

书 2

地震频度—震级关系的 时空扫描

李全林 于 绿 郝柏林 陈锦标 编著

地震出版社

地震频度—震级关系的时空扫描

李全林 于 录 编著
郝柏林 陈锦标

地震出版社

1979

内 容 提 要

本书对地震频度—震级关系中各参数进行动态时空扫描的方法作了系统的介绍。从参数的物理意义、数理统计分析方法、统计检验到具体震例的计算结果,都作了详细说明。此外,还讨论了程序和数据的组织,并附有用 FORTRAN 算法语言编写的主要程序模块。可供地震工作者参考。

地震频度—震级关系的时空扫描

李全林 于 涿 编著
郝柏林 陈锦标

地 震 出 版 社 出 版

北京三里河路54号

北 京 印 刷 二 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

787×1092 1/16 0 3/4 印张 160千字

1970年11月第一版 1979年11月第一次印刷

统一书号: 13180·67 定价: 0.70元

前 言

一九七六年唐山地震发生后，我们对京津唐渤张地区十多年来的地震活动进行了比较系统的分析。用电子计算机对频度—震级关系中各参数随时间、空间的变化进行动态扫描，发现唐山地震前，其附近地区的地震活动经历了客观的、统计上可信的反常变化。我们试图在唯象讨论的基础上，说明这种时空扫描方法越出了单纯统计预报的范畴，有可能发展成为观察应力集中和转移，从而监视破坏性地震孕育过程的一种手段。现将我们采用的方法和所得结果初步总结出来，供地震战线的同志们参考。

虽然书中讨论的重点是大范围内的时空扫描，但是本书介绍的一些方法，对于地震台站工作者来说，利用单台资料监视其周围地区的地震活动也是适用的。

在叙述上，我们力求自成一体。从参数的物理意义、数理统计分析方法、统计检验到具体震例的计算结果，都作了比较全面的介绍。附录中还讨论了程序和数据的组织，提供了用算法语言编写的主要程序模块。我们不要求读者具备数理统计的系统知识，一切必要的概念将在叙述中逐步引出。但是，读者应有微积分的基本常识。一些推导稍详细的小节或段落可在初读时跳过，这并不妨碍对全书内容的理解。我们希望做到，使关心这类问题的读者不必再查阅更多的资料，就可以着手开展工作。

这次对频度—震级关系进行时空扫描的初步尝试，是以我国地震战线许多同志的劳动成果为基础的，它受到了各方面的支持。毛美婵、李德成、卢琪、王鼎盛、许忠淮、牟其铎、郭瑛、平凤鸣等同志在不同时期参加了这项工作，特向他们表示感谢。

作者 1978年3月于北京

目 录

第一章 引论	(1)
§1 频度—震级关系	(1)
§2 b 值的物理意义	(2)
§3 频度—震级关系的唯象推导	(4)
第二章 b 值统计分析方法	(7)
§1 基本概念	(7)
§2 最大似然法	(8)
§2.1 b 的估值	(8)
§2.2 最大似然估值的性质	(10)
§2.3 误差估计	(13)
§3 线性最小二乘拟合	(14)
§3.1 a 和 b 的估值	(14)
§3.2 线性最小二乘估值的性质和误差估计	(17)
§4 指数分布的非线性最小二乘拟合	(23)
§5 时空扫描的具体作法	(26)
§6 数据整理	(28)
§6.1 关于震级问题的讨论	(28)
§6.2 数据的归纳整理	(31)
第三章 京津唐渤张地区时空扫描结果	(37)
§1 唐山、卢龙、宁河地区 b 值时间扫描	(37)
§1.1 唐山震源区 b 值时间扫描	(38)
§1.2 震源附近不同区域的比较	(41)
§2 全区地震个数 N 值和 b 值的时空扫描	(43)
§2.1 全区地震个数 N 值和 b 值的时间扫描	(43)
§2.2 全区地震个数 N 值的空间扫描	(43)
§2.3 全区 b 值空间扫描	(46)
§2.4 全区 $M_L \geq 4.0$ 的震中分布	(47)
§2.5 b 值的分块时间扫描	(48)
§3 其它震例的比较	(50)
§4 对唐山地震孕育过程的一点认识	(50)
第四章 统计检验和统计方法评述	(53)
§1 不同方法所得结果的比较	(53)
§1.1 结果的一致性	(53)
§1.2 误差估计	(54)

§1.3 个别大震的影响	(55)
§1.4 起算震级和分档方式的影响	(57)
§2 统计检验	(58)
§2.1 相关系数检验	(59)
§2.2 χ^2 检验	(61)
§2.3 柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验	(62)
§2.4 F 检验	(65)
§2.5 唐山震例统计检验结果	(66)
§3 统计分析方法评述	(68)
第五章 讨论	(71)
§1 b 值分析的历史回顾	(71)
§2 主要结论和有待进一步研究的问题	(72)
附录 A 程序和数据的组织	(74)
§1 地震目录的穿孔	(74)
§2 目录的合并和挑选	(75)
§3 固定区域的时间和个数扫描	(75)
§4 固定时期的空间扫描	(76)
附录 B 主要程序模块	(78)
(1) 加工原始地震目录的程序 DATPC	(78)
(2) 合并地震目录的程序 LSAP	(79)
(3) 子程序 LSIN	(80)
(4) 固定区域的 N 值、 b 值时间和个数扫描主程序 TNFR	(81)
(5) 按凸多边形选地震目录的子程序 SOA	(82)
(6) 判断震中是否在凸多边形内的子程序 SOBLK	(83)
(7) 时间和个数扫描控制子程序 SOBL	(84)
(8) 拟合控制子程序 FIT	(85)
(9) 最大似然法子程序 MAXLH	(87)
(10) 线性最小二乘拟合子程序 LSQR	(87)
(11) 非线性最小二乘拟合子程序 TNG2V	(88)
(12) χ^2 和柯尔莫哥洛夫-斯米尔诺夫检验子程序 CHECK	(90)
(13) 打印扫描区地震简目的子程序 SOC	(91)
(14) 儒略日转换子程序 DATE	(91)
(15) 固定区域数据块 TID	(92)
(16) 固定时期的 N 值、 b 值空间扫描主程序 FPSC	(92)
(17) 扫描子程序 SCANP	(94)
(18) 子程序 SOQUD	(95)
(19) 空间扫描拟合控制子程序 REGRN	(95)
附录 C 唐山震源区地震简目	(97)
参考资料	(101)

第一章 引 论

一次破坏性的大地震决不是突然爆发的。它要在相当大的空间范围内,逐渐积累弹性能量,经历比较长时间的孕育过程,从缓慢的量变走向突变。在将来可能发生强烈地震的地点附近及其周围广大区域,地球物理场的许多参数都会有反常变化。如果我们能够连续不断地在空间各点观测这些参数,实现动态的“时空扫描”,及时发现异常区的形成,监视其发展过程,同时与现场的短临前兆观测手段密切配合,就能使地震预测预报工作建立在更为准确的科学基础上。实现这种多参数的动态时空扫描,要求有自动化程度较高的测量台网和强大的数据处理系统。这是一部分专业地震工作者正在致力解决的研究课题。

就目前条件看,比较直接、比较连续可靠的原始数据还是由地震活动本身提供的。一个布点较密的地震台网,例如1966年建立的北京台网^[1],从每次地震中都可以接收到大量的数据,包括各种频率范围的地震波记录。利用这些数据能够推算出关于震源区和地震波经过地区的许多信息。近几年在地震预报方面初见成效的波速比分析就是一例。如果用动态扫描方式,连续地监视大片地区小震震源参数、应力降、初动符号、 b 值、波速比的变化等等,自然可以更清楚地了解应力集中和变化的过程。当然,这类工作要求采集较多的数据,完成大量的计算。

本书介绍动态时空扫描中最简单易行的一种,即根据一个地区比较完整的地震目录,分析地震活动是否异常。通常所说的“前震”是一个过于狭窄的概念。事实上,许多大地震并没有明显的前震序列。但是,一次大地震不管有没有“前震”,主震之前若干年内地震活动是有反常的,它反映在地震活动水平、空间分布、大小震比例等各个方面。正是这类震前活动或“广义前震”才更应当密切注意。这种地震活动的反常只靠人工分析地震目录往往不易察觉,更难从时间、空间变化的全局来把握。但是对地震频度—震级关系中各参数作动态时空扫描,就能使地震活动的变化有一个直观形象的显示。其实,这就是地震工作者熟悉的 b 值分析和地震活动性研究的继续发展。以往 b 值分析方面存在不少混乱情况,对于同一地区,不同作者、不同方法往往给出不同的结果。我们针对这个问题,对各种统计方法作了分析比较,说明可以得出反映客观实际的结果,同时阐明 b 值不是一个单纯的统计分析参数,它具有直接的物理意义,即反映一个地区承受平均应力和接近强度极限的程度。因此,与国外特别是某些苏联人的看法相反, b 值不是常数,而应该有时空变化。事实上,我们也从大量数据处理中得到了统计上可信的 b 值变化,其总的变化规律与物理预期相符。

§1 频度—震级关系

B·古登堡^[2]在研究世界地震活动性时,整理了大量的仪器记录,根据地球上各大地震区六级以上地震数目的统计,他发现在一定的震级区间($M \pm 0.05$)内频度 n 与 M 有以下关系:

$$\lg n = a - bM, \quad (1.1)$$

这是一个经验公式，其中 a 和 b 是两个参数，可根据一定地区、一定时期的地震目录用统计方法估算出来。这就是所谓频度—震级关系，它实际上是指数分布

$$n = 10^{a-bM}, \quad (1.2)$$

取对数后成为 M 的线性函数。

对于统计分布 (1.2) 式我们指出两点：

第一，自然界中在一定范围内遵从指数分布的事物很多。例如电子元件的可靠度函数及天空中恒星数目按星等的分布等。

第二，指数分布只能适用于自变量的一定区间，而不是全部范围。例如，(1.2) 式本身并没有完全排除震级很大的地震，而事实上地球上发生的地震震级都在一定限度之内。另一方面，(1.2) 式说明负震级的微震数目将急剧上升。但能量极小的微震，从物理机制上必然会不同于中强地震，没有理由用同一套参数 a 、 b 来描述。在数学上，这表现为分布 (1.2) 式不能在 $(-\infty, \infty)$ 的整个范围内归一，而只能取区间 (M_0, ∞) 。这里 M_0 是起算震级。

简单地说，固定参数的指数分布是只能适用于一定震级范围的经验公式。只有在这个分布成立的条件下，用统计方法确定的参数 a 和 b 的置信度才可能较高。在计算过程中，这是要通过统计检验随时注意的。

§2 b 值的物理意义

我们的基本出发点是：频度—震级关系中的参数 b 不仅是一个统计分析参数，它还有直接的物理意义。 b 值随地区和时间的差异，反映了不同地区在不同时期所承受的平均应力和该区域内部平均强度的变化。因此我们提前讨论 b 值的物理意义。

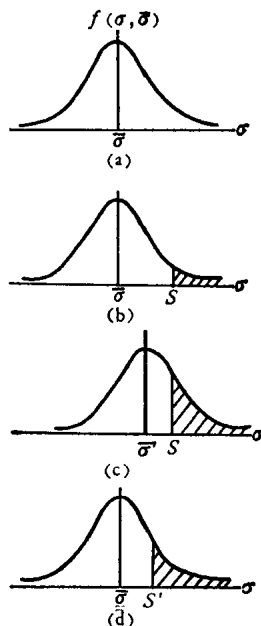


图1.1 分布函数
 $f(\sigma, \bar{\sigma})$

对于地震这样复杂的自然过程，在目前的认识水平上，只引入少量参数和简单概念的唯象理论比细致具体的模型更为重要。六十年代，茂木〔8〕和肖尔茨〔4〕在关于岩石破裂试验的一些论文中提出了这样一个唯象理论的框架。由于断裂过程的基本图象看来与尺度无关，可能适用于从岩石试验到地震活动的相当大的范围〔5〕。因此我们在这里抽取和发挥上述理论的基本思想，说明 b 值的物理意义。比较详细的推导放到下一节中。

如果一个地区处于应力场作用下，总可以定义由加在区域边界上的外力决定的平均应力 $\bar{\sigma}$ 。这是弹性力学中的一个简单事实。平均应力 $\bar{\sigma}$ 的式子在下一节中给出〔见(1.10)式〕。它的具体表达式对我们并不重要，只要有这么一个概念就够用了。假如应力场是均匀的，则把这个地区分割成许多小区后，每个小区的平均应力都是 $\sigma = \bar{\sigma}$ 。有内部不均匀性存在时， σ 的值可能偏离平均值 $\bar{\sigma}$ 。可以用分布函数 $f(\sigma, \bar{\sigma})$ 来反映 σ 偏离 $\bar{\sigma}$ 的情况。见图 1.1 (a)，它代表从整个地区中任取一个小区，它的平均应力等于 σ 的概率。只要外部应力压倒内部不均匀性，成为矛盾

的主要方面,对于整个地区就可以使用统一的分布函数 $f(\sigma, \bar{\sigma})$ 。

对于这个地区还可以定义一个平均强度 S 。当某处局部应力 $\sigma \geq S$ 时就有发生破裂的危险。这个 S 并不简单地就是岩石的机械强度极限,那基本上是一个常数,而 S 可以因为围压的消长、地下水的出入、微裂缝的产生和愈合等种种原因发生变化。在唯象理论的框架内,也不必对 S 的变化规律作出具体解释,只要能定义这样一个量就成了。整个地区内发生破裂的危险,决定于有多少小区内的局部应力 σ 已超过 S 。因此,危险的大小可由分布函数 f 的积分来表示:

$$F = \int_S^{\infty} f(\sigma, \bar{\sigma}) d\sigma, \quad (1.3)$$

这就是图1.1 (b) 中斜线下的部分,可以叫作“危险面积”。

茂木和肖尔茨提出的唯象理论的最主要的结果,就是频度—震级关系中的参数 b 正比于图1.1 (b) 中剩下的“安全面积”:

$$b = C(1 - F), \quad (1.4)$$

比例系数 C 是一个数值在 1 左右的常数。我们把详细推导放到下一节中。在这里只形象地讨论一下 b 值发生变化的两种可能情形。

一种情形是整个地区内部承受的平均应力 $\bar{\sigma}$ 发生了变化,这是因为作用在区域边界上的外力改变了〔见后面第 (1.10) 式〕。例如,图 1.1(c) 表示出 $\bar{\sigma}'$ 大于原来 $\bar{\sigma}$ 的情况,分布的中心向右移动,危险面积增大。根据 (1.4) 式,这时 b 值要降低。

另一种情形是整个地区的平均强度 S 下降。图 1.1 (d) 中平均强度从 S 下降到 S' , 同时假设平均应力 $\bar{\sigma}$ 并没有改变。这时图中的“安全面积”缩小, b 值也要降低。

实际上当然是上述两种因素与其它一些因素错综复杂地起作用。例如当平均强度 S 的增加起主要作用时, b 值表现为上升,当平均应力 $\bar{\sigma}$ 的增加起主要作用时, b 值表现为下降。又如在孕震过程的一定阶段,应力进一步向未来发生主破裂的区域集中,使这个区域的 b 值继续下降。而在其周围地区的应力可能比原来降低,因此 b 值也会升高。如果仍然对原来所取区域计算 b 值,大部分地区的 b 值升高就会掩盖主破裂面附近 b 值继续下降的现象,使总效果表现为 b 值回升。

由 b 值变化反映出来的孕震过程还有另一个值得注意的侧面。上面对 b 值物理意义的唯象解释本质上是统计的,而 b 值本身又是由地震目录用统计方法确定的。每个 b 值有一定的统计误差界限,对于其置信程度可以作各种统计检验。凡是为计算 b 值选定的时空范围正好在统一的应力场作用下,也就是说可以用同一分布函数 $f(\sigma, \bar{\sigma})$ 和平均强度 S 描述,下一节中推导的频度—震级关系就应能很好地成立,因而统计检验也应当能顺利通过。反之,人为地把不属于同一应力场控制的地区和时期放到一起来计算 b 值,其统计误差必然增大。当然,如果时空范围取得太大,地震数目很多,实际上求得的是各地区各时期 b 值再次平均的结果,统计误差也可能不大。因此时空区间的选择是否反映客观过程,对于 b 值的置信程度有很大影响。考察 b 值高低变化的同时,还必须参照其统计误差的大小。

本节介绍的 b 值唯象理论的突出特点就是简单地反映了事物的最主要方面。它甚至不受具体的孕震模型的限制,因而还大有充实、发展的余地。例如,完全可以改换一下语言,把平均应力 $\bar{\sigma}$ 和平均强度 S , 换成介质中贮存的平均势能密度 $\bar{\epsilon}$ 和平均能量密度极限 $\epsilon_{\dots}$ (这

是某些苏联人提出的“能量模型”〔6〕中的两个参量), 全部讨论也是成立的。

§3 频度—震级关系的唯象推导

现在比较详细地推导 (1.4) 式。这个式子对于 b 值的物理解释有关键意义。不关心细节的读者, 可以直接去阅读第二章。

首先, 我们说明, 弹性体内应力场无论均匀与否, 都可以定义只由作用在边界上的外力决定的平均应力。假定弹性体内没有温度梯度, 而且构造力的变化极其缓慢, 我们可以使用弹性力学中的平衡方程:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (1.5)$$

和边界条件

$$\sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} n_k = P_i, \quad (1.6)$$

其中 σ_{ik} 是应力张量, P_i 是作用在外边界单位面积上的外力的第 i 分量, n_k 是边界面积元法线的 k 分量。以下各式中, 都把求和符号省去。只要式子中出现重复两次的下标, 就表示对这个下标要完成求和。例如, (1.5) 式可写成:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

将 (1.5) 式乘以 x_i 并对整个体积积分:

$$\int x_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = 0, \quad (1.7)$$

把被积表达式补足成散度形式:

$$x_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i \sigma_{ik}) - \sigma_{ii}, \quad (1.8)$$

第一项利用高斯定理可化为面积分, 第二项积分后给出平均应力 $\bar{\sigma}_{ii}$, 于是

$$\oint \sigma_{ik} n_k x_i df = \int \sigma_{ii} dV \equiv V \bar{\sigma}_{ii}, \quad (1.9)$$

df 是面积微分元。利用边界条件 (1.6), 并作对称化得:

$$\bar{\sigma}_{ii} = \frac{1}{2V} \oint (P_i x_i + P_i x_i) df. \quad (1.10)$$

这就是所要求的平均应力的公式, 它完全由作用在边界上的外力 P 和边界的形状决定。可见平均应力的引入并不要求均匀, 而且对每一个应力分量都可以进行平均。在我们前面介绍的简单唯象理论中, 平均应力简化为一个 $\bar{\sigma}$: 不管是压缩、拉伸还是剪切, 哪一个起主要作用就取那一个。

其次, 不仅对于大块介质, 而且对于它的每一个小区域都可以定义平均应力。我们把这种小区域的平均应力简单地称作每点的应力 σ 。介质内有不均匀性存在时, 每点的应力 σ 可

以看成随机变量,它在 $\bar{\sigma}$ 附近有一个分布 $f(\sigma, \bar{\sigma})$ 。这是概率分布,而不是空间分布。对于分布函数 $f(\sigma, \bar{\sigma})$ 不作什么具体限制。可以要求归一:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma, \bar{\sigma}) d\sigma = 1. \quad (1.11)$$

($\sigma \ll \bar{\sigma}$ 时, f 衰减很快, 积分下限推到 $-\infty$ 比较方便。)

再为介质定义一个平均强度 S 。当局部应力 $\sigma \geq S$, 产生大量微裂缝。介质内部应力超过 S 的概率就是(1.3)式给出的“危险面积”:

$$F \equiv F(S, \bar{\sigma}) = \int_S^{\infty} f(\sigma, \bar{\sigma}) d\sigma.$$

显然 $0 \leq F \leq 1$ 。

F 的两个参数代表了唯象理论中考虑的两个主要因素: $\bar{\sigma}$ 是介质所承受的平均应力, S 是内部平均强度,两者都可以随时间变化,对于不同的空间范围,它们的数值也会改变。 $\bar{\sigma}$ 和 S 变化的具体原因和方式,则超出了唯象理论的范围,应当由各种孕震模型去说明。

分布函数 $f(\sigma, \bar{\sigma})$ 的引入反映了介质内部的某种不均匀性,但是使用统一的 $\bar{\sigma}$ 、 S 和同一个分布函数 f 来描述,又表现了所取的时空范围内的均匀性。这个均匀或不均匀不是一成不变的。外界应力 $\bar{\sigma}$ 的作用范围加大,会使不均匀性退居次要地位,扩大使用同一套 $\bar{\sigma}$ 、 S 和 $f(\sigma, \bar{\sigma})$ 的区域。如果计算 b 值时所取的时空区间与这个客观的范围符合,所得结果的统计误差就小。这个通过统计检验反映出来的均匀与不均匀的辩证关系,是前面介绍的唯象理论的基本精神。

现在来考虑介质内裂缝数目的变化。每个裂缝以其自身面积 A 为参数。面积在 A 到 $A+dA$ 之间的裂缝数目是 $n(A)dA$ 。面积大于给定 A 的累计裂缝数为:

$$N(A) = \int_A^{\infty} n(x) dx, \quad (1.12)$$

显然

$$\frac{dN}{dA} = -n(A). \quad (1.13)$$

在(1.13)式两边乘以 dA 、除以 $N(A)$,得

$$\frac{dN}{N} = -\frac{n}{N} dA. \quad (1.14)$$

引入

$$g(A)dA = \frac{n}{N} dA, \quad (1.15)$$

即面积在 A 与 $A+dA$ 之间的裂缝数在面积大于 A 的裂缝总数中所占的比重。换句话说, $g(A)dA$ 代表裂缝面积增长到 A 与 $A+dA$ 之间后停止增长的概率。

$g(A)dA$ 由什么决定呢?

首先,产生裂缝的概率比例于“危险面积” F ,因此裂缝停止增长的概率比例于 $(1-F)$,

即局部应力 $\sigma < S$ 的概率。

其次, 面积越大的裂缝越容易增长, 因为裂缝的存在使其附近强度降低, 而且面积大才更容易碰上邻近 $S \leq \sigma$ 的薄弱点。因此, 面积越大停止增长的概率越小。由量纲考虑可取:

$$g(A)dA = (1-F)\frac{dA}{A} = (1-F)d\ln A, \quad (1.16)$$

比较前面三个式子, 可得

$$\frac{dN}{N} = d\ln N = -(1-F)d\ln A,$$

两边积分得:

$$N(A) = \alpha A^{-(1-F)},$$

这里 α 是积分常数。由此微分得:

$$n(A)dA = -dN(A) = \alpha(1-F)A^{F-2}dA, \quad (1.17)$$

这是频度—面积关系。

从频度—面积关系 (1.17) 式, 需要经过面积—幅度关系换算到频度—震级关系。为此只要作一系列变量代换。

第一, 裂缝面积与体积有量纲关系 $A \sim V^{\frac{2}{3}}$ 。

第二, 在一定应力作用下, 裂缝区弹性能量与其体积成正比: $E \sim V$ 。

第三, 弹性能 E 与弹性辐射幅度 a_1 呈幂次关系: $E \sim a_1^{\gamma}$ 。

总之, $A \sim a_1^{\frac{2}{3}\gamma}$, $dA \sim a_1^{\frac{2}{3}\gamma-1} da_1$ 。因此 (1.17) 式换算成频度—幅度关系就是:

$$n(a_1)da_1 = -dN = k_1(1-F)a_1^{-m}da_1, \quad (1.18)$$

其中 k_1 是无关紧要的比例系数, 而

$$m = \frac{2}{3}\gamma(1-F) + 1. \quad (1.19)$$

铃木^[7]曾经通过数值结果的比较, 确定 (1.18) 式中的 m 与频度—震级关系中的 b 值只差常数:

$$b = m - 1. \quad (1.20)$$

其实只要认为幅度与震级的关系是

$$\ln a_1 \sim M,$$

在 (1.18) 式中作变量代换,

$$a_1 = k_2 e^M, \quad da_1 = k_2 e^M dM,$$

则

$$n(M)dM = k(1-F)e^{-(m-1)M}dM,$$

两边取对数就是频度—震级关系:

$$\ln n(M) = [\ln k + \ln(1-F)] - (m-1)M = a - bM. \quad (1.21)$$

其中

$$b = m - 1 = \frac{2}{3}\gamma(1-F) = C(1-F), \quad (1.22)$$

就是 §2 节中引用的 (1.4) 式。而

$$a = \ln k + \ln(1-F), \quad (1.23)$$

其中 k 是比例系数 (是一个常数)。由上式可以清楚地看出, 参数 a 也随“安全面积”的缩小而下降, 但变化不及 b 那样显著。

第二章 b 值统计分析方法

从第一章的叙述中我们看到, b 值是有一定物理意义的统计分析参数。通过对观测到的地震频度按震级的分布进行统计分析, 可以估计 b 值的大小。本章中介绍几种估计 b 值的主要方法, 第四章再叙述如何进行统计检验, 并比较不同方法的优缺点。

§1 基本概念

统计分析的出发点是假定地震频度随震级按指数分布

$$n(M) = e^{a' - bM}, \quad (2.1)$$

这里 M 是震级, $n(M)$ 是震级在 M 到 $M + dM$ 之间的地震数, 通常叫微分频度。 a' 、 b 是两个未知参数。将 (2.1) 式两边取对数就是古登堡公式 (1.1)。为书写方便, 公式推导中, 我们采用以 e 为底的指数和自然对数, 数值计算时换成以 10 为底, 以求与习惯用法一致。在这两种表示方法中 a' 、 b 的具体数值只差一常数。在不会引起混淆的地方, 我们用相同的符号表示。

引入变量 $x = M - M_0$, 其中 M_0 为起算震级, 是积分下限。相应地 (2.1) 式改写为

$$n(x) = e^{a - bx}, \quad a = a' - bM_0, \quad x \geq 0 \quad (2.2)$$

通常还引入累计频度

$$N(x) = \int_x^\infty n(t) dt = e^{A - bx}, \quad (2.3)$$

它在数值上等于图 2.1 中画斜线部分的面积, 即 x 以上的地震总数, 其中

$$A = a - \ln b = \ln N(0)$$

是起算震级以上地震总数的对数, 通常称地震活动性。

然而, 在目前的观测水平上, 我们所测定的地震震级 x 并不取连续变化的值, 而是离散型变量。通常的做法是将震级按大小顺序分成 m 档, 微分频度就是相应档内的地震数 n_k , $k = 1, 2, \dots, m$ 。累计频度是

$$N_k = \sum_{i=k}^m n_i. \quad (2.4)$$

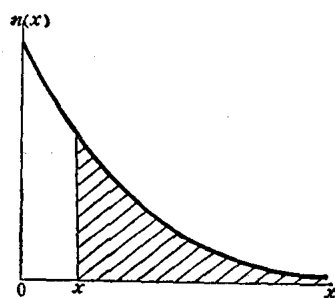


图 2.1 地震频度分布函数

在此还需要说明一点, 书中有时说到 x 级地震, 实际上是指 $M = M_0 + x$ 级地震, 只要联系上下文就能明白它的真实含义。

从数理统计的观点看, 地震频度—震级关系的统计分析, 就是根据一定时间和空间范围内发生的一组地震的震级 $x_1, \dots, x_N$ (通常称为容量为 N 的一个子样) 来估计代表母体特征参数 A 、 b 等, 并检验其可信程度。这与其它在实验室中能重复进行的试验不同, 对于确定的时空范围, 地震只有一个子样, 不能用多次取样的办法来提高估值的精度。

数理统计中常用的估值方法有矩法、最大似然法等〔8〕。对于地震频度按震级的指数分布，这两种方法是等价的，我们将在下一节中介绍。此外，还可以对观测频度作最小二乘拟合，以估计 A 、 b 等参数。这种方法也可按最大似然的观点统一地加以描述。§3 中叙述常用的线性最小二乘法，§4 中介绍我们建议的直接对指数分布作非线性最小二乘拟合的方法〔9〕。为了叙述完整，公式的推导和结果放在一起。读者也可跳过推导，只看结果。

§2 最大似然法

在数理统计中，对随机变量的分布参数进行估值，最大似然法是常用的较好方法。

§2.1 b 的估值

对地震频度的指数分布 (2.2) 式加上归一条件

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1,$$

即可求出微分频度的分布密度

$$f(x) = be^{-bx}, \quad b > 0. \quad (2.5)$$

对于确定的 b 值， $f(x)$ 是出现 x 级地震的概率。反过来，发生了一个 x_i 级地震，也可以问参数 b 应取什么值，才使得发生这样一个地震的概率最大。由

$$\frac{\partial f}{\partial b} = e^{-x_i b} (1 - x_i b) = 0$$

求出

$$\hat{b} = \frac{1}{x_i}.$$

由

$$f^{(2)}(x_i, b) = -x_i e^{-x_i b} < 0,$$

可证明 $f(x_i, b)$ 作为 b 的函数，在其一阶导数为零的点上，即 $\hat{b} = 1/x_i$ 处取极大值 (图 2.2)。

(通常我们用 $\hat{A}$ 、 $\hat{b}$ 等表示对相应参数的统计估值。在不会引起混淆的地方略去符号“ $\wedge$ ”。) 如果 $b = \hat{b}$ ，震级为 x_i 的可能性最大。当然，根据个别地震来估计 b 值，偶然性太大。

现在假定，观测到了 N 个相互独立且遵从同一分布的地震 $x_1, \dots, x_N$ ，则这一复合事件出现的概率等于单个地震出现概率的乘积。

$$F(x_1, \dots, x_N | b) = \prod_{i=1}^N be^{-bx_i}, \quad (2.6)$$

在数理统计中称 F 为似然函数。当子样 $x_1, \dots, x_N$ 固定时， F 是 b 的函数。最大似然法的本质在于，取使 F 达到极大值的 $\hat{b}$ 作为 b 的估值。也就是取能使观测到的这组地震出

现的概率最大的参数值作为未知参数的估值。

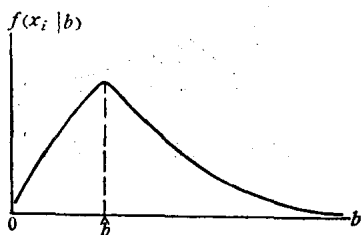


图 2.2 分布密度随参数 b 的变化

由于对数是单调变化的函数，极值点的位置并不因取对数而改变，故 $\ln F$ 与 F 在相同的点上达到极大值。这样就可以把求 F 的极值问题变成求 $\ln F$ 的极值问题。而后者得到的方程组容易求解。将 (2.6) 式取对数得

$$L(b) \equiv \ln F(x_1, \dots, x_N | b) = \sum_{i=1}^N (\ln b - bx_i), \quad (2.7)$$

由

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{b} - x_i \right) = 0$$

求出

$$\hat{b} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N x_i} = \frac{1}{\bar{x}}. \quad (2.8)$$

由

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b^2} = -\frac{N}{b^2} < 0$$

得出 $L(b)$ 作为 b 的函数在其一阶导数为零的点上取极大值。

(2.8) 式也可由矩法推导出来。矩法的本质在于：以子样矩作为相应的总体矩。这里子样的一次矩是

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2.9)$$

由分布密度求出总体的一次矩，即数学期望是

$$E(x) = \int_0^\infty x f(x) dx = b \int_0^\infty x e^{-bx} dx = \frac{1}{b}. \quad (2.10)$$

以 $\bar{x}$ 去估计 $E(x)$ ，便得出 (2.8) 式。

换成原来的震级 $M_i = M_0 + x_i$ ，并改用十进对数，(2.8) 式化为

$$\hat{b} = \frac{N \lg e}{\sum_{i=1}^N (M_i - M_0)}, \quad (2.11)$$

这就是通常说的宇津公式^[7]。他最初是用矩法推导出来的。安艺^[10]指出，这就是最大似然估值，并给出了误差估计。

对 (2.11) 式，在具体计算中一定要注意 M_0 的确切含义。从前面的公式推导中，可以看出 M_0 是积分下限。当用求和代替积分时， M_0 是“起算震级”，比通常事先给定的“起始震级” BM 低半档（通常震级准到小数点后一位，这个差别是 0.05，在 §6.2 节中有详细叙述）。有人不注意这一点细微的区别，把它等同于“起始震级” BM ，因而求得的 b 值系统

地偏高。

实际计算时, 往往不是按 (2.11) 式, 将各个地震的震级直接相加, 而是按 §6.2 节中指出的办法, 将地震分档统计, 用 (2.92) 式计算, 即

$$\hat{b} = \frac{0.4343N}{\sum_{k=1}^m \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta M n_k}.$$

这里 N 为地震总数, m 为分档数, ΔM 为分档间距, n_k 为第 k 档的地震个数, 显然 $N = \sum_{k=1}^m n_k$ 。

§2.2 最大似然估值的性质*

在 b 值分析中, 求出了参数 b 的估值 $\hat{b}$, 工作才做了一半。如前所述, $\hat{b}$ 是根据已发生的一系列地震的震级来估计的, 是观测值 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 的函数。也就是由子样推得的估值与真值之间存在着差异。显然, 我们希望知道这个“差异”的性质, 因此对估值性质的研究将成为另一重要方面。

在讨论这个问题之前, 我们先求估值 $\hat{b}$ 所遵从的分布密度。由 (2.5) 式知道单个地震震级 x 所遵从的分布密度为

$$f(x) = be^{-bx},$$

这里的 b 是母体参数的真值。相应的母函数是

$$g(z) = \int_0^{\infty} e^{zx} f(x) dx = b \int_0^{\infty} e^{-(b-z)x} dx = \frac{b}{b-z}. \quad (2.12)$$

对于 N 个相互独立的地震震级之和 $Y = \sum_{i=1}^N x_i$, 相应的母函数是^[13]

$$G(z) = [g(z)]^N = \frac{b^N}{(b-z)^N}. \quad (2.13)$$

将 (2.12) 式两边对 z 微商 $(N-1)$ 次, 可求得

$$g^{(N-1)}(z) = \int_0^{\infty} x^{N-1} b e^{-(b-z)x} dx = \frac{(N-1)! b}{(b-z)^N}, \quad (2.14)$$

将上式稍加整理得

$$\int_0^{\infty} e^{zx} \left(\frac{b^N}{\Gamma(N)} x^{N-1} e^{-bx} \right) dx = \frac{b^N}{(b-z)^N} = G(z), \quad (2.15)$$

因此 Y 所遵从的分布密度为

$$f(y) = \frac{b^N}{\Gamma(N)} y^{N-1} e^{-by}. \quad (2.16)$$

* 初次阅读时本小节可跳过。

其中 $\Gamma(N) = (N-1)!$ 是伽马函数。

由 (2.8) 式知

$$\hat{b} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N x_i} = \frac{N}{Y},$$

作变量代换, 即可求出 $\hat{b}$ 所遵从的分布密度

$$f(\hat{b}) = \frac{b^N}{\Gamma(N)} \left(\frac{N}{\hat{b}} \right)^{N-1} e^{-\frac{bN}{\hat{b}}} \left| \frac{dY}{d\hat{b}} \right| = \frac{1}{\Gamma(N)} \frac{(bN)^N}{\hat{b}^{N+1}} e^{-\frac{bN}{\hat{b}}} \quad (2.17)$$

求出 $f(\hat{b})$ 之后, 就可以对最大似然估值 $\hat{b}$ 的性质进行讨论。在数理统计中〔8〕, 鉴定估值好坏的标准主要有三条, 即估值的无偏性、一致性和有效性。估值的一致性是指当子样容量无限增大时, 估值收敛到真值; 估值的无偏性是指估值的数学期望等于母体参数的真值; 估值的有效性是要求估值的方差最小, 这是因为估值的方差愈小, 这个估值取到接近于它的数学期望的值就愈频繁, 从而“未知参数的估计值在它真值附近”的概率愈大。

根据定义, 估值 $\hat{b}$ 的数学期望是

$$E(\hat{b}) = \int_0^\infty \hat{b} f(\hat{b}) d\hat{b} = \frac{(bN)^N}{\Gamma(N)} \int_0^\infty \frac{1}{\hat{b}^N} e^{-\frac{bN}{\hat{b}}} d\hat{b},$$

令 $t = 1/\hat{b}$, 作变量代换, 上式变为

$$E(\hat{b}) = \frac{(bN)^N}{\Gamma(N)} \int_0^\infty t^{N-2} e^{-bNt} dt = \frac{N}{N-1} b, \quad (2.18)$$

由此可见, $\hat{b}$ 是 b 的有偏估值, 偏移量近似等于 $1/N$ 。如图 2.3 所示〔图中虚线所指为极值点的位置 $\hat{b} = (Nb/N+1)$ 〕。但是,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(\hat{b}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N-1} b = b. \quad (2.19)$$

因此 $\hat{b}$ 是 b 的渐近无偏估值。

在讨论一致性时, 只需按〔8〕指出的办法证明

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E|\hat{\theta}_N - \theta|^\gamma = 0 \quad (2.20)$$

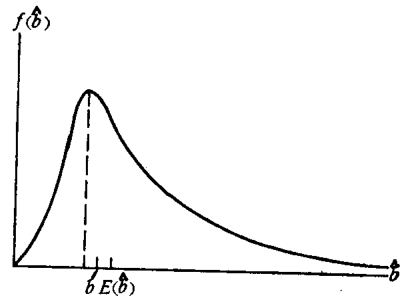


图 2.3 估值 $\hat{b}$ 的分布密度

对某个 $\gamma \geq 0$ 成立就行了。然而在实际运用 (2.20) 式时, 往往是通过验证 $\lim_{N \rightarrow \infty} E|\hat{\theta}_N - \theta|^2 = 0$ 成立来断定 $\hat{\theta}_N$ 为 θ 的一致估计。

在这里, $\hat{\theta}_N = \hat{b}$, $\theta = b$ 。对于 $\gamma = 2$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E|\hat{b} - b|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} E(\hat{b} - b)^2$$