大力支持和积极协助下，几年前的夙愿终于实现了。当前，已经出版了一些有关非线性有限元分析的书籍，它们都是很有价值的。作者愿以本书从另一角度对这一领域中已经取得的成果作某些补充。

编写书本的目的，是向读者介绍非线性有限元素法的概念、数学表述、以及它的具体应用。在编写的时候，我们设想读者对线弹性分析中的有限元素已经有了基本了解。对于愿意阅读程序设计这一章的读者，我们还认为他们对线弹性分析的*FORTRAN*程序已比较熟悉。此外，连续介质力学和塑性力学本来也是本书的理论基础，但本书并不要求读者学习过这方面的知识，我们将就必须涉及的部分內容在有关章节中作简单介绍。

按内容，本书可分为五部分。第一、二两章组成第一部分，主要介绍非线性有限元素法的基本概念和后面要用到的固体力学的基础知识。已经学习过连续介质力学的读者，可不必细读第二章，只需了解一下这里所使用的符号就够了。第二部分讨论材料(物理)非线性问题。其中第三章详细讨

论了一般金属材料的弹塑性分析，第四章则简略地叙述了诸如高温蠕变、粘弹性等几个其它类型的材料非线性问题。第三部分讨论几何非线性，它由第五、六、七等三章组成，分别叙述了大变形问题，稳定性问题，以及接触问题。讨论中，重点放在有限元素法的数学表述上。第四部分，即第八章，介绍各种非线性方程的数学解法，并对它们各自的优缺点作了分析。以上第二、三、四等三个部分大体上是各自独立的，读者可根据自己的需要和兴趣进行阅读。本书的第五部分讨论了程序设计中的几个问题，这些问题在有限元应用软件的开发和评估中是必然会遇到的。虽然在线性分析的应用软件中也会遇到，但在非线性分析的环境下将更为突出。在这一章的最后，我们还给出一个非线性三维实心元的结构分析程序作为示例。在源程序中，加进了必要的（英语）注释。在本章中还解释了分析流程，主要子程序的一些功能，以及主要变量的物理含义等。由于篇幅的限制，我们不可能在本书中给出一个包含各种单元在内的大程序；之所以用三维实心元作代表，是鉴于它在应用上的普遍性。因此，读者也可以用这一程序来处理梁、板、壳和二维等各种非线性问题。当然，从经济性和效率的角度来看，这是不可取的。

本书是针对结构分析问题来写的，但由于有限元素法当前已成为在数学上求解偏微分方程的一种有效的数值计算方法，因此它不仅可用于航空、航天、船舶、汽车、核反应堆、以及海洋工程等领域的力学分析，而且对其它领域中的分析人员来说，也具有一定的参考价值。本书还可供有关专业的高年级学生或研究生作为教材或教学参考书用。

本书的第一、二、五、六章由龚尧南编写，其余由王寿

梅编写。由于我们的水平所限和时间仓促，必定会有错误和不妥之处，恳切地希望读者批评指正。

在本书行将出版之际，作者向为本书审稿的胡海昌教授和张相麟教授致以衷心的谢意，他们认真审阅了本书的初稿，提出了许多十分宝贵的意见，这些意见在本书中都已有了具体的反映。同时，作者也向北京航空学院出版社的编辑和出版人员以及为本书付出了辛勤劳动的印刷工人同志和其它人员致以衷心的谢意。

作者于北京航空学院

1986年2月

目　　录

第一章　绪　论

在本世纪的前半叶，固体力学和结构力学方面的许多文献，都是线性理论在各种边值问题上的应用。当然，其中也出现了一些非线性方面的研究，一部分是关于材料非线性（弹塑性）的，更多的则是关于几何非线性（稳定性）的研究。但对于当时工程界和科学界的极大多数人来说，固体力学理论的应用，仍然只意味着求解线性问题。其原因是不难理解的。线性理论由来已久，过去，大部分实际结构的性态都可以恰当地用线性理论来描述，因为在正常载荷的作用下，大部分实际结构的变形小得很难由肉眼所察觉，而在小变形和室温下，普通的常用材料如钢和铝的本构方程可以看成是线性的而不致有显著误差。

现在，情况发生了剧烈的变化。从五十年代起，已经研制并在工业生产中采用了许许多多的新材料，例如高分子材料，合成橡胶，以及火箭的固体燃料，等等，它们的非线性性态再也不能用经典的线性本构关系来描述了。与此同时，由于大量采用柔性结构和变形很大的可膨胀结构，几何非线性问题（如大挠度效应和屈曲后的性态）也日益成为人们研究的主题。

尽管在四十年代和五十年代初期，人们对结构和材料性态的非线性理论的研究已经取得了显著的进展，但应用这些理论来解决实际问题中的非线性现象，仍然存在着不少困

难。非线性理论导致非线性的控制方程和边界条件。只有在物体的几何形状和边界条件十分简单的极少数例子中，才有可能获得解答，而且即使是在这些例子中，也往往需要借助于数值方法才能得到定量的结果。

虽然由于种种原因使非线性分析长期未能得到广泛的应用，但发展非线性分析的能力，这种要求是客观存在的。首先感到迫切需要的是航空及宇航部门。由于要求结构的重量更轻和更加安全可靠，这一领域中的设计和制造人员就不能不持续地更新他们的设计概念和工艺方法，不断地研究新的构造形式，采用新的结构材料和新的制造技术。这些新概念和新技术的应用又要求在分析中有更加合理而可靠的计算模型和分析方法。另一个对非线性分析有迫切感的是核能工业。在反应锥的设计与制造过程中，同样存在着大量的非线性问题。正是在这两大领域中，非线性分析的研究工作首先取得了重大的进展。

非线性分析之所以能取得今天这样的成果，在很大程度上应归功于数字电子计算机的问世和有限元素法的崛起。当非线性固体力学在理论上已取得重大进展但在应用上却徘徊不前的时候，迄今为止世界上最强有力的获取定量数据的设备——数字电子计算机问世了。从事计算科学的研究人员随即把注意力转向了象控制论和非线性规划等一些新的领域，而研究连续介质力学的大多数人却仍然停留在主题的纯理论方面。它预示着存在有一个富饶而充满潜力的重要中间地带，这就是非线性连续介质的数值分析，它能把连续介质力学的近代理论和数值分析的近代方法（即计算机方法）结合在一起。现在已经很清楚，这一重要的中间地带实际上就

是有限元素法。

我们知道，即使是线性结构的分析，由于结构的复杂性，一般也很难用解析法来完成。因此，在四十年代，实际结构的线性分析往往是通过不同的途径来实现的：或者是对结构本身和加载方式进行大量简化；或者是采用数值方法进行分析。有时是两者兼用。

当时有两种主要的数值分析（或离散化）方法：差分法和变分法。差分法是用差分表达式来逼近微分方程表达式，它的最大优点是离散算子是稀疏的，而且应用普遍。直接变分法的优点则是可以把连续条件放松，而且由它导出的离散方程（代数方程）可以稳定地向正确解逼近。但由于在采用直接变分法时人们需要用解析的方法去完成多重积分的运算，而且由此而得到的代数方程是满而稠密的，所以庞大的计算工作量使它不能象差分方法那样为人们所普遍采用。

五十年代末与六十年代初出现了有限元素法。有限元素法的要旨是分片逼近。由于它巧妙地把差分法和直接变分法的优点揉合在一起，即放松了连续性要求，稳定逼近，稀疏的离散算子，以及应用普遍，使它获得了成功。数字电子计算机的普及和有限元素法的迅速发展，给实际结构的线性和非线性分析添加了巨大的生命力。随着非线性性态的机理愈来愈被人们所了解，非线性理论和分析方法日益完善，电子计算机和有限元分析应用软件的功能日益扩大和使用日益普遍，非线性分析也就日益扩展到其它一些工程领域，如机械工程，材料科学、建筑和土木工程、海洋工程、造船、汽车、电力、水利、冶金、地震、地下工程以及生物力学等。事实上，当前非线性有限元素法的应用已经超出了工程的概念，

成为一种更加概括的数学方法。

在工程学、物理学、以及应用数学中，大多数问题都可以分为连续的和离散的两类，如果问题是连续的，则又称之为場问题，而場问题往往可以用某种离散的问题来逼近。有限元素法就是把连续问题（場问题）变换为离散问题并求解的一种方法和手段。无论问题是连续的还是离散的，系统的状态总是通过变量来描述的。在这些变量中，一部分是独立的，另一部分是相关的。这些独立的和相关的变量，在定义域中必须满足各种各样的关系式。如果把这些关系式根据物理定律演绎成一个或几个方程，则这个或这些方程就称为控制方程。通常，場问题的控制方程都是以偏微分方程的形式出现的，而在离散问题中，控制方程则是一组代数方程。前面说过，有限元素法是把连续问题变换为离散问题并求解的一种方法。因此，我们现在可以说，有限元素法在数学上就是把偏微分方程变换为代数方程（组）并求解的一种方法。虽然在早期它完全是基于物理直觉发展起来的一种离散化方法，但今天它已经成为在数学上求解偏微分方程的一种有效的数值方法。大家都知道，当偏微分方程是线性的时，它的解的性质是明确的，而非线性偏微分方程则不然，它的解是很复杂的，因此当在电子计算机上求解非线性的偏微分方程时，非线性有限元素法就成为一种有效的方法。正是在这一意义上，我们说有限元素法的应用已经超越工程的概念，它已成为一种数学工具。当然，本书的任务不是讨论作为数学工具的有限元素法，而将只限于讨论结构的非线性分析这一局部的或专门的命题。

结构分析中的非线性有限元素法是在线性有限元素法的

基础上发展起来的。在有限元素法中，元素的应变-位移关系可以表示为

$$\mathbf{e}^{e}=\mathbf{B}\,\mathbf{u}^{e} \tag{1-1}$$

其中，上标e表示属于元素一级的物理量，e和u分别是应变和位移向量，B是表征元素的应变-位移关系的变换矩阵。此外，元素材料的应力-应变关系可表示为

$$\sigma^{e}=\mathbf{D}\,\mathbf{e}^{e} \tag{1-2}$$

其中，矩阵D与元素材料的特性有关。于是，元素的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^{e}=\int_{V^{e}}\mathbf{B}^{T}\mathbf{D}\,\mathbf{B}\,dV \tag{1-3}$$

在静力分析中的有限元刚度方程（平衡方程，也就是取位移为基本未知量时的控制方程）为

$$\mathbf{K}^{e}\mathbf{u}^{e}=\mathbf{p}^{e} \tag{1-4}$$

其中$\mathbf{p}^{e}$是作用在元素结点上的外载荷向量。实际上，作用在元素上的载荷不仅可以有集中载荷，而且可以有分布载荷如表面力f_s和体积力f_b等，它们可以被折算成等价的结点载荷向量$\mathbf{p}^{e}$。

在线弹性材料的情况下，公式（1 2）和（1 3）中的D矩阵是不随应变e改变的量，但在非线性弹性和弹塑性材料的情况下，D是应变e（应力σ）也就是位移u的函数，从而K也是位移u的函数。在公式（1-1）及（1-3）中，B与位移插值多项式h_i相对于坐标x_j的偏导数$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}$有关，而$h_i$则应是有限元集合体的位形的函数。如果有限元素集合体的位移是无限小量，则可近似地认为集合体的位形与位移无关，这时B自然就不是位移u的函数，否则，集合体的位形

将跟随位移而变动，B和K将是位移u的函数。此外，积分区间V^e（亦即元素的体积）一般来说它也是随位移而变化的，只有在位移为无限小量的情况下，才能近似地认为V^e是不变的常量。

现在我们可以看到，线性分析与非线性分析之间的差别是在哪些环节上引入的以及是怎样引入的。在线性有限元法中，假设有限元集合体的位移是无限小量，并且材料是线弹性的。此外，还假设在施加载荷的过程中，边界条件的性质不变。根据这些假设，静力分析的有限元平衡方程（1-4）是线性的，集合体的位移u是载荷p的线性函数。

反之，当位移的影响不能略去时，公式（1-4）是非线性的。这里应当指出，所谓位移的影响不能略去，可以有不同的含义。其一，是指位移比较大，使元素的变形已经进入塑性变形的范围；其二，是指应变比较大，因而应变与位移导数之间不再保持线性关系；其三，位移引起的应变并不大，但转动很大，在建立平衡方程时，必须计及这种转动；而所谓"很大"，不一定是指量值很大，而是指不计及这种转动时，将会导致分析结果的很大误差甚至使分析结果成为无意义。当然，对于非线性的弹性材料来说，不论位移多大，响应都是非线性的。

由此可见，非线性效应可以归结为两大类：材料非线性和几何非线性。当用公式描述具体的工程问题时，这种分类常可带来很大方便。在非线性有限元素法的发展早期，非线性分析是在材料和几何两方面同时而分别地发展的，后来才汇合在一起。

在材料非线性问题中，研究的是应力和应变之间的关

系，即本构关系。在单向受力的情况下，本构关系可以很容易地通过实验的办法来获得，但在多向受力的情况下，问题就复杂得多；材料是否达到屈服，并不取决于某个应力分量σ_{ij}是否达到屈服，而是取决于所有应力分量的某种组合。这时应该定义一个等效应力$\bar{\sigma}$，并且确定，当等效应力$\bar{\sigma}$达到多大时材料将开始屈服。这就是屈服准则。

在几何非线性问题中，主要讨论元素的运动关系式和平衡关系式，即应变与位移的关系。为此，就应该给出参考标架（坐标系统），使运动方程和平衡方程中的力和位移能藉以表示。这是非线性分析中最困难的。通常，在非线性分析中有两种不同的参考标架可供采用：物质坐标系（或拉格朗日Lagrange坐标系）以及空间坐标系（或尤拉Euler坐标系）。如果在用数学公式描述有关的物理定律以及物质特性时以物质坐标X^k作为独立变量，就称为拉格朗日描述法；反之，若以空间坐标x^k作为独立变量，则称之为尤拉描述法。除这两种描述法外，还有修正的拉格朗日描述法。应该指出，由于拉格朗日描述法把注意力放在特定的物质点上（在位移的变化过程中，我们跟踪的是特定的物质点），而尤拉描述法则把注意力集中在特定的空间点上，因此在应用中，拉格朗日描述法更适合于固体力学问题而尤拉描述法则更适用于流体力学问题。

在非线性有限元素法中需要讨论的另一个问题是非线性方程的解法。迄今为止，已经出现了许多有效的解法，如精确解法（包括逐次逼近法，牛顿-拉夫森Newton-Raphson方法，总位能最小化方法等），初值法（如增量法，摄动法），一阶自校正方法，以及二阶自校正方法等。但是，没有一种

方法是尽善尽美的。在选择非线性方程的具体解法时，必须综合考虑各种因素，如问题的类型（几何非线性还是材料非线性），问题的非线性程度，问题的数学描述方法，对计算精确度的要求，计算的效率和经济性，计算机存贮空间的利用，等等。

非线性有限元素法从六十年代中期开始发展以来，至今已经将近廿年了。在这期间，非线性有限元素法有了许多成功的实际应用，因而日益受到人们的重视。原因是多方面的。主要有：(1) 需要进行非线性分析的领域增多了；(2) 由于计算机科学的发展，非线性有限元分析的能力迅速增大；(3) 出现了许多使用方便、结果可靠的有限元分析大型程序。当然，有限元素法本身数学理论基础的日益完备和坚实是它不断取得成功的主要保证。但所有这些成就，并不意味着非线性有限元素法的发展已经达到完美境界，特别是在实际应用上，仍然有着许多困难问题需要解决。

本书的目的是希望能对从事非线性结构分析的读者有所帮助，同样也希望它能作为工程力学专业高年级本科生和研究生的参考书籍。在第一章至第二章中，我们介绍了非线性有限元素法的基本概念和它的理论背景；从第三章起，介绍材料非线性和几何非线性问题的列式方法和具体应用；最后，在第八章及第九章中，我们将讨论非线性方程的数学解法和它在计算机上的实施，并给出一个典型的分析程序，可以用它来分析一些非线性的结构分析问题。

参 考 文 献

[1] 龚尧南，王德荣：《非线性有限元》。《力学进展》，1980年第10卷第2、3期合刊。