机械振动基础

李晓雷　俞德孚　孙逢春　编著

北京理工大[illegible]社

机械振动基础

李晓雷　俞德孚　孙逢春　编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书讲述机械振动的基本理论，对线性离散系统的振动问题做了较全面的阐述。全书共分为五章，分别介绍了单自由度系统、多自由度系统的振动理论。并专用一章介绍了随机振动的基本理论。

本书是工科院校本科高年级学生学习机械振动的入门教材，也可供工程技术人员自学使用。

图书在版编目(CIP)数据

机械振动基础/李晓雷等编著．—北京：北京理工大学出版社，1996
ISBN 7－81045－109－X

Ⅰ．机…　Ⅱ．李…　Ⅲ．机械振动－高等学校－教材　Ⅳ．TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 01601 号

北京理工大学出版社出版发行
(北京市海淀区白石桥路 7 号)
(邮政编码 100081)
各地新华书店经售
北京地质印刷厂印刷
*
787×1092 毫米　16 开本　9 印张　212 千字
1996 年 5 月第一版　1996 年 5 月第一次印刷
印数：1－3500 册　定价：11.00 元

前　　言

近几十年来，随着科学技术的进步，现代工业生产水平不断提高，工业产品向高、精、尖发展，愈来愈多的产品用于恶劣环境中，而产品要求更高的安全性。这使得机械结构的振动问题日显突出，成为产品设计中必须考虑的问题。以往对设计的产品只做简单的静力校核的办法在许多情况下已不能满足要求，应当根据机械结构的动态特性进行产品设计。随着计算机技术的飞速发展和实验测试技术的进步，人们已经拥有解决机械结构的振动问题的方法和手段。因此，一个现代工程师应该具备必要的机械振动知识。

本书是在多年教学基础上编写的，编写时考虑了当前工科院校高年级本科生数学和力学的实际水平，对传统机械振动教材做了必要的取舍。本书只讨论离散系统的线性振动理论，它用途最广，而且较易学习。考虑到学生的数学基础，没有涉及连续体振动问题。

全书共分五章，分别介绍了单自由度系统的线性振动，多自由度系统的线性振动和线性随机振动。

第一章“导论”介绍了机械振动的基本概念和学习所需的一些数学力学知识，如离散系统元件的性质，简谐振动的描述方法，叠加原理等。

第二章“单自由度系统”全面介绍了单自由度系统的振动理论，包括自由振动，简谐强迫振动，周期振动和瞬态振动。

为了分散多自由度系统振动理论的难点，将多自由度系统振动理论分为两章，第三章“二自由度系统”着重于解释工科院校学生学习时困难较多的一些概念，如不同坐标系下运动微分方程之间的变换关系，固有振动和振型等，均通过例题详细解释。而在第四章“多自由度系统”中则对多自由度系统振动理论从数学上给予完整叙述。多自由度系统振动问题的求解方法则以振型叠加法为重点。考虑到机械振动也是振动实验技术的理论基础，在本章特地扼要介绍了求解多自由度系统振动问题的变换方法。最后以动力吸振器为例，说明与单自由度系统振动问题的求解一样，可以根据不同的激励和具体问题的不同要求，选择适当的求解方法。避免给学生造成多自由度系统振动问题只能用振型叠加法求解的误解。

第五章“随机振动”介绍了随机振动的最基本的理论，以实际中最常用的相关函数和功率谱密度函数为重点，着重于单一随机激励下的响应分析。并以两个随机激励下系统响应为例，简单介绍了多个随机激励下系统响应的求解方法。

本书在编写过程中得到了北京理工大学车辆工程学院振动研究室的同志们的帮助。郑慕侨教授、杨景义教授和丁法乾研究员对本书的编写提出了许多宝贵的意见，黄华同志绘制了部分插图。本书初稿承蒙北京大学力学系固体力学教研室袁明武教授悉心审阅，作者在此向他们表示衷心的感谢。

本书在编写过程参考了国内外出版的有关书籍，限于篇幅，不能一一列举。

由于作者水平所限，书中难免有错误和不当之处，欢迎读者批评指正。

编　者

于北京理工大学车辆工程学院

1994 年 6 月

目　　录

第一章 导论

§1.1 引言

所谓振动，广义地讲，指一个物理量在它的平均值附近不停地经过极大值和极小值而往复变化。机械振动指机械或结构在它的静平衡位置附近的往复弹性运动。本书涉及的振动如果没有特别说明，均指机械振动。

机械振动所研究的对象是机械或结构，在理论分析中要将实际的机械或结构抽象为力学模型，即形成一个力学系统。可以产生机械振动的力学系统，称为振动系统，简称系统。一般来说，任何具有弹性和惯性的力学系统均可能产生机械振动。

振动系统发生振动的原因是由于外界对系统运动状态的影响，即外界对系统的激励或作用。如果外界对某一个系统的作用使得该系统处于静止状态，此时系统的几何位置称为系统的静平衡位置。依据系统势能在静平衡位置附近的性质，系统的静平衡位置可以分为稳定平衡，不稳定平衡和随遇平衡等几种情况。机械振动中的平衡位置是系统的稳定平衡位置。系统在振动时的位移通常是比较小的，因为实际结构的变形一般是比较小的。

在工程和日常生活中有大量的，丰富多彩的振动现象。例如，车辆行驶时的振动，发动机运转时的振动，演奏乐器时乐器的振动。在很多情况下机械振动是有害的，比如，车辆行驶时的振动会使乘员感到不适，在用车床加工零件时车刀的振动会使零件的加工精度下降。而在某些情况下，人们又利用振动进行工作。比如，建筑上利用捣固棒的振动使水泥沙浆混合均匀。

对于工程实际中的结构振动问题，人们关心振动会不会使结构的位移、速度、加速度等物理量过大。因为位移过大可能引起结构各个部件之间的相互干涉。比如汽车的轮轴与大梁会因为剧烈振动而频繁碰撞，造成大梁过早损坏，并危及行车安全。又如，汽车行驶中如果垂直振动加速度过大，将会影响汽车的平顺性，给乘员带来不适或危及所载货物的安全。振动过大也造成结构的应力过大，即产生过大的动应力，有时这种动应力比静应力大的多，容易使结构早期损坏。另外，振动过大会引起其他的副作用，如剧烈的振动会使结构产生强烈的噪声，等等。为了避免振动危害，利用振动进行工作，我们应了解结构振动的规律，在实际工作中应用这些规律。随着科学技术的进步，结构的设计向高强度低重量方向发展，振动问题尤显突出，对结构的设计制造提出了更高的要求。因此，现代的工程技术人员应该掌握必要的机械振动知识，并将它应用于实际工作中。

在我们已经学过的力学课程中，理论力学研究质点和刚体的静力学和动力学，不考虑材料的弹性；材料力学研究结构的静力学，它考虑了材料的弹性性质。机械振动研究结构振动的一般规律，是材料力学在动力学方面的扩展，它与材料力学一样，是讨论材料强度的问题。

在机械振动中，把外界对振动系统的激励或作用，如作用在结构上的外力，道路不平对行驶车辆的影响等等，称为振动系统的激励或输入。而系统对外界影响的反应，如振动系统某部位产生的位移、速度、加速度及应力等，称为振动系统的响应或输出。图 1—1 简明地表明了激

励、响应和系统三者之间的关系，机械振动就是研究这三者的关系。

从理论上讲，激励、系统和响应三者知其二可求出第三者。因此常见的振动问题可以分成下面几种基本课题：

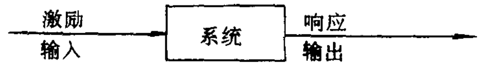

图 1－1

1. *振动设计* 在已知外界激励的条件下设计系统的振动特性，使其响应满足预期的要求。比如汽车的平顺性设计，已经知道激励即路面的性质，根据人体所能承受振动的情况和其他要求，设计汽车的悬架系统。

2. *系统识别* 根据已知的激励与响应的特性分析系统的性质，并可进一步得到振动系统的全部参数。比如振动实验，给系统施加规定的激励，测出系统的响应，通过分析，得到系统的振动性质。

3. *环境预测* 已知系统振动性质和响应，研究激励的特性。比如用加速度传感器测量结构的振动加速度。把加速度传感器看做一个振动系统，它的振动性质是已知的，把它安放在被测结构上，它将随结构一起振动。因而，系统受到的外界激励就是结构的振动。加速度传感器能测出在外界激励下它自身的响应，根据加速度传感器的响应与它的振动性质以及所受的激励之间的关系，可以得到结构的加速度响应。

这些基本课题在工程实际中应用很广，研究它们需要深入了解振动系统的性质和它与外界激励、系统响应之间的关系，这些是机械振动课程的基本内容。

§1.2 振动的分类

机械振动包含了丰富的内容，按不同情况进行分类便于加深对它的认识，方便分析和处理振动问题。下面是一些常见的分类。

1.2.1 线性振动和非线性振动

振动大致可分成线性振动和非线性振动两种。

从物理上看，线性振动是指系统在振动过程中，振动系统的惯性力、阻尼力（即耗散振动能量的力）、弹性力分别与绝对加速度、相对速度、相对位移成线性关系。做线性振动的系统称为线性振动系统。从对系统振动的数学描述方法来看，所谓线性振动系统，指该系统的振动可以用线性微分方程描述。

非线性振动系统在振动过程中，系统的惯性力、阻尼力、弹性力与绝对加速度、相对速度、相对位移的关系没有线性振动那样简单，比如，系统阻尼力可能是相对速度的非线性函数，也可能是位移的函数，或同时是位移和速度的函数。因而系统的振动过程只能用非线性微分方程描述。

将一个具体结构抽象为振动系统时，究竟采用线性系统，还是采用非线性系统，这往往取决于结构振动时的运动范围或者是否便于分析和解决问题，而不是结构的固有性质。具有理想线性性质的结构是不存在的。

例 1.1 单摆的运动（见图 1－2）。摆长为 L，单摆的质量为 m。

取单摆与垂直方向的夹角 θ 描述单摆的运动，以逆时针方向为正。设单摆沿坐标正向有一个移动 θ，即单摆向右摆动 θ。对 o 点取矩，得到单摆的运动微分方程

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta \tag{1.1}$$

当 θ 较大时，$\sin\theta$ 是 θ 的非线性函数，因而式(1.1)是一个非线性微分方程，此时单摆应视为非线性振动系统。

当 θ 很小以至于 $\sin\theta\approx\theta$ 时，方程(1.1)可近似写成

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\theta \tag{1.2}$$

这是个线性微分方程，此时可把单摆看成线性振动系统。因此，同一个单摆在摆角 θ 大小不同时，要作为不同的振动系统考虑。

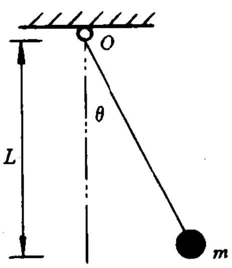

图 1－2 单摆

在线性振动中叠加原理成立，我们在本章第五节讨论叠加原理。由于有叠加原理，从数学上看，处理线性振动问题远比非线性振动简单。线性振动理论是振动理论中最为成熟和实用的部分，也是振动理论中的基础部分。本书只讨论线性系统的振动问题。

在许多实际问题中，非线性关系是客观存在的，例如汽车板簧的力与相对位移的关系就是如此。在许多情况下，可以用线性关系来近似非线性关系。至于采用什么样近似的方法与涉及的具体问题有关，而且已超出了本书的范围。

1.2.2 确定性振动和随机振动

一个振动系统的振动，如果对任意时刻 t，都可以预测描述它的物理量的确定的值 x，即振动是确定的或可以预测的，这种振动称为确定性振动。反之，对许多振动，我们无法预料它在未来某个时刻的确定值。比如，汽车行驶时由于路面不平引起的振动，地震时建筑物的振动等等。这种振动称为随机振动。在确定性振动中，振动系统的物理量可以用随时间变化的函数描述。而随机振动只能用概率统计方法描述。本书第五章专门讨论随机振动问题。

1.2.3 离散系统和连续系统

系统的自由度数定义为描述系统运动所需要的独立坐标的数目。比如例 1.1 所示的单摆，只需要一个独立坐标 θ 描述，因此，单摆只有一个自由度。在实际中遇到的大多数振动系统，其质量和刚度都是连续分布的，通常需要无限多个自由度才能描述它们的振动，它们的运动微分方程是偏微分方程，这就是连续系统。我们所熟悉的结构如等截面的梁、杆，以及板等等，它们的质量和刚度都是连续分布的，因此它们的振动均需要简化为连续系统的振动问题来讨论。

在结构的质量和刚度分布很不均匀时，或者为了解决实际问题的需要，往往把连续结构简化为由若干个集中质量，集中阻尼和集中刚度组成的离散系统。所谓离散系统是指系统只有有限个自由度。比如，在讨论汽车的垂直振动时，由于汽车板簧以上部分的刚度和质量比板簧的刚度和质量大的多，许多情况下可以作为刚体看待。而板簧的质量相对较小，可以不计。如果再将板簧以下的部分也按刚度、阻尼和质量的大小，简化成若干个集中质量，集中阻尼和集中刚度，则汽车的垂直振动可简化为一个离散系统的振动问题来讨论。

在离散系统中，单自由度系统即只有一个自由度的振动系统最简单，两个以上自由度的离散系统称为多自由度系统。

描述离散系统的振动可用常微分方程，因此，离散系统比连续系统在数学处理方面难度要小。

在具体问题中采用多少个自由度的振动系统描述结构振动要看实际需要和要求的精度，并要考虑数学处理时的难度。但取定的振动系统应该保持原有结构的重要性质，接近结构振动的实际情况并使问题的分析处理较为简单，能得到与实际情况相近且精度满意的结果。

1.2.4 其他的分类

通常按外界激励情况和系统对激励的响应情况分类。

按激励情况分类：

自由振动：系统在初始激励下或原有的激励消失后的振动。

强迫振动：系统在持续的外界激励作用下产生的振动。

按响应情况分类：

大致可分为确定性振动和随机振动。其中确定性振动又可分为：

简谐振动：振动的物理量为时间的正弦或余弦函数。

周期振动：振动的物理量为时间的周期函数，可用谐波分析的方法归结为一系列简谐振动的叠加。显然，简谐振动也是周期振动。

瞬态振动：振动的物理量为时间的非周期函数，在实际的振动中通常只在一段时间内存在。

§1.3 离散系统各元件的特征

机械或结构产生振动的内在原因是本身具有在振动时储存动能和势能，而且释放动能和势能并能使动能和势能相互转换的能力。我们以图 1－3 所示的弹簧质量振动系统的振动为例，看在振动中系统的动能和势能是如何变化的。

例 1.2 如图 1－3 所示系统，质量 m 只沿水平方向运动。这是一个典型的单自由度无阻尼振动系统，它代表可用一个自由度描述而且可以不考虑阻尼影响的结构的振动模型。

如果把质量 m 向右移动 x_0，然后无初速度地放开质量，在弹簧 k 的弹性力作用下，质量将以 o 为中点做往复运动。由于有质量和弹簧，在运动时系统具有动能和弹性势能。当质量移动到 x_0 或 $-x_0$ 时，弹簧变形最大，因而弹性势能达到最大。此时速度为零，因而动能为零。当质量移动到 o 点时，速度和动能达到最大，但弹簧无变形，弹性势能为零。系统就这样以静平衡位置 o 点为中心往复振动，在振动过程中，弹簧储存和释放势能，质量储存、释放动能，并且动能与势能不停地相互转换。

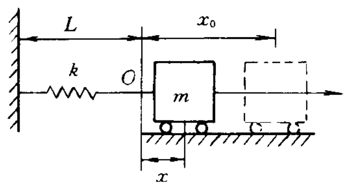

图 1－3

在实际的振动中，当外界对系统的干扰消失后，通常系统会逐渐停止振动。也就是说，系统本身有把振动能量转变为其他能量（如热能等）的能力，这称之为能量耗散。通常在振动模型中引入阻尼元件以计及系统的能量耗散。有阻尼元件的单自由度系统见图 1－4。

惯性元件、弹性元件和阻尼元件是离散振动系统三个最基本的元件。在系统振动过程中惯性元件储存和释放动能，弹性元件储存和释放势能，阻尼元件耗散振动能量。如果振动时系统能量耗散很小，说明系统的阻尼很小，在某些情况下可以忽略。称这种不耗散振动能量的系统

为无阻尼系统，无阻尼系统中没有阻尼元件。

对于一个具体结构，有时这三种元件不像图 1—4 那样可以一目了然，要对结构做具体分析。如例 1.1 所示的单摆，质量 m 在振动中既储存动能，又储存势能，身兼惯性元件和弹性元件二职。另外，单摆在自由振动时受到空气阻力和悬挂点处阻力的作用会逐渐停振，但从结构上看不到有阻尼元件，必须在振动系统中人为加上阻尼元件才能计及能量耗散。

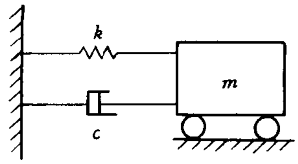

图 1—4

下面讨论惯性元件、弹性元件和阻尼元件在线性振动条件下的基本特征。

弹性元件。如弹簧和扭簧。它的特征是，忽略它的质量和阻尼，在振动过程中储存势能。弹性力与其两端的相对位移成比例，方向相反。如图 1—5 所示直线弹簧，它 1、2 端的位移为 x_1 和 x_2，则弹簧 2 端对外界的作用力为

$$F_{s2} = -k(x_2 - x_1) \tag{1.3}$$

k 为弹簧刚度，单位为 N/m。k 通常也用来标记弹簧。在传动机构等扭转振动系统中，系统做扭转振动，此时系统的弹性势能由扭转弹簧储存，扭转弹簧的表示方法参见图 1—6。线性扭转弹簧联系扭矩与转角，它的 2 端对外界的扭矩为

$$T_{s2} = -k_t(\theta_2 - \theta_1) \tag{1.4}$$

k_t 是扭转刚度，单位为 N·m/rad。

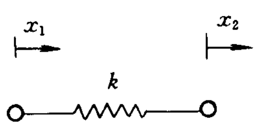

图 1—5

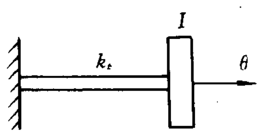

图 1—6

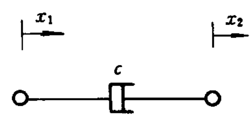

图 1—7

阻尼元件。在振动过程中消耗振动能量。在线性振动系统中，阻尼力的大小与阻尼元件两端的相对速度成比例，方向相反，这种阻尼又称为粘性阻尼。我们忽略粘性阻尼元件的质量和弹性。如图 1—6 所示的粘性阻尼元件，它的 2 端对外界的作用力为

$$F_{d2} = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \tag{1.5}$$

c 为粘性阻尼系数，单位为 N·s/m。c 通常也用来标记阻尼元件。

惯性元件。如集中质量和转动惯量。它的特点是完全刚性且无阻尼，在振动过程中储存动能。集中质量的惯性力与惯性坐标系下的加速度（绝对加速度）成正比，方向相反。即

$$F_m = -m\ddot{x} \tag{1.6}$$

m 为离散质量，单位为 kg。m 通常也用来标记离散质量。对于扭转振动系统，广义力为扭矩，广义加速度为角加速度，此时有

$$T_m = -I\ddot{\theta} \tag{1.7}$$

I 为转动惯量，单位为 kg·m^2。

在分析复杂的机械结构的振动问题时，往往要把机械结构简化成若干个无质量的弹性元件、无质量的阻尼元件、无弹性的惯性元件形成的离散系统的模型，并以各离散元件的物理参数 m、c、k 为描述系统特性的参数。

在实际中，经常遇到若干个弹性元件串联或并联的情况，类似于电路元件的串联或并联，

我们称此时总的刚度为等效刚度。同样可以定义等效阻尼和等效质量。注意只能是同类元件的串联或并联。

§1.4 简谐振动及其表示方法

结构振动时，描述它振动情况的物理量是随时间变化的，可以表示为时间 t 的函数，如 $x(t)$，$F(t)$，等等。这种描述振动的方法称为时域描述，而函数 $x(t)$，$F(t)$称为时间历程。

1.4.1 简谐振动

周期运动是物体运动的一种形式，它的特点是经过相等的时间间隔 T 后运动又重复出现。T 称为周期运动的周期。如果物体运动用时间函数 $x(t)$表示，周期运动满足

$$x(t+T)=x(t) \tag{1.8}$$

简谐运动是最简单的周期运动，它是时间的单一正弦或余弦函数，即

$$x(t)=A\sin(\omega t+\theta) \tag{1.9}$$

或

$$x(t)=B\cos(\omega t-\varphi) \tag{1.10}$$

如果振动时系统的物理量随时间的变化为简谐函数，称此振动为简谐振动。单自由度系统无阻尼自由振动时，它的位移等物理量就是简谐函数。比如单摆的运动微分方程(式 1.2)的解可以写为

$$\theta=B\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t-\varphi\right)$$

这里，B 和 φ 是由初始条件决定的常数。

简谐运动可视为一个绕原点做等速圆周运动的点在水平轴上的投影。如图 1－8 所示，取水平轴为 x 轴，点 P 距原点的距离为 A，连接 OP 两点的直线 OP 由水平位置开始以等角速度 ω 绕 O 点转动，在任一时刻 t，点 P 的 x 坐标(即 OP 在 x 轴上的投影)为

$$x=A\cos\omega t$$

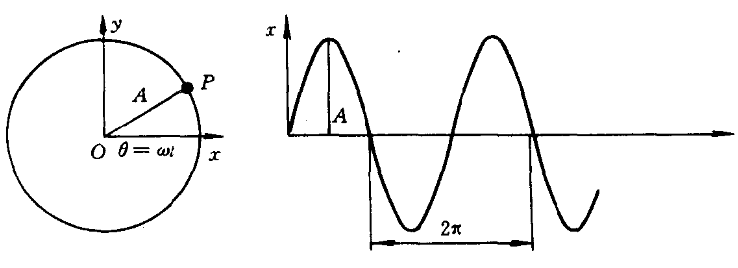

图 1－8

式中，ωt 为相位，表示直线 OP 在 t 时刻与水平轴的夹角。ω 是直线 OP 在单位时间内转过的弧度，称为圆频率，它就是理论力学中的角速度，单位为 rad/s。因为直线 OP 绕原点转过 2π 弧度为一个周期 T，故上式应满足条件：

$$A\cos[\omega(t+T)]=A\cos(\omega t+2\pi)$$

即

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.11}$$

称 T 的倒数

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.12}$$

为简谐运动的频率。如果振动位移为简谐运动，我们称此振动为简谐振动。

如果直线 OP 不是由水平位置开始转动，其初始位置与水平位置的夹角为 $-\varphi$，则 OP 在 x 轴上的投影为

$$x = A\cos(\omega t - \varphi) \tag{1.13}$$

式中，$-\varphi$ 称为初角。

由式(1.13)可得到简谐振动的速度和加速度的表达式：

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \varphi) = A\omega\cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$$
$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \varphi) = A\omega^2\cos(\omega t - \varphi + \pi) \tag{1.14}$$

可见，简谐振动的速度、加速度与位移一样，都是简谐函数。三者的频率相同，而速度、加速度的相位分别比位移超前 $\pi/2$ 和 π，幅值分别增大 ω 和 ω^2 倍。从式(1.13)和(1.14)可得：

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \tag{1.15}$$

这表明：简谐振动的加速度大小与位移成正比，方向与位移相反。这是简谐振动的一个重要特点。

1.4.2 两种常用的简谐振动表示方法

1. *简谐振动的向量表示方法* 在振动问题中，用大小不变而绕固定始点旋转的旋转向量表示简谐振动能更形象地说明简谐振动的物理概念。

把图 1—8 中的直线 OP 看作绕 O 点的向量 α(参见图 1—9)，而且它与 x 轴的夹角为 $\omega t-\varphi$，$-\varphi$ 是 t 为零时 α 与 x 轴的夹角，即初相角。当 $\omega t-\varphi$ 角随时间 t 线性增大时，意味着整个向量以角速度 ω 反时针方向旋转，向量 α 在两个坐标轴上的投影按简谐函数变化，每当向量转过 2π 角度，运动就出现重复。这种向量称为旋转向量。向量 α 在 x 轴和 y 轴上的投影分别为

$$\begin{aligned} x &= \cos(\omega t - \varphi) \\ y &= \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \tag{1.16}$$

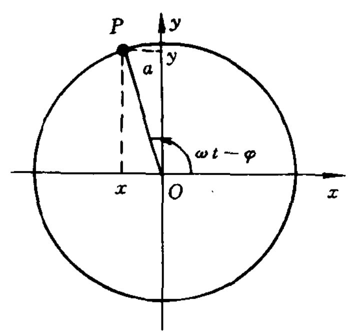

图 1—9

这正是简谐运动。两个同角速度的旋转向量的和满足向量求和的平行四边形法则，并保持角速度不变。从物理上讲，两个同频率的简谐振动可以合成为一个与原来频率相同的简谐振动，反之，一个简谐振动也可以写成两个与其频率相同、彼此相位差为任一给定值的简谐振动之和。式(1.16)中的两个简谐振动相位差为 $\pi/2$，这说明，做简谐振动的振动物体从偏离平衡位置的任一位置开始的简谐振动，相当于两个频率相同、相位差为 $\pi/2$ 的简谐振动的合成。显然，两个旋转角速度不同即两个频率不同的简谐振动不能合成旋转向量。

2. **简谐振动的复数表示方法** 参照图(1－10)，一个复数 z 对应着复平面上的一个点 z，因此可用一个由原点指向该点的向量表示。这个向量的长度就是复数 z 的模 A，其与实轴的夹角由幅角 θ 确定。

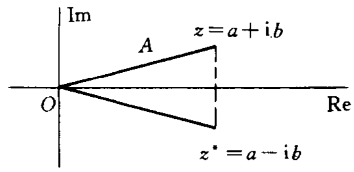

图 1－10

根据直角坐标(x,y)和复数 $z=x+iy$ 的对应关系，利用 Euler 公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

得

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= A(\cos\omega t + i\sin\omega t) \\ &= Ae^{i\omega t} \end{aligned} \tag{1.17}$$

这里的 $e^{i\omega t}$可视为一个在复平面上以角速度 ω 旋转的单位复向量。z 的模和幅角为

$$\begin{aligned} |z|^2 &= A^2 = x^2 + y^2 \\ \omega t &= \operatorname{arctg}(y/x) \end{aligned} \tag{1.18}$$

由式(1.17)可知，复向量分为实数部分和虚数部分，它们都是时间的简谐函数：

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}[z] = \mathrm{Re}[Ae^{i\omega t}] \\ &= A\cos\omega t \\ y &= \mathrm{Im}[z] = \mathrm{Im}[Ae^{i\omega t}] \\ &= A\sin\omega t \end{aligned} \tag{1.19}$$

把简谐振动表示为复数的指数形式，将方便书写和运算。

§1.5 叠加原理

叠加原理是分析线性振动系统的振动性质的基础。这里，我们用微分算子的方法给出叠加原理的数学表述。

微分算子是指微分符号的组合。比如，在直角坐标系下的拉普拉斯方程可写成：

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u = 0 \end{aligned}$$

这里

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

称为拉普拉斯算子，它与其右边的函数构成一个拉普拉斯方程。可以认为，拉普拉斯算子作用于函数 u，得到关于 u 的拉普拉斯方程。拉普拉斯算子是常见的微分算子。

又如，一个标量场 f 的梯度∇f 在直角坐标系下可以写成

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)f \end{aligned}$$

这里，i,j,k 是直角坐标系的三个基向量。

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

称为梯度算子，它与其右边的函数构成一个向量。梯度算子∇作用于函数 f，它不仅对函数 f 求偏导数，而且用 f 的偏导数构成一个向量。

每一个线性振动系统均可以用一个线性的运动微分方程或运动微分方程组描述，而微分方程可以统一写成：

$$R[x] = F(t)$$

这里 R 为微分算子。按振动理论的习惯，称 x 为响应，$F(t)$为激励。因此一个微分算子可对应于一个振动系统。而且，微分算子的性质完全由系统的物理性质决定，与外界激励无关。引进了微分算子后可使微分方程的表达式变得非常简洁，并可以从整体上对微分方程进行研究，找出某一类微分方程共有的性质。

我们知道，如果两个函数 $u(x,y,z)$和 $v(x,y,z)$均满足拉普拉斯方程，则它们的线性组合 $au(x,y,z)+bv(x,y,z)$也满足拉普拉斯方程，这里 a,b 是任意常数。因为

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0$$

则

$$\begin{aligned}\Delta(au + bv) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(au + bv) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(au) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(bv) \\ &= a\Delta u + b\Delta v = 0\end{aligned}$$

实际上，所有的线性微分方程都有这个性质，它被称为叠加原理，可用于判断一个微分方程是不是线性微分方程，它也就是线性微分算子的定义。

对一个微分算子 R，如果有任意两个激励 $F_1(t)$、$F_2(t)$，它们分别对应于两个响应 $x_1(t)$、$x_2(t)$，即

$$R[x_1] = F_1(t)$$
$$R[x_2] = F_2(t)$$

如果对激励

$$F(t) = c_1F_1(t) + c_2F_2(t) \qquad (c_1\text{、}c_2 \text{ 为任意常数})$$

有对应的响应 $x(t)$，满足

$$R[x] = F(t)$$

并且成立

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

也就是说，成立

$$\begin{aligned}R[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] &= c_1F_1(t) + c_2F_2(t) \\ &= c_1R[x_1] + c_2R[x_2]\end{aligned} \tag{1.20}$$

则称 R 为线性微分算子，R 所对应的微分方程为线性微分方程，R 所代表的系统为线性系统。式(1.20)即为叠加原理。

很容易把叠加原理推广到有多个激励时的情况，这留给读者完成。

从上面叙述可知，说某一振动系统为线性系统，或说其运动微分方程为线性微分方程，或说其微分算子为线性微分算子，或说在该系统中叠加原理成立，这些说法都是等价的。

§1.6　振动的幅值度量

振动在时域的幅值特性对度量振动的大小是很重要的。常用的度量振动幅值的参数有：

1. **峰值**　振动量的最大值。若以 $x(t)$ 表示某一振动量，则峰值用 X 表示

$$X = |x(t)|_{\max} \tag{1.21}$$

2. **平均值**　类似于交流电中的直流分量，可从下式得到

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t \tag{1.22}$$

3. **均方值**　定义为

$$\overline{x^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.23}$$

因为动能是速度的平方，势能是变形量的平方，所以，一般来讲，均方值与能量有关，常用来度量振动能量。

4. **均方根值(rms)**　是$\overline{x^2}$的平方根。

$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\overline{x^2}} \tag{1.24}$$

例如，正弦波 $x(t)=A\sin\omega t$，在一个完整的周期内的平均值、峰值、均方值、均方根值分别为

$$\bar{x} = 0$$

$$X = |A\sin\omega t|_{\max} = A$$

$$\overline{x^2} = A^2/2$$

$$x_{\mathrm{rms}} = A/\sqrt{2}$$

习　题

1.1　试举出振动设计、系统识别和环境预测的实例。

1.2　如果把双轴汽车的质量分别离散到前、后轴上去，在考虑悬架质量和非悬架质量两个离散质量的情况下，画出前轴或后轴垂直振动的振动模型简图，并指出在这种化简情况下，汽车振动有几个自由度？

1.3　设有两个刚度分别为 k_1, k_2 的线性弹簧如图 $T-1.3$ 所示，试证明：

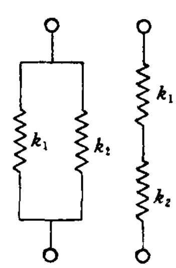

图 T-1.3

1）它们并联时的总刚度 k_{eq} 为

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

2）它们串联时的总刚度 k_{eq} 满足

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

1.4 求图 $T-1.4$ 所示扭转系统的总刚度。两个串联的轴的扭转刚度分别为 k_{t1}, k_{t2}。

1.5 两只减振器的粘性阻尼系数分别为 c_1, c_2，试计算总粘性阻尼系数 c_{eq}

1）在两只减振器并联时，

2）在两只减振器串联时。

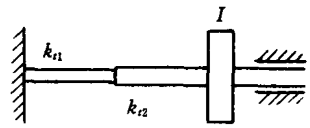

图 $T-1.4$

1.6 一简谐运动，振幅为 0.5cm，周期为 0.15s，求最大速度和加速度。

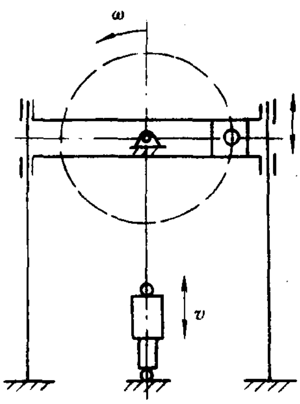

图 $T-1.13$

1.7 一加速度计指示出结构振动频率为 82Hz，并具有最大加速度 $50g$，求振动的振幅。

1.8 证明：两个同频率但不同相角的简谐运动的合成仍是同频率的简谐运动，即

$$A\cos\omega t + B\cos(\omega t - \varphi) = C\cos(\omega t - \theta)$$

并讨论 $\varphi = 0, \pi/2, \pi$ 三种特例。

1.9 把复数 $4+5\mathrm{i}$ 表示为指数形式。

1.10 证明：一个复向量用 i 相乘，等于把它旋转 $\pi/2$。

1.11 证明：梯度算子 ∇ 是线性微分算子，即

$$\nabla[af(x,y,z) + bg(x,y,z)] = a\nabla f(x,y,z) + b\nabla g(x,y,z)$$

这里，a, b 是与 x、y、z 无关的常数。

1.12 求函数

$$g(t) = A\cos p\omega t + B\cos q\omega t$$

的均方值。考虑 p 与 q 之间的如下三种关系：

① $q = np$，这里 n 为正整数；

② q/p 为有理数；

③ q/p 为无理数。

1.13 汽车悬架减振器机械式常规性能试验台，其结构形式之一如图 $T-1.13$ 所示。其激振器为曲柄滑块机构，在导轨下面垂向连接被试减振器。试分析减振器试验力学的基本规律（位移、速度、加速度、阻尼力）。

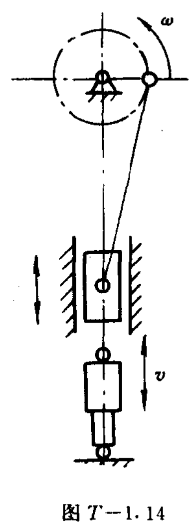

图 $T-1.14$

1.14 汽车悬架减振器机械式常规性能试验台的另一种结构形式如图 $T-1.14$ 所示。其激振器采用曲柄滑块连杆机构，曲柄被驱动后，通过连杆垂向带动与滑块连接的被试减振器。试分析在这种试验台上的减振器试验力学的基本规律，并与前题比较。